UITWERKING HERTENTAMEN TOPOLOGIE

Woensdag 26 januari 2022, 10:15–13:15

(12 pt) **1.** De gegeven deelruimten hebben de volgende eigenschappen:

	X	Y	Z
gesloten	nee	ja	nee
compact	nee	ja	nee
dicht in $\mathbf{R}^2$	ja	nee	nee
totaal onsamenhangend	nee	nee	ja

(20 pt) **2.** (a) Merk op dat voor alle $n \in \mathbf{N}$ geldt $|f(n) - g(n)| \leq 1$. Dit impliceert

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|f(n) - g(n)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - 1/2} \\ &= 2.\end{aligned}$$

Dit laat zien dat de som convergeert. Er geldt duidelijk $d(f,g) \geq 0$ voor alle $f, g \in X$, en omdat de termen in de som niet-negatief zijn, geldt gelijkheid dan en slechts dan als $|f(n) - g(n)| = 0$ voor alle n, dus als $f = g$. Verder geldt voor alle $f, g, h \in X$

$$\begin{aligned}d(f,g) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|f(n) - g(n)| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|g(n) - f(n)| \\ &= d(g,f)\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}d(f,h) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|f(n) - h(n)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(|f(n) - g(n)| + |g(n) - h(n)|) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|f(n) - g(n)| + \sum_{n=0}^{\infty} |g(n) - h(n)| \\ &= d(f,g) + d(g,h).\end{aligned}$$

Dit laat zien dat d een metriek op X is.

(b) Uit de berekening in (a) volgt $d(f,g) \leq 2$ voor alle $f, g \in X$. Dit impliceert direct dat (X, d) begrensd is.

(c) Zij $0 \in X$ de nulfunctie, en zij $N\colon X \to X$ de afbeelding die elke $f \in X$ op 0 afbeeldt. We bewijzen dat N homotoop is met de identiteit op X. Bekijk de afbeelding

$$\begin{aligned}F\colon [0,1] \times X &\longrightarrow X \\ (t, f) &\longmapsto tf\end{aligned}$$

waarbij $(tf)(n) = t \cdot f(n)$. Dan is F continu (hier hoeft geen uitgebreid bewijs van gegeven te worden), en er geldt $F(0,f) = 0$ en $F(1,f) = f$. Dit laat zien dat X samentrekbaar is.

(20 pt) **3.** (a) Uit $S \cap T = \emptyset$ volgt $S \subseteq X \setminus T$. Dit impliceert

$$\bar{S} \subseteq \overline{X \setminus T} = X \setminus T^\circ,$$

en hieruit volgt $\bar{S} \cap T^\circ = \emptyset$.

(b) Dit geldt niet noodzakelijk. Neem bijvoorbeeld $X = \mathbf{R}$ en $S = T = \{0\}$, dan geldt $T^\circ = \emptyset$ en dus ook $\bar{S} \cap T^\circ = \emptyset$, maar $S \cap T = \{0\} \neq \emptyset$.

(c) We moeten bewijzen dat elke deelverzameling van X open is. Zij $S \subseteq X$ en definieer $f\colon X \to \{0, 1\}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in S, \\ 1 & \text{als } x \notin S. \end{cases}$$

Per aanname is f continu, dus $f^{-1}\{0\}$ (wat gelijk is aan S) is open in X. Dit laat zien dat X discreet is.

(16 pt) **4.** We bekijken X en Y als deelruimten van $X \sqcup Y$. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van $X \sqcup Y$. Dan is $\mathcal{U}_X = \{U \cap X \mid U \in \mathcal{U}\}$ een open overdekking van X. Omdat X compact is, heeft $\mathcal{U}_X$ een eindige deeloverdekking, zeg $\{U \cap X \mid U \in \mathcal{U}'_X\}$ met $\mathcal{U}'_X \subseteq \mathcal{U}$ eindig. Net zo is er een eindige deelcollectie $\mathcal{U}'_Y \subseteq \mathcal{U}$ zodanig dat $\{U \cap Y \mid U \in \mathcal{U}'_Y\}$ een eindige deeloverdekking is van $\mathcal{U}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{U}\}$. Neem nu $\mathcal{U}' = \mathcal{U}'_X \cup \mathcal{U}'_Y$; dan is $\mathcal{U}'$ een eindige deelcollectie van $\mathcal{U}$, en omdat X overdekt wordt door $\mathcal{U}'_X$ en Y door $\mathcal{U}'_Y$, wordt $X \sqcup Y$ overdekt door $\mathcal{U}'$. We concluderen dat $X \sqcup Y$ compact is.

Laat nu $x, y \in X \sqcup Y$ gegeven zijn met $x \neq y$. Als geldt $x, y \in X$, dan zijn er (omdat X een Hausdorffruimte is) disjuncte open omgevingen $U, V \subseteq X$ van x en y in X. Wegens de definitie van de topologie van de disjuncte vereniging zijn deze ook open in $X \sqcup Y$, en zijn daar dus disjuncte open omgevingen van x en y. Hetzelfde argument gaat op voor $x, y \in Y$. Tot slot bekijken we het geval $x \in X$ en $y \in Y$. Dan zijn X en Y zelf disjuncte open omgevingen van x en y in $X \sqcup Y$. We concluderen dat $X \sqcup Y$ een Hausdorffruimte is.

(16 pt) **5.** De ruimte X is homeomorf met de rechthoek

$$\{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < r < 3 \text{ en } -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$$

via de afbeelding die (r, θ) naar $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ stuurt. Deze rechthoek is stervormig en dus samentrekbaar. Wegens het bestaan van bovengenoemd homeomorfisme is ook X samentrekbaar. In het college is bewezen dat hieruit volgt dat X enkelvoudig samenhangend is, dus triviale fundamentaalgroep heeft.

(18 pt) **6.** (a) Allereerst merken we op dat Y niet-leeg is omdat Y wegsamenhangend is, en dat X dus niet-leeg is. Zijn $x, x' \in X$ willekeurig gegeven. Omdat p surjectief is, zijn er $y, y' \in Y$ met $p(y) = x$ en $p(y') = x'$. Omdat Y wegsamenhangend is, bestaat er een weg $\gamma\colon [0, 1] \to Y$ van y naar y'. De samenstelling $p \circ \gamma$ is nu een weg van x naar x'. Hieruit volgt dat X wegsamenhangend is.

(b) Dit geldt niet noodzakelijk. Neem bijvoorbeeld $X = \{0\}$ en $Y = \{0, 1\}$ met de discrete topologie, en zij $p\colon Y \to X$ de unieke afbeelding. Dan is p continu en surjectief, en $p^{-1}\{0\} = \{0, 1\}$ is homeomorf met de disjuncte vereniging $\{0\} \sqcup \{0\}$. Dit laat zien dat p een overdekkingsafbeelding is. De ruimte Y is echter niet wegsamenhangend (de wegsamenhangscomponenten zijn $\{0\}$ en $\{1\}$).