TENTAMEN TOPOLOGIE

Woensdag 5 januari 2022, 10:15–13:15

Voor dit tentamen mag je het dictaat, het boek *A Taste of Topology* van Runde en eventuele eigen aantekeningen gebruiken die betrekking hebben op het vak. Het gebruik van andere bronnen of elektronische hulpmiddelen is niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt. Je mag in je antwoorden verwijzen naar resultaten uit het dictaat, maar niet naar opgaven.

In alle opgaven heeft $\mathbf{R}^n$ (respectievelijk $\mathbf{C}$) de euclidische metriek en topologie.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{aantal punten})/10$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **vijf** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(12 pt) **1.** In $\mathbf{R}^2$ bekijken we de deelruimten

$$\begin{aligned} X &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0 \text{ of } x^2 + y^2 \in \mathbf{Q}\}, \\ Y &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 0\}, \\ Z &= \mathbf{Z}^2. \end{aligned}$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: open, dicht in $\mathbf{R}^2$, discreet, enkelvoudig samenhangend.

(20 pt) **2.** Zij $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ de verzameling natuurlijke getallen, en zij V de $\mathbf{R}$-vectorruimte van alle begrensde functies $f \colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ voorzien van de puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging. Bekijk de afbeelding

$$\begin{aligned} \|\ \| \colon V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |f(n)|. \end{aligned}$$

(a) Bewijs dat deze som voor alle $f \in V$ convergeert en dat $\|\ \|$ een norm op V is.

(b) Voor alle $m \in \mathbf{N}$ definiëren we $f_m \in V$ door

$$f_m(n) = \begin{cases} (4/3)^n & \text{als } n \le m, \\ 0 & \text{als } n > m. \end{cases}$$

Bewijs dat $(f_m)_{m \ge 0}$ een Cauchyrij in V is.

(c) Bewijs dat $(V, \|\ \|)$ geen Banachruimte is.

(20 pt) **3.** Zij X een topologische ruimte. Voor elke deelverzameling $S \subseteq X$ noteren we het inwendige en de afsluiting van S in X met S° respectievelijk $\bar{S}$. Laten we een deelverzameling $S \subseteq X$ *speciaal* noemen als geldt $\overline{S^\circ} = (\bar{S})^\circ$.

(a) Stel dat S speciaal is. Bewijs dat het complement $X \setminus S$ speciaal is.

(b) Zij $X = \mathbf{Q}$ met de deelruimtetopologie van $\mathbf{R}$. Bewijs dat $\{x \in \mathbf{Q} \mid 0 < x^2 < 2\}$ speciaal is.

(c) Zij X een Hausdorffruimte. Stel dat elke open deelverzameling van X speciaal is. Bewijs dat X totaal onsamenhangend is.

(16 pt) **4.** Zijn X en Y twee topologische ruimten. Bewijs dat de samenhangscomponenten van $X \times Y$ precies de deelruimten van de vorm $C \times D$ zijn met C een samenhangscomponent van X en D een samenhangscomponent van Y.

(16 pt) **5.** Bepaal (met onderbouwing) de fundamentaalgroep van de topologische ruimte $X = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$ met het basispunt $(1, 0, 0)$.

(18 pt) **6.** Beschouw de eenheidscirkel S^1 als de deelruimte $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Bekijk voor alle $n \in \mathbf{Z}$ de afbeelding

$$\begin{aligned} f_n \colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n. \end{aligned}$$

Bewijs dat f_m en f_n homotoop zijn dan en slechts dan als geldt $m = n$.

Succes!