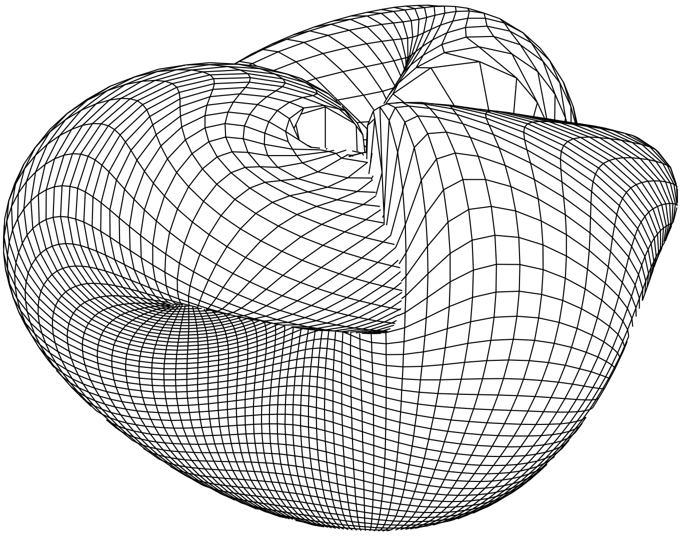
Topologie

Peter Bruin
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
P.J.Bruin@math.leidenuniv.nl



Universiteit
Leiden
Wiskunde en
Natuurwetenschappen

Inhoudsopgave

Inleiding. De topologie is het deelgebied van de wiskunde waarin begrippen als *ruimte*, *convergentie* en *continuïteit* systematisch worden gedefinieerd en bestudeerd. Net als in bijvoorbeeld de algebra zijn de definities van de basisconcepten relatief algemeen en daardoor enerzijds abstract, maar anderzijds ook zeer breed toepasbaar. Uiteenlopende toepassingen van de topologie zijn te vinden in de meetkunde, de analyse, de natuurkunde en zelfs de getaltheorie.

Het eerste onderwerp dat in dit dictaat aan bod komt, is de theorie van *metrische ruimten*. Dit zijn verzamelingen voorzien van een afstandsfunctie. Met behulp hiervan worden begrippen als convergentie van rijen en continuïteit van functies in een breder kader gezet. Ook leggen we de basis voor de theorie van *genormeerde vectorruimten*.

De behandeling van metrische ruimten is erop gericht om intuïtie en motivatie te bieden voor de overstap naar *topologische ruimten*. Hier wordt een aantal van de eerder behandelde concepten gegeneraliseerd naar situaties waarin de afstandsfunctie wordt vervangen door een algemenere structuur (een topologie) waarmee men continuïteit van afbeeldingen betekenis kan geven. We bestuderen eigenschappen van individuele topologische ruimten en afbeeldingen daartussen, en vervolgens het begrip *homotopie*, waarmee het "continu vervormen" van afbeeldingen en ruimten uitgedrukt kan worden.

Het laatste deel van het dictaat gaat over de *fundamentaalgroep*, een algebraïsch object dat aan een topologische ruimte toegekend kan worden en informatie geeft over de verschillende niet-equivalente manieren waarop men "in een topologische ruimte rond kan lopen". De fundamentaalgroep en zijn eigenschappen vormen het hoofdingrediënt van het bewijs van de *dekpuntsstelling van Brouwer*: elke continue afbeelding van de gesloten eenheidsschijf naar zichzelf heeft een vast punt.

Dit dictaat is grotendeels gebaseerd op (delen van) de hoofdstukken 2, 3 en 5 van het boek *A Taste of Topology* van Volker Runde. Dit boek wordt aanbevolen als aanvullende referentie voor de in dit dictaat behandelde stof. Het dictaat bevat een aantal verwijzingen naar het boek; deze hebben de vorm [Runde, ...].

1 Metrische ruimten

In de topologie wordt onder andere het begrip *continuïteit* uit de analyse gegeneraliseerd.

Definitie 1.1 Zij D een deelverzameling van $\mathbf{R}$. Een functie $f\colon D \to \mathbf{R}$ is **continu** in een punt x als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $y \in D$ geldt

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Onnauwkeurig gezegd: als y dicht genoeg bij x ligt, dan ligt $f(y)$ dicht bij $f(x)$. Het begrip afstand lijkt voor de notie van continuïteit dus van belang te zijn. De eerste stap in de richting van een algemene definitie van continue afbeeldingen (hiervoor zullen we later het begrip *topologische ruimte* introduceren) is het definiëren van ruimten die voorzien zijn van een afstandsfunctie. We zullen later echter een definitie van continuïteit invoeren die niet naar een afstandsfunctie verwijst.

Definitie 1.2 Een **metriek** of **afstandsfunctie** op een verzameling X is een functie

$$d\colon X \times X \to \mathbf{R}$$

met de volgende eigenschappen:

(1) Voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x, y) \geq 0$, met gelijkheid dan en slechts dan als geldt $x = y$ (*positief-definietheid*).

(2) Voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x, y) = d(y, x)$ (*symmetrie*).

(3) Voor alle $x, y, z \in X$ geldt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*driehoeksongelijkheid*).

Een **metrische ruimte** is een paar (X, d) waarbij X een verzameling is en $d\colon X \times X \to \mathbf{R}$ een metriek.

Als de metriek d uit de context duidelijk is, wordt (X, d) vaak afgekort tot X.

Voorbeeld 1.3 Zij $X = \mathbf{R}^n$ met $n \geq 0$. De functie

$$\begin{aligned} d\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

is een metriek. Deze heet de **euclidische metriek** op $\mathbf{R}^n$.

Voorbeeld 1.4 De functie

$$\begin{aligned} d\colon \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\longmapsto |x - x'| + |y - y'| \end{aligned}$$

is een metriek op $\mathbf{Z}^2$. Deze staat bekend als de **Manhattan-** of **taximetriek**.

Voorbeeld 1.5 Zij (F, d) een metrische ruimte en $p \in F$. Stel dat voor alle $x, y \in F$ geldt

$$x \neq y \implies d(x, y) = d(x, p) + d(p, y).$$

Dan noemen we d een **Franse-spoorwegmetriek** met centrum p. (De snelste treinreis tussen twee Franse steden loopt vaak via Parijs.)

Voorbeeld 1.6 Zij X een verzameling en definieer $d\colon X \times X \to \mathbf{R}$ door

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = y, \\ 1 & \text{voor } x \neq y. \end{cases}$$

Dan is (X, d) een metrische ruimte. Dit is een voorbeeld van een *discrete* metrische ruimte.

Voorbeeld 1.7 Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X. Dan is de beperking $d|_{Y\times Y}$ van d tot de deelverzameling $Y \times Y$ van $X \times X$ een metriek op Y (ga na). Metrische ruimten van de vorm $(Y, d|_{Y\times Y})$ heten **metrische deelruimten** van (X, d).

Naar analogie met de euclidische metriek op $\mathbf{R}^n$ zullen we nu achtereenvolgens open ballen, open verzamelingen en gesloten verzamelingen in algemene metrische ruimten definiëren.

Definitie 1.8 Zij (X, d) een metrische ruimte, zij $x \in X$ en zij r een positief reëel getal. De **open bal van straal** r **om** x is de deelverzameling $B_r(x) \subseteq X$ gedefinieerd door

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

Voorbeeld 1.9 In het geval $X = \mathbf{R}$ (met de euclidische metriek) zijn open ballen hetzelfde als niet-lege, begrensde, open intervallen.

Definitie 1.10 Zij (X, d) een metrische ruimte. Een **open deelverzameling** van X is een deelverzameling $U \subseteq X$ zodanig dat er voor elke $x \in U$ een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat $B_\epsilon(x)$ bevat is in U.

Propositie 1.11 *Zij (X, d) een metrische ruimte.*

(a) Elke open bal in X is een open deelverzameling van X.

(b) Een deelverzameling $U \subseteq X$ is open dan en slechts dan als U een vereniging van open ballen is.

Bewijs.

(a) Zij $B_\epsilon(x)$ een open bal van straal $\epsilon > 0$ om een punt $x \in X$, en zij $y \in B_\epsilon(x)$. We moeten bewijzen dat er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat de open bal $B_\delta(y)$ van straal δ om y in $B_\epsilon(x)$ bevat is. We kiezen $\delta = \epsilon - d(x, y)$; dit is positief omdat y in $B_\epsilon(x)$ ligt. Voor alle $z \in B_\delta(y)$ geldt nu

$$\begin{aligned} d(x,z) &\le d(x,y) + d(y,z) \\ &< d(x,y) + \delta \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

en hiermee is bewezen dat $B_\delta(y)$ bevat is in $B_\epsilon(x)$.

(b) Zij U een deelverzameling van X. Stel dat U een vereniging van open ballen is, en zij $x \in U$. Wegens de aanname bestaan er $y \in X$ en $\epsilon > 0$ zodanig dat

$$x \in B_\epsilon(y) \subseteq U.$$

Wegens (a) is $B_\epsilon(y)$ open, dus er is een open bal rond x die bevat is in $B_\epsilon(y)$ en dus in U. Omdat dit voor alle $x \in U$ geldt, volgt dat U open is. Stel omgekeerd dat U open is. Dan is voor elke $x \in U$ de verzameling

$$E(x, U) = \{\epsilon > 0 \mid B_\epsilon(x) \subseteq U\}$$

niet-leeg. Er geldt dus
$$x \in \bigcup_{\epsilon \in E(x,U)} B_\epsilon(x) \subseteq U.$$
Nemen we nu de vereniging over alle $x \in U$, dan zien we
$$U = \bigcup_{x \in U} \bigcup_{\epsilon \in E(x,U)} B_\epsilon(x),$$
dus U is een vereniging van open ballen.

□

Definitie 1.12 Zij X een metrische ruimte. Een **gesloten deelverzameling** van X is een deelverzameling $F \subseteq X$ zodanig dat het complement $X \setminus F$ een open deelverzameling van X is.

Voorbeeld 1.13 Zij X een metrische ruimte, $x \in X$ en $r > 0$. De **gesloten bal** van straal r om x is gedefinieerd als
$$B_r[x] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$
We beweren dat $B_r[x]$ inderdaad een gesloten deelverzameling van X is, met andere woorden dat $X \setminus B_r[x]$ open is. Zij $y \in X \setminus B_r[x]$; dan geldt $d(x, y) > r$. We schrijven $\epsilon = d(x, y) - r$. Voor alle z in de open bal $B_\epsilon(y)$ geeft de driehoeksongelijkheid
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + \epsilon.$$
Hieruit volgt
$$d(x, z) > d(x, y) - \epsilon = r,$$
dus $B_\epsilon(y)$ is bevat in $X \setminus B_r[x]$, hetgeen we moesten bewijzen.

Propositie 1.14 *Zij X een metrische ruimte.*

(a) Elke vereniging van open deelverzamelingen van X is open.

(b) Elke doorsnede van eindig veel open deelverzamelingen van X is open.

(c) Elke doorsnede van gesloten deelverzamelingen van X is gesloten.

(d) Elke vereniging van eindig veel gesloten deelverzamelingen van X is gesloten.

Bewijs.

(a) Zij $\mathcal{U}$ een collectie open deelverzamelingen van X, en zij U' de verzameling $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Wegens propositie 1.11 is elke $U \in \mathcal{U}$ een vereniging van open ballen, en derhalve geldt dit ook voor U'.

(b) We bewijzen met inductie naar n dat de doorsnede van n open deelverzamelingen open is. Het geval $n = 0$ (X is open) volgt uit de definitie van open deelverzamelingen. Stel dat voor gegeven $n \geq 0$ elke doorsnede van n open deelverzamelingen open is. Als $U_0, \ldots, U_n$ open zijn, dan is $U = \bigcap_{i=0}^{n-1} U_i$ open wegens de inductieveronderstelling; we moeten bewijzen dat $U' = U \cap U_n$ open is. Zij $x \in U'$. Er bestaan $\epsilon > 0$ en $\epsilon_n > 0$ met $B_\epsilon(x) \subseteq U$ en $B_{\epsilon_n}(x) \subseteq U_n$. Neem nu $\epsilon' = \min\{\epsilon, \epsilon_n\}$; dan geldt $B_{\epsilon'}(x) \subseteq U'$. Dit geldt voor alle $x \in U'$, dus U' is open.

De beweringen (c) en (d) volgen uit (a) en (b) door het nemen van complementen. □

Opmerking 1.15 Als $\mathcal{Y}$ een collectie deelverzamelingen van X is, dan zijn de verzamelingen $\bigcup_{Y\in\mathcal{Y}} Y$ en $\bigcap_{Y\in\mathcal{Y}} Y$ voor $\mathcal{Y} = \emptyset$ gelijk aan $\emptyset$ respectievelijk X. In het bijzonder volgt uit de propositie dat $\emptyset$ en X zowel open als gesloten deelverzamelingen van X zijn.

Voortbouwend op de noties van open en gesloten deelverzamelingen zullen we nu een aantal nieuwe begrippen invoeren. Het blijkt dat dit gedaan kan worden zonder expliciet naar de metriek te verwijzen.

Definitie 1.16 Zij X een metrische ruimte, en zij $x \in X$. Een **omgeving** van x in X is een deelverzameling $N \subseteq X$ zodanig dat er een $\epsilon > 0$ bestaat met $B_\epsilon(x) \subseteq N$.

Een open omgeving van x is uiteraard een omgeving van x in X die ook een open deelverzameling van X is, oftewel een open deelverzameling $U \subseteq X$ waarvoor geldt $x \in U$.

Definitie 1.17 Een metrische ruimte X heet **discreet** als voor elke $x \in X$ de deelverzameling $\{x\}$ open is in X.

Propositie 1.18 *Zij X een metrische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) X is discreet;

(2) voor elke $x \in X$ bestaat er een $\epsilon > 0$ zodanig dat $B_\epsilon(x) = \{x\}$;

(3) elke deelverzameling van X is open;

(4) elke deelverzameling van X is gesloten.

Bewijs. Zie opgave 1.13. □

Definitie 1.19 Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X. Het **inwendige** van S in X, notatie S°, is de grootste open deelverzameling $U \subseteq X$ waarvoor geldt $U \subseteq S$. De **afsluiting** van S in X, notatie $\bar{S}$, is de kleinste gesloten deelverzameling $F \subseteq X$ waarvoor geldt $S \subseteq F$.

Om er zeker van te zijn dat de definitie van het inwendige betekenis heeft, moeten we nagaan dat er daadwerkelijk zo'n grootste open deelverzameling $U \subseteq X$ bestaat. Preciezer gezegd betekent dit het volgende. Zij $\mathcal{U}$ de verzameling van alle open deelverzamelingen van X die in S bevat zijn; dan is $\mathcal{U}$ een partieel geordende verzameling onder inclusie. We beweren dat $\mathcal{U}$ een (noodzakelijkerwijs uniek) grootste element heeft. Om dit te bewijzen, merken we op dat de verzameling $U' = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ open is in X en bevat is in S, dus U' is het (unieke) grootste element van $\mathcal{U}$. Om een soortgelijke reden heeft ook de definitie van de afsluiting betekenis: de doorsnede van alle gesloten deelverzamelingen die S bevatten is zelf ook een gesloten deelverzameling die S bevat, en daarmee automatisch de kleinste.

Propositie 1.20 *Zij X een metrische ruimte. Het nemen van het inwendige en van de afsluiting in X zijn complementaire bewerkingen in de zin dat voor alle deelverzamelingen $S \subseteq X$ geldt*

$$X \setminus \bar{S} = (X \setminus S)^\circ$$

en

$$X \setminus S^\circ = \overline{X \setminus S}.$$

Bewijs. Zie opgave 1.16. □

Propositie 1.21 *Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X.*

(a) Het inwendige van S in X is de verzameling van alle punten $x \in X$ zodanig dat er een omgeving van x bestaat die bevat is in S.

(b) De afsluiting van S in X is de verzameling van alle punten $x \in X$ zodanig dat elke omgeving van x een niet-lege doorsnede met S heeft.

Bewijs.

(a) Stel dat x in S° ligt. Omdat S° open is in X, is S° zelf een omgeving van x die bevat is in S. Stel omgekeerd dat x een omgeving heeft die bevat is in S. Dan heeft x ook een open omgeving die geheel binnen S ligt, en deze open omgeving is op haar beurt bevat in S°.

(b) Dit volgt uit de volgende keten van equivalenties:

$$\begin{aligned} x \in \bar{S} &\iff x \notin (X \setminus S)^\circ \\ &\iff \text{geen enkele omgeving van } x \text{ is bevat in } X \setminus S \\ &\iff \text{elke omgeving van } x \text{ heeft niet-lege doorsnede met } S, \end{aligned}$$

waarbij we in de eerste stap propositie 1.20 gebruikt hebben.

□

Definitie 1.22 Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X. De **rand** van S in X, notatie ∂S, is de gesloten deelverzameling van X gedefinieerd door

$$\partial S = \bar{S} \cap \overline{X \setminus S}.$$

Propositie 1.23 *Zij X een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X. De rand van S in X is de verzameling van alle punten $x \in X$ zodanig dat elke omgeving van x zowel met S als met $X \setminus S$ een niet-lege doorsnede heeft.*

Bewijs. Dit volgt uit de definitie van ∂S en propositie 1.21. □

Voor elke deelverzameling $S \subseteq X$ is ∂S wegens de definitie en propositie 1.20 te schrijven als

$$\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ.$$

Dit betekent dat X te schrijven is als een disjuncte vereniging (d.w.z. een vereniging van deelverzamelingen met paarsgewijs lege doorsnede)

$$\begin{aligned} X &= \bar{S} \sqcup (X \setminus \bar{S}) \\ &= \bar{S} \sqcup (X \setminus S)^\circ \\ &= S^\circ \sqcup \partial S \sqcup (X \setminus S)^\circ. \end{aligned}$$

Definitie 1.24 Zij X een metrische ruimte. Een deelverzameling $S \subseteq X$ heet **dicht** in X als de afsluiting van S gelijk is aan X.

Waarschuwing 1.25 Bij het gebruiken van de hierboven ingevoerde begrippen (open en gesloten verzamelingen, inwendige, afsluiting, rand en dichtheid) is het belangrijk om steeds in gedachten te houden op welke omliggende metrische ruimte X ze betrekking hebben. Bekijk bijvoorbeeld de metrische deelruimte $X = [0, 1)$ van $\mathbf{R}$. Met betrekking tot de metrische ruimte X geldt: X is zowel open als gesloten, dus $X^\circ = X = \bar{X}$ en $\partial X = \emptyset$, en X is dicht. Met betrekking tot de metrische ruimte $\mathbf{R}$ geldt echter: X is noch open noch gesloten, $X^\circ = (0,1)$, $\bar{X} = [0,1]$, $\partial X = \{0,1\}$ en X is niet dicht.

Opgaven

In alle opgaven beschouwen we $\mathbf{R}^n$, tenzij anders aangegeven, als metrische ruimte met behulp van de euclidische metriek

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

1. Ga van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ na of ze open en of ze gesloten zijn.

(a) $\emptyset$;

(b) $\mathbf{R}$;

(c) $(0,\infty)$

(d) $[0,\infty)$

(e) (a,b) met $a,b \in \mathbf{R}$ en $a < b$;

(f) $[a,b]$ met $a,b \in \mathbf{R}$ en $a < b$;

(g) $(a,b]$ met $a,b \in \mathbf{R}$ en $a < b$;

(h) $\mathbf{Z}$;

(i) $\mathbf{Q}$;

(j) $\{n^{-1} \mid n \in \mathbf{Z}, n > 0\}$.

2. Ga van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}^2$ na of ze open en of ze gesloten zijn.

(a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < 0, y \geq 0\}$;

(c) $\{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$;

(d) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2\}$;

(e) $\mathbf{Z}^2$;

(f) $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$.

3. In deze opgave laten we zien dat $\emptyset$ en $\mathbf{R}$ de enige deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zijn die (met betrekking tot de euclidische metriek) zowel open als gesloten zijn.

(a) Neem aan dat $U \subseteq \mathbf{R}$ zowel open als gesloten is. Laat (met behulp van de ϵ-δ-definitie) zien dat de functie

$$f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{voor } x \in U, \\ 0 & \text{voor } x \notin U \end{cases}$$

continu is.

(b) Laat met behulp van de tussenwaardestelling zien dat geldt $U \in \{\emptyset, \mathbf{R}\}$.

4. Beschrijf een oneindige collectie $\mathcal{U}$ van open deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zodanig dat $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ géén open deelverzameling van $\mathbf{R}$ is.

5. Zij S een verzameling, en zij X de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van S. Voor $A, B \in X$ definiëren we het **symmetrisch verschil** $A \triangle B$ als

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) &\longmapsto \#(A \triangle B) \end{aligned}$$

een metriek op X is. (We schrijven $\#E$ voor de kardinaliteit van een eindige verzameling E.)

6. Een metriek d op een verzameling F heet een **Franse-spoorwegmetriek** als er een $p \in F$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in F$ geldt

$$x \neq y \implies d(x, y) = d(x, p) + d(p, y).$$

(Zie voorbeeld 1.5.) Stel dat er twee verschillende punten $p, q \in F$ bestaan met de bovenstaande eigenschap. Bewijs dat F gelijk is aan $\{p, q\}$.

7. Zij (X, d) een metrische ruimte. Laat zien dat elke eindige deelverzameling van X gesloten is.

8. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X. Bewijs dat een deelverzameling $U \subseteq Y$ open is in de metrische ruimte $(Y, d|_{Y \times Y})$ dan en slechts dan als er een open deelverzameling V van (X, d) bestaat waarvoor geldt $U = Y \cap V$.

9. Zij $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de eenheidscirkel in $\mathbf{R}^2$. Gegeven twee punten $x = (x_1, x_2)$ en $y = (y_1, y_2)$ in S^1 definiëren we $\theta(x, y) \in [0, \pi]$ als de (ongerichte) hoek tussen x en y gezien als vectoren, dus

$$\cos \theta(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Bewijs dat θ een metriek op S^1 is.

10. Zij p een priemgetal. Voor $x \in \mathbf{Q}^\times$ definiëren we

$$\operatorname{ord}_p(x) = n \quad \text{als } x = p^n \frac{a}{b} \text{ met } a, b \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$$

en voor $x \in \mathbf{Q}$ definiëren we de **p-adische absolute waarde** van x als

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = 0, \\ p^{-\operatorname{ord}_p(x)} & \text{voor } x \neq 0. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat $|\ |_p$ voldoet aan de **sterke driehoeksongelijkheid**: voor alle $x, y \in \mathbf{Q}$ geldt

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

(b) Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} d_p\colon \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x - y|_p \end{aligned}$$

een metriek op $\mathbf{Q}$ is.

11. Zij (X, d) een metrische ruimte. Bekijk de functie

$$\tilde{d}\colon X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

(a) Bewijs dat $\tilde{d}$ een metriek op X is die voldoet aan $\tilde{d}(x, y) < 1$ voor alle $x, y \in X$.

(b) Bewijs dat een deelverzameling $Y \subseteq X$ open is in (X, d) dan en slechts dan als Y open is in $(X, \tilde{d})$.

12. Bewijs dat elke eindige metrische ruimte (d.w.z. elke metrische ruimte (X, d) zodanig dat de verzameling X eindig is) discreet is.

13. Zij (X, d) een metrische ruimte. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1) X is discreet;

(2) voor elke $x \in X$ bestaat er een $\epsilon > 0$ waarvoor geldt $B_\epsilon(x) = \{x\}$;

(3) elke deelverzameling van X is open;

(4) elke deelverzameling van X is gesloten.

14. Bepaal voor elk van de gegeven verzamelingen X in de opgaven 1.1 en 1.2 het inwendige X°, de afsluiting $\bar{X}$ en de rand ∂X.

15. Geldt voor elke metrische ruimte (X, d), elke $x \in X$ en elke $\epsilon > 0$ dat de afsluiting van de open bal $B_\epsilon(x)$ gelijk is aan de gesloten bal $B_\epsilon[x] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

16. Zij X een metrische ruimte. Laat zien dat voor alle deelverzamelingen $S \subseteq X$ geldt

$$X \setminus \bar{S} = (X \setminus S)^\circ$$

en

$$X \setminus S^\circ = \overline{X \setminus S}.$$

17. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zijn A en B deelverzamelingen van X. Geef voor elk van de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$;

(b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;

(c) $\partial(\partial A) = \partial A$;

(d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(e) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

(f) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$;

(g) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

18. Zij (X, d) een metrische ruimte en S een deelverzameling van X. Bewijs dat S dicht ligt in X dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ geldt $X = \bigcup_{s \in S} B_\epsilon(s)$.

2 Convergentie van rijen

De bekende definitie van convergentie voor rijen van reële getallen is zonder problemen te vertalen naar de context van metrische ruimten.

Definitie 2.1 Zij (X, d) een metrische ruimte, zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij in X, en zij $x \in X$. De rij $(x_n)_{n\geq 0}$ is **convergent (met limiet x)**, of **convergeert naar** x, als er voor alle $\epsilon > 0$ een $N \geq 0$ bestaat zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt $d(x, x_n) < \epsilon$. Notatie: $x_n \to x$ als $n \to \infty$, of $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Propositie 2.2 *Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij in X. Dan heeft $(x_n)_{n\geq 0}$ ten hoogste één limiet.*

Bewijs. Stel dat de rij twee verschillende limieten x en x' heeft. Zij $\delta = d(x, x') > 0$. Wegens de definitie van convergentie bestaat er een $n \geq 0$ waarvoor geldt $d(x, x_n) < \delta/2$ en $d(x', x_n) < \delta/2$. Hieruit volgt

$$\delta = d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \delta/2 + \delta/2 = \delta,$$

een tegenspraak. □

Propositie 2.3 *Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij S een deelverzameling van X. Dan is de afsluiting $\bar{S}$ de verzameling van punten van X die de limiet zijn van een rij in S die in X convergeert.*

Bewijs. Zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij in S die in X convergeert naar x. Voor alle $\epsilon > 0$ is er dan een $n \geq 0$ waarvoor geldt $x_n \in B_\epsilon(x)$, dus $B_\epsilon(x)$ heeft niet-lege doorsnede met S. Hieruit volgt $x \in \bar{S}$ wegens propositie 1.21. Zij omgekeerd $x \in \bar{S}$. Dan is voor elke $n \geq 0$ de doorsnede van $B_{2^{-n}}(x)$ met S niet-leeg, dus er bestaat een $x_n \in S$ met $d(x_n, x) < 2^{-n}$. De rij $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeert dus naar x. □

Gevolg 2.4 *Zij X een metrische ruimte, en zij F een deelverzameling van X. Dan is F gesloten dan en slechts dan als voor elke rij $(x_n)_{n\geq 0}$ in F die in X convergeert, de limiet $\lim_{n\to\infty} x_n$ in F ligt.*

Voor de volgende voorbeelden introduceren we het begrip *begrensde functie*.

Definitie 2.5 Zij S een niet-lege verzameling, en zij (Y, d) een metrische ruimte. Een functie $f\colon S \to Y$ heet **begrensd** als er een positief reëel getal M bestaat zodanig dat voor alle $s, t \in S$ geldt $d(f(s), f(t)) < M$.

Voorbeeld 2.6 Zij $\mathrm{B}([0,1], \mathbf{R})$ de verzameling van alle begrensde functies $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$. De **uniforme metriek** op $\mathrm{B}([0,1], \mathbf{R})$ is gedefinieerd door

$$D(f, g) = \sup_{[0,1]} |f - g| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \quad \text{voor alle } f, g \in \mathrm{B}([0,1], \mathbf{R}).$$

Het is niet moeilijk na te gaan dat D inderdaad een metriek op $\mathrm{B}([0,1], \mathbf{R})$ is. Een rij functies $(f_n)_{n\geq 0}$ in $\mathrm{B}([0,1], \mathbf{R})$ convergeert met betrekking tot D dan en slechts dan als $(f_n)_{n\geq 0}$ uniform convergeert.

Voorbeeld 2.7 Algemener introduceren we voor een niet-lege verzameling S en een metrische ruimte (Y, d) de verzameling $\mathrm{B}(S, Y)$ van begrensde functies $S \to Y$ voorzien van de **uniforme metriek**

$$D(f,g) = \sup_{s \in S} d(f(s), g(s)).$$

(Zie opgave 2.3 voor het bewijs dat D een metriek is.) Dit geeft een algemene context voor het begrip uniforme convergentie: we zeggen dat een rij functies $(f_n)_{n \geq 0}$ in $\mathrm{B}(S,Y)$ **uniform convergeert** als de rij convergeert met betrekking tot de metriek D.

Opgaven

1. Zij $(a_n)_{n \geq 0}$ een rij reële getallen die convergeert naar $a \in \mathbf{R}$.

(a) Zij X een gesloten deelverzameling van $\mathbf{R}$ die alle a_n $(n \geq 0)$ bevat. Laat zien dat ook a in X ligt.

(b) Zij $A = \{a_n \mid n \geq 0\}$. Bewijs de gelijkheden $\bar{A} = A \cup \{a\}$ en $A^\circ = \emptyset$.

2. Zij p een priemgetal, zij $|\ \ |_p$ de p-adische absolute waarde op $\mathbf{Q}$ en zij $d_p(x,y) = |x-y|_p$ de p-adische metriek (zie opgave 1.10).

(a) Bewijs dat de rij $(1, p, p^2, p^3, \ldots)$ in $(\mathbf{Q}, d_p)$ naar 0 convergeert.

(b) Construeer een rij in $\mathbf{Q}$ die in $\mathbf{R}$ naar 0 convergeert en in $(\mathbf{Q}, d_2)$ naar 1.

3. Zij S een niet-lege verzameling, zij (Y,d) een metrische ruimte, en zij $\mathrm{B}(S,Y)$ de verzameling van begrensde functies $S \to Y$. Voor $f, g \in \mathrm{B}(S,Y)$ definiëren we

$$D(f,g) = \sup_{x \in S} d(f(x), g(x)).$$

Laat zien dat D een metriek op $\mathrm{B}(S,Y)$ is.

3 Continue afbeeldingen tussen metrische ruimten

Ook de bekende definitie van continuïteit is zonder problemen te generaliseren naar metrische ruimen. Er blijkt een nuttige karakterisering van continue afbeeldingen te bestaan in termen van open verzamelingen.

Definitie 3.1 Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimten. Een **continue afbeelding** van X naar Y is een afbeelding $f\colon X \to Y$ zodanig dat er voor elke $a \in X$ en elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Stelling 3.2 *Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding tussen metrische ruimten. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) f is continu;

(2) voor alle $a \in X$ en alle $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ waarvoor geldt $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$;

(3) voor elke convergente rij $(x_n)_{n\geq 0}$ in X met limiet a is de rij $(f(x_n))_{n\geq 0}$ in Y convergent met limiet $f(a)$;

(4) voor elke gesloten deelverzameling $G \subseteq Y$ is $f^{-1}G$ een gesloten deelverzameling van X;

(5) voor elke open deelverzameling $V \subseteq Y$ is $f^{-1}V$ een open deelverzameling van X.

Bewijs. We bewijzen de onderstaande implicaties.

(1) $\iff$ **(2)** Deze twee uitspraken zijn slechts herformuleringen van elkaar.

(2) $\implies$ **(3)** Neem aan dat (2) geldt en zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een convergente rij in X met limiet a. Zij $\epsilon > 0$ willekeurig gegeven. Per aanname is er een $\delta > 0$ waarvoor geldt $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$. Wegens de convergentie van $(x_n)_{n\geq 0}$ is er een $N \geq 0$ zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt $x_n \in B_\delta(a)$. Hieruit volgt $f(x_n) \in B_\epsilon(f(a))$ voor alle $n \geq N$. Omdat ϵ willekeurig was, concluderen we dat $(f(x_n))_{n\geq 0}$ in Y convergeert naar $f(a)$.

(3) $\implies$ **(4)** Neem aan dat (3) geldt, zij $G \subseteq Y$ gesloten, en zij $F = f^{-1}G$. We gaan bewijzen dat elke rij in F die in X convergeert haar limiet in F heeft; wegens gevolg 2.4 is F dan gesloten. Zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij in F met limiet $a \in X$. Dan is $(f(x_n))_{n\geq 0}$ een rij in G die in Y convergeert naar $f(a)$. Omdat G gesloten is, geldt $f(a) \in G$ wegens gevolg 2.4. Dit is equivalent met $a \in F$, hetgeen we moesten bewijzen.

(4) $\implies$ **(5)** Dit volgt uit $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}V$.

(5) $\implies$ **(2)** Neem aan dat (5) geldt, en laten $a \in X$ en $\epsilon > 0$ gegeven zijn. Dan is $B_\epsilon(f(a))$ open in Y, dus per aanname is $f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$ open in X. Bovendien geldt $a \in f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$. Wegens de definitie van open verzamelingen bestaat er een $\delta > 0$ waarvoor geldt $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$.

□

Opmerking 3.3 Voor elke afbeelding van verzamelingen $f\colon X \to Y$ en alle deelverzamelingen $S \subseteq X$ en $T \subseteq Y$ is $S \subseteq f^{-1}T$ equivalent met $f(S) \subseteq T$. In de eigenschap (2) hierboven is de voorwaarde $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$ dus equivalent met $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$. De gegeven formulering van (2) is echter meer in de geest van de eigenschappen (4) en (5).

Voorbeeld 3.4 Als X een discrete metrische ruimte is, dan is elke deelverzameling van X open, dus elke afbeelding van X naar een metrische ruimte Y is continu.

Voorbeeld 3.5 Zij (X, d) een metrische ruimte. We voorzien de verzameling $X^2 = X \times X$ van de metriek

$$\begin{aligned} \tilde{d} \colon X^2 \times X^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\longmapsto d(x, x') + d(y, y'). \end{aligned}$$

(Dit is een generalisatie van de Manhattanmetriek op $\mathbf{R}^2$.) We beweren dat $d \colon (X^2, \tilde{d}) \to \mathbf{R}$ een continue afbeelding is. Zij $P_0 = (x_0, y_0) \in X^2$, en zij $\epsilon > 0$. Voor alle $P = (x, y) \in X^2$ geldt

$$\begin{aligned} |d(P) - d(P_0)| &= |d(x, y) - d(x_0, y_0)| \\ &\leq d(x, x_0) + d(y, y_0) \\ &= \tilde{d}(P, P_0). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor alle P in de open bal $B_\epsilon(P_0)$ in $(X^2, \tilde{d})$ het punt $d(P)$ in de open bal $B_\epsilon(d(P_0))$ in $\mathbf{R}$ ligt. Dit geldt voor alle $\epsilon > 0$, dus d is continu.

Definitie 3.6 Zijn (X, d) en (X', d') twee metrische ruimten. Een **isometrie** van (X, d) naar (X', d') is een afbeelding $f \colon X \to X'$ zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Uit de definities volgt direct dat elke isometrie continu is.

Opgaven

1. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten en zij $a \in X$. Een afbeelding $f\colon X \to Y$ heet **continu in** a als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt $d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. Op $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{C}$ beschouwen we de euclidische metriek d_{E}, op $\mathbf{R}^2$ tevens de Manhattanmetriek d_{M}, en op $\mathbf{R}$ tevens de Franse-spoorwegmetriek d_{F} gedefinieerd door

$$d_{\mathrm{F}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = y, \\ |x| + |y| & \text{voor } x \neq y. \end{cases}$$

Bepaal voor elk van de onderstaande afbeeldingen $f\colon X \to Y$ de verzameling van punten van X waar f continu is.

(a) $(\mathbf{Q}, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{C}, d_{\mathrm{E}}), \quad x \mapsto x;$

(b) $(\mathbf{R}^2, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{R}^2, d_{\mathrm{M}}), \quad x \mapsto x;$

(c) $(\mathbf{C}, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{C}, d_{\mathrm{E}}), \quad z \mapsto \begin{cases} (\exp(z) - 1)/z & \text{voor } z \neq 0, \\ 0 & \text{voor } z = 0; \end{cases}$

(d) $(\mathbf{R}, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{R}, d_{\mathrm{F}}), \quad x \mapsto x;$

(e) $(\mathbf{R}, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{R}, d_{\mathrm{E}}), \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{voor } x \in \mathbf{Q}, \\ -x & \text{voor } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$

(f) $(\mathbf{R}, d_{\mathrm{F}}) \to (\mathbf{R}, d_{\mathrm{E}}), \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{voor } x \in \mathbf{Q}, \\ -x & \text{voor } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$

2. Bewijs dat een samenstelling van twee continue afbeeldingen tussen metrische ruimten zelf ook continu is.

3. Zij (X, d) een metrische ruimte, $S \subseteq X$ een niet-lege deelverzameling en $x \in X$. De **afstand van** x **tot** S is

$$\mathrm{dist}(x, S) = \inf\{d(x, y) \mid y \in S\}.$$

(a) Bewijs dat $\bar{S}$ de verzameling van alle $x \in X$ is waarvoor geldt $\mathrm{dist}(x, S) = 0$.

(b) Bewijs dat de functie $X \to \mathbf{R}$ die x op $\mathrm{dist}(x, S)$ afbeeldt continu is.

4. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimten.

(a) Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} D\colon (X \times Y) \times (X \times Y) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\longmapsto d_X(x, x') + d_Y(y, y') \end{aligned}$$

een metriek op het product $X \times Y$ is. Wat is het verband met de Manhattanmetriek?

(b) Bewijs dat de projectieafbeeldingen $X \times Y \to X$ en $X \times Y \to Y$ (gedefinieerd door $(x, y) \mapsto x$ respectievelijk $(x, y) \mapsto y$) continu zijn.

(c) Zij (T, d_T) een metrische ruimte. Gegeven twee afbeeldingen $f\colon T \to X$ en $g\colon T \to Y$ definiëren we de afbeelding

$$\begin{aligned} f \times g\colon T &\longrightarrow X \times Y \\ t &\longmapsto (f(t), g(t)). \end{aligned}$$

Laat zien dat $f \times g$ continu is dan en slechts dan als f en g beide continu zijn.

5. Zij N de verzameling $\{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$. Construeer een metriek op N met de volgende eigenschap: een rij $(y_n)_{n \geq 0}$ in een metrische ruimte Y is convergent dan en slechts dan als er een continue afbeelding $f\colon N \to Y$ bestaat met $f(n) = y_n$ voor alle $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

6. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten, en zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding. We zeggen dat f **lokaal constant** is als er voor elke $x \in X$ een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat f constant is op $B_\epsilon(x)$. Stel dat (Y, d_Y) discreet is. Laat zien dat f continu is dan en slechts als f lokaal constant is.

7. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten, en zijn $f, g\colon X \to Y$ continue afbeeldingen.

(a) Laat zien dat de verzameling $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ gesloten is in X.

(b) Zij S een dichte deelverzameling van X, en neem aan dat voor alle $x \in S$ geldt $f(x) = g(x)$. Laat zien dat f en g gelijk zijn.

8.

(a) Laat zien dat elke isometrie injectief is.

(b) Bepaal alle isometrieën $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

9. Zij X een verzameling van drie elementen met de metriek

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = y, \\ 1 & \text{voor } x \neq y. \end{cases}$$

(a) Geef een isometrie $X \to \mathbf{R}^2$.

(b) Bewijs dat er geen isometrie $X \to \mathbf{R}$ bestaat.

10. Zij d de euclidische metriek op $\mathbf{R}$, en zij $\tilde{d}$ de metriek uit opgave 1.11.

(a) Bestaat er een isometrie $(\mathbf{R}, d) \to (\mathbf{R}, \tilde{d})$?

(b) Bestaat er een isometrie $(\mathbf{R}, \tilde{d}) \to (\mathbf{R}, d)$?

4 Volledigheid en completering

Het begrip *Cauchyrij* speelt een belangrijke rol in de constructie van de reële getallen. We voeren dit begrip ook in de context van metrische ruimten in en gebruiken dit om *volledigheid* van metrische ruimten te definiëren.

Definitie 4.1 Zij (X, d) een metrische ruimte. Een **Cauchyrij** in X is een rij $(x_n)_{n\geq 0}$ met de eigenschap dat er voor alle $\epsilon > 0$ een $N \geq 0$ bestaat zodanig dat voor alle $m, n \geq N$ geldt $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Het is niet moeilijk na te gaan dat elke convergente rij een Cauchyrij is. Het omgekeerde geldt echter niet automatisch.

Definitie 4.2 Een metrische ruimte (X, d) heet **volledig** als elke Cauchyrij in X convergeert.

Voorbeeld 4.3 De metrische ruimte $\mathbf{R}$ is volledig. Dit volgt uit de constructie van $\mathbf{R}$ met behulp van equivalentieklassen van Cauchyrijen in $\mathbf{Q}$. Algemener is voor elke $n \geq 0$ de metrische ruimte $\mathbf{R}^n$ (met de euclidische metriek) volledig.

Voorbeeld 4.4 Zij S een verzameling met de metriek d gegeven door $d(x, y) = 0$ voor $x = y$ en $d(x, y) = 1$ voor $x \neq y$. Dan is elke Cauchyrij in S uiteindelijk constant, dus (S, d) is volledig.

Voorbeeld 4.5 Zij S een niet-lege verzameling, zij (Y, d) een volledige metrische ruimte, en zij $\mathrm{B}(S, Y)$ de verzameling van begrensde functies $f\colon S \to Y$, voorzien van de uniforme metriek D (zie de voorbeelden na gevolg 2.4). We beweren dat $\mathrm{B}(S, Y)$ volledig is met betrekking tot D. Zij dus $(f_n)_{n\geq 0}$ een Cauchyrij in $\mathrm{B}(S, Y)$. Voor alle $s \in S$ en alle $m, n \geq 0$ geldt $d(f_m(s), f_n(s)) \leq D(f_m, f_n)$; hieruit volgt dat voor alle $s \in S$ de rij $(f_n(s))_{n\geq 0}$ in Y een Cauchyrij is. Omdat Y volledig is, kunnen we een functie $f\colon S \to Y$ definiëren als de puntsgewijze limiet

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s).$$

We moeten bewijzen dat f begrensd is. Zij $\epsilon > 0$, en zij N zodanig dat voor alle $m, n \geq N$ geldt $D(f_m, f_n) < \epsilon$. Voor alle $x \in S$ en $n \geq N$ geldt (omdat f de puntsgewijze limiet van $(f_n)_{n\geq 0}$ is, en wegens de continuïteit van d)

$$d(f(x), f_n(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \lim_{m\to\infty} D(f_m, f_n) \leq \epsilon.$$

Zij $R = \sup_{s,t\in S} d(f_N(s), f_N(t))$. Voor alle $s, t \in S$ geldt nu

$$\begin{aligned} d(f(s), f(t)) &\leq d(f(s), f_N(s)) + d(f_N(s), f_N(t)) + d(f_N(t), f(t)) \\ &< \epsilon + R + \epsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat f in $\mathrm{B}(S, Y)$ ligt. We beweren vervolgens dat $f_n \to f$ als $n \to \infty$. Dit volgt uit het feit dat voor alle $\epsilon > 0$ en $n \geq N$ (met N als boven) geldt

$$D(f, f_n) = \sup_{x\in S} d(f(x), f_n(x)) \leq \epsilon.$$

Propositie 4.6 *Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een metrische deelruimte van X.*

(a) Als X volledig is en Y gesloten in X, dan is Y volledig.

(b) Als Y volledig is, dan is Y gesloten in X.

Bewijs.

(a) Stel X is volledig en Y is gesloten in X. Elke Cauchyrij $(x_n)_{n\geq 0}$ in Y is ook een Cauchyrij in X en heeft dus een limiet $x \in X$. Aangezien Y gesloten is, geldt $x \in Y$ wegens gevolg 2.4. Hieruit volgt dat Y volledig is.

(b) Stel Y is volledig, en zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij in Y die convergent is in X. Dan is $(x_n)_{n\geq 0}$ een Cauchyrij in X en dus ook in Y. Aangezien Y volledig is, convergeert $(x_n)_{n\geq 0}$ in Y. Wegens gevolg 2.4 is Y gesloten.

□

Voorbeeld 4.7 In $\mathbf{R}^n$ (of algemener in elke volledige metrische ruimte) zijn de volledige metrische deelruimten wegens de propositie precies de gesloten deelverzamelingen.

Voorbeeld 4.8 Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten met $X \neq \emptyset$ en Y volledig. Zij $\mathrm{BC}(X, Y) \subseteq \mathrm{B}(X, Y)$ de verzameling van begrensde continue functies $X \to Y$. We beperken de uniforme metriek D op $\mathrm{B}(X, Y)$ tot een metriek op $\mathrm{BC}(X, Y)$. We beweren dat $\mathrm{BC}(X, Y)$ gesloten is in $\mathrm{B}(X, Y)$; wegens propositie 4.6 en de volledigheid van $\mathrm{B}(X, Y)$ is $\mathrm{BC}(X, Y)$ dan ook volledig. Zij dus $(f_n)_{n\geq 0}$ een rij in $\mathrm{BC}(X, Y)$ die in $\mathrm{B}(X, Y)$ convergeert naar f. We moeten bewijzen dat f continu is. Zij $a \in X$ en zij $\epsilon > 0$. We zoeken $\delta > 0$ waarvoor geldt

$$d_X(t, a) < \delta \implies d_Y(f(t), f(a)) < \epsilon.$$

Zij $n \geq 0$ zodanig dat geldt $D(f_n, f) < \epsilon/3$, en zij δ zodanig dat geldt

$$d_X(t, a) < \delta \implies d_Y(f_n(t), f_n(a)) < \epsilon/3.$$

Voor alle $t \in B_\delta(a)$ geldt dan

$$\begin{aligned} d_Y(f(t), f(a)) &\leq d_Y(f(t), f_n(t)) + d_Y(f_n(t), f_n(a)) + d_Y(f_n(a), f(a)) \\ &\leq D(f, f_n) + d_Y(f_n(t), f_n(a)) + D(f_n, f) \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Aangezien a en ϵ willekeurig waren, is f continu. Hieruit volgt de bewering.

Stelling 4.10 hieronder is een representatief voorbeeld van het gebruik van volledigheid, in dit geval om het niet-leeg zijn van een bepaalde deelverzameling te bewijzen.

Definitie 4.9 Zij (X, d) een metrische ruimte. De **diameter** van een niet-lege deelverzameling $S \subseteq X$ is

$$\mathrm{diam}(S) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\} \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Stelling 4.10 (Cantor). *Zij X een volledige metrische ruimte. Stel dat $(F_n)_{n\geq 0}$ een rij niet-lege gesloten deelverzamelingen van X is die voldoet aan $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ en $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ als $n \to \infty$. Dan bevat $F = \bigcap_{n\geq 0} F_n$ precies één punt.*

Bewijs (schets). We kiezen een rij $(x_n)_{n\geq 0}$ in X met $x_n \in F_n$ voor alle n. Dan is $(x_n)_{n\geq 0}$ een Cauchyrij en heeft wegens de volledigheid van X een limiet x. Deze limiet ligt in $F = \bigcap_{n\geq 0} F_n$ omdat de F_n gesloten zijn. Tot slot is het eenvoudig na te gaan dat $\mathrm{diam}(F)$ gelijk is aan 0, zodat F niet meer dan één punt kan bevatten; zie opgave 4.4. □

De constructie van de reële getallen als de verzameling van equivalentieklassen van Cauchyrijen in $\mathbf{Q}$ kunnen we generaliseren naar algemene metrische ruimten.

Definitie 4.11 Zij (X, d) een metrische ruimte. Een **completering** van (X, d) is een volledige metrische ruimte $(\tilde{X}, \tilde{d})$ samen met een isometrie $\iota\colon (X, d) \to (\tilde{X}, \tilde{d})$ met de volgende eigenschap: voor elke volledige metrische ruimte (Y, d_Y) en elke isometrie $f\colon (X, d) \to (Y, d_Y)$ is er een unieke isometrie $g\colon (\tilde{X}, \tilde{d}) \to (Y, d_Y)$ waarvoor geldt $f = g \circ \iota$.

Een completering is "uniek op een unieke bijectieve isometrie na". Preciezer gezegd:

Lemma 4.12 *Zij (X, d) een metrische ruimte. Als $((\tilde{X}_1, \tilde{d}_1), \iota_1)$ en $((\tilde{X}_2, \tilde{d}_2), \iota_2)$ twee completeringen van (X, d) zijn, dan bestaat er een unieke bijectieve isometrie $g\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ met $\iota_2 = g \circ \iota_1$.*

Bewijs. Wegens de eigenschap van de completering voor $\tilde{X}_1$ en de volledigheid van $\tilde{X}_2$ is er een unieke isometrie $g\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ die voldoet aan $\iota_2 = g \circ \iota_1$. We moeten nog bewijzen dat g een bijectieve isometrie is. Hiertoe merken we op dat er wegens de eigenschap van de completering voor $\tilde{X}_2$ en de volledigheid van $\tilde{X}_1$ een unieke isometrie $h\colon \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ is die voldoet aan $\iota_1 = h \circ \iota_2$. Hieruit volgt $\iota_1 = h \circ (g \circ \iota_1) = (h \circ g) \circ \iota_1$. De identiteit op $\tilde{X}_1$ is echter ook een isometrie $k\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_1$ met $\iota_1 = k \circ \iota_1$; per aanname is $h \circ g$ dus de identiteit op $\tilde{X}_1$. Net zo is $g \circ h$ de identiteit op $\tilde{X}_2$. We concluderen dat $g\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ een bijectieve isometrie is. □

Propositie 4.13 *Elke metrische ruimte (X, d) heeft een completering $(\tilde{X}, \tilde{d})$.*

Bewijs (schets). Zij R de verzameling van alle Cauchyrijen in X. We definiëren eerst een equivalentierelatie op R. Twee Cauchyrijen $(x_n)_{n\geq 0}$ en $(y_n)_{n\geq 0}$ noemen we *equivalent* (notatie: $(x_n)_{n\geq 0} \sim (y_n)_{n\geq 0}$) als $d(x_n, y_n) \to 0$ voor $n \to \infty$, d.w.z. als er voor elke $\epsilon > 0$ een $N > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt $d(x_n, y_n) < \epsilon$. Het is eenvoudig na te gaan dat $\sim$ inderdaad een equivalentierelatie is.

We schrijven $\tilde{X}$ voor de quotiëntverzameling $R/{\sim}$. De equivalentieklasse van een Cauchyrij $(x_n)_{n\geq 0}$ noteren we met $[(x_n)_{n\geq 0}]$. We definiëren een metriek $\tilde{d}$ op $\tilde{X}$ door

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \quad \text{als } \tilde{x} = [(x_n)_{n\geq 0}] \text{ en } \tilde{y} = [(y_n)_{n\geq 0}]. \tag{4.1}$$

Voor het bewijs dat de limiet bestaat, niet afhangt van de gekozen representanten van de klassen $\tilde{x}$ en $\tilde{y}$, en een metriek op $\tilde{X}$ definieert, verwijzen we naar opgave 4.9, evenals voor het bewijs dat de metrische ruimte $(\tilde{X}, \tilde{d})$ volledig is.

We definiëren $\iota\colon X \to \tilde{X}$ als volgt: voor $x \in X$ is $\iota(x)$ de klasse van de constante rij $(x_n)_{n\geq 0}$ met $x_n = x$ voor alle $n \geq 0$. Dan is ι duidelijk een isometrie.

Zij (Y, d_Y) een volledige metrische ruimte, en zij $f\colon (X, d) \to (Y, d_Y)$ een isometrie. Dan definiëren we

$$\begin{aligned} g\colon (\tilde{X}, \tilde{d}) &\longrightarrow (Y, d_Y) \\ \tilde{x} &\longmapsto \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{als } \tilde{x} = [(x_n)_{n\geq 0}]. \end{aligned}$$

Dit is een welgedefinieerde afbeelding, aangezien $(f(x_n))_{n\geq 0}$ een Cauchyrij in de volledige metrische ruimte Y is en de limiet niet afhangt van de keuze van een representant $(x_n)_{n\geq 0}$

voor de equivalentieklasse $\tilde{x}$. Verder is g een isometrie omdat voor alle $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ geldt

$$\begin{aligned} d_Y(g(\tilde{x}), g(\tilde{y})) &= d_Y\Bigl(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)\Bigr) \\ &= d_Y\Bigl(\lim_{n\to\infty} (f(x_n), f(y_n))\Bigr) \\ &= \lim_{n\to\infty} d_Y(f(x_n), f(y_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\ &= \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

Voor alle $x \in X$ geldt

$$g(\iota(x)) = g([(x)_{n\geq 0}]) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x),$$

dus $g \circ \iota = f$. We moeten nagaan dat g de *unieke* voortzetting van f tot een isometrie $\tilde{X} \to Y$ is. Hiervoor merken we op dat

$$\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} \iota(x_n) \quad \text{als } \tilde{x} = [(x_n)_{n\geq 0}],$$

en dus, als $h\colon \tilde{X} \to Y$ een isometrie is met $h \circ \iota = f$,

$$\begin{aligned} h(\tilde{x}) &= h\Bigl(\lim_{n\to\infty} \iota(x_n)\Bigr) \\ &= \lim_{n\to\infty} h(\iota(x_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= g(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Hieruit volgt de uniciteit van g. □

Opgaven

1. Zij (X, d) een metrische ruimte. Laat zien dat (X, d) volledig is in elk van de volgende gevallen:

(a) De verzameling X is eindig.

(b) De metriek d is een Franse-spoorwegmetriek.

(c) $X = \mathbf{R}$ en $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

2. Zij (X, d) een metrische ruimte. Een afbeelding $f\colon X \to X$ heet een **contractie** als er een reëel getal $\theta < 1$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt

$$d(f(x), f(y)) \leq \theta d(x, y).$$

(a) Bewijs dat elke contractie continu is.

(b) Zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij in X. Stel dat er een reëel getal $\theta < 1$ bestaat zodanig dat voor alle $n \geq 1$ geldt $d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta d(x_n, x_{n-1})$. Bewijs dat $(x_n)_{n\geq 0}$ een Cauchyrij is.

(c) Bewijs de **dekpuntsstelling van Banach**: elke contractie op een volledige, niet-lege metrische ruimte heeft precies één vast punt.

(d) Onderbouw de volgende uitspraak: als je een kaart van Nederland ergens in Nederland neerlegt, ligt er precies één punt van de kaart op de goede plek.

3. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee volledige metrische ruimten. We voorzien het product $X \times Y$ van de metriek

$$D((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$$

(zie opgave 3.4). Laat zien dat $(X \times Y, D)$ volledig is.

4. Zij (X, d) een metrische ruimte. Voor elke deelverzameling $S \subseteq X$ schrijven we $\mathrm{diam}(S)$ voor de diameter van S. Bekijk een keten van deelverzamelingen $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$ van X zodanig dat

$$\mathrm{diam}(S_n) \to 0 \quad \text{als } n \to \infty.$$

Bewijs dat $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ ten hoogste één punt bevat.

5. Zij I het eenheidsinterval $[0, 1]$ en V het eenheidsvierkant $[0, 1] \times [0, 1]$, beide met de euclidische metriek, en zij $C(I, V)$ de verzameling van continue afbeeldingen $I \to V$. Aangezien V begrensd is, is $C(I, V)$ gelijk aan de verzameling $\mathrm{BC}(I, V)$ van begrensde continue afbeeldingen $I \to V$. In deze opgave gebruiken we de volledigheid van $C(I, V)$ met betrekking tot de uniforme metriek D op $C(I, V) = \mathrm{BC}(I, V)$ om een **vlakvullende kromme** te construeren, d.w.z. een surjectieve continue afbeelding $I \to V$.

(a) Laat zien dat het mogelijk is om V voor elke $n \geq 0$ op een zodanige manier op te delen in $2^n \times 2^n$ vierkanten $V_{n,k}$ met zijden van lengte 2^{-n}, voor $0 \leq k \leq 4^n - 1$ (dus $V_{n,k} = [a_{n,k}, b_{n,k}] \times [c_{n,k}, d_{n,k}]$ met $a_{n,k}$, $b_{n,k}$, $c_{n,k}$, $d_{n,k} \in [0, 1] \cap 2^{-n}\mathbf{Z}$) dat het volgende geldt: voor $n \geq 0$ en $0 \leq k < 4^n - 1$ hebben $V_{n,k}$ en $V_{n,k+1}$ een zijde gemeen, en voor $n \geq 0$ en $0 \leq k \leq 4^n - 1$ geldt

$$V_{n,k} = V_{n+1,4k} \cup V_{n+1,4k+1} \cup V_{n+1,4k+2} \cup V_{n+1,4k+3}.$$

(b) Zij $P_{n,k}$ het middelpunt van $V_{n,k}$. Construeer continue afbeeldingen

$$f_n \colon I \to V \qquad (n \geq 0)$$

zodanig dat het beeld van f_n alle punten $P_{n,k}$ bevat en zodanig dat $(f_n)_{n \geq 0}$ een Cauchyrij in $C(I, V)$ is.

(c) Laat zien dat als f de limiet van een rij als in (b) is, het beeld van f dicht ligt in V.

(d) Zij $f \colon I \to V$ een continue afbeelding. Bewijs dat het beeld van f gesloten is in V. (Aanwijzing: gebruik de stelling van Bolzano–Weierstraß.)

(e) Concludeer dat er een surjectieve continue afbeelding $I \to V$ bestaat.

[Het eerste voorbeeld van zo'n afbeelding werd gegeven door Peano in 1890. De constructie uit deze opgave is gebaseerd op een voorbeeld van Hilbert uit 1891.]

6. Zij X de metrische deelruimte $\{2^{-n} \mid n \geq 0\}$ van $\mathbf{R}$.

(a) Laat zien dat X discreet, maar niet volledig is.

(b) Beschrijf de completering van X. Laat zien dat deze niet discreet is.

7. Zijn (X, d) en (X', d') twee metrische ruimten, en zij $i: X \to X'$ een afbeelding. Bewijs dat $i: X \to X'$ een completering van (X, d) is dan en slechts dan als aan de volgende drie voorwaarden voldaan is:

(1) (X', d') is volledig;

(2) i is een isometrie;

(3) $i(X)$ ligt dicht in X'.

8. Zij X een metrische deelruimte van $\mathbf{R}^n$ (met de euclidische metriek), en zij $\bar{X}$ de afsluiting van X in $\mathbf{R}^n$. Bewijs dat $\bar{X}$ samen met de inclusieafbeelding $X \to \bar{X}$ een completering van X is.

9. Zij (X, d) een metrische ruimte. Zij $\tilde{X}$ de verzameling van equivalentieklassen van Cauchyrijen in X als in het bewijs van propositie 4.13.

(a) Laat zien dat voor twee Cauchyrijen $(x_n)_{n\geq 0}$ en $(y_n)_{n\geq 0}$ in X de limiet aan de rechterkant van (4.1) bestaat.

(b) Laat zien dat voor twee elementen $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ de limiet aan de rechterkant van (4.1) niet afhangt van de keuze van de representanten $(x_n)_{n\geq 0}$ en $(y_n)_{n\geq 0}$, en dus een functie $\tilde{d}: \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbf{R}$ definieert.

(c) Laat zien dat $\tilde{d}$ een metriek op $\tilde{X}$ is.

(d) Laat zien dat de metrische ruimte $(\tilde{X}, \tilde{d})$ volledig is.

5 Genormeerde vectorruimten

Vooral in de analyse vormen vectorruimten een belangrijke bron van metrische ruimten. Een metriek op een vectorruimte V wordt typisch geconstrueerd vanuit een *norm* op V.

Definitie 5.1 Zij V een reële vectorruimte. Een **norm** op V is een functie

$$\| \ \| \colon V \to \mathbf{R}$$

met de volgende eigenschappen:

(1) voor alle $v \in V$ geldt $\|v\| \geq 0$, met gelijkheid dan en slechts dan als $v = 0$;

(2) voor alle $v \in V$ en $c \in \mathbf{R}$ geldt $\|cv\| = |c|\|v\|$;

(3) voor alle $v, w \in V$ geldt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Een vectorruimte V voorzien van een norm heet een **genormeerde vectorruimte**.

Voorbeeld 5.2 Laten we een aantal normen op $V = \mathbf{R}^n$ bekijken. We noteren elementen van $\mathbf{R}^n$ als $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Het bekendste voorbeeld is de **euclidische norm**

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Andere belangrijke voorbeelden zijn de 1**-norm**

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

en de **maximumnorm**

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

De bovenstaande definitie is moeiteloos te uit te breiden tot *complexe* vectorruimten. Hetzelfde geldt voor de overeenkomstige voorbeelden van normen op $\mathbf{C}^n$. De enige aanpassing is dat er in de formule voor de euclidische norm nu absoluutstrepen nodig zijn:

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Lemma 5.3 *Zij V een reële of complexe vectorruimte, en zij $\| \ \|$ een norm op V. Dan is de functie*

$$\begin{aligned} d\colon V \times V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

een metriek op V.

Bewijs. Uit eigenschap (1) in de definitie van de norm volgt dat d positief-definiet is. De symmetrie-eigenschap $d(x, y) = d(y, x)$ volgt uit de berekening

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\|,$$

waarbij we eigenschap (2) gebruikt hebben. Tot slot volgt de driehoeksongelijkheid uit de berekening

$$\|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|,$$

waarbij we eigenschap (3) gebruikt hebben. □

Voorbeeld 5.4 De euclidische metriek op $\mathbf{R}^n$ kan op de bovenstaande manier geconstrueerd worden uit de euclidische norm. De Manhattanmetriek op $\mathbf{R}^2$ kan geconstrueerd worden uit de 1-norm.

Voor sommige doeleinden is niet zozeer de norm op een vectorruimte zelf van belang, maar alleen de collectie open verzamelingen voor de metriek gedefinieerd door de norm. Hiervoor introduceren we de volgende definitie.

Definitie 5.5 Zij V een $\mathbf{R}$-vectorruimte. Twee normen $\|\ \|$ en $\|\ \|'$ op V heten **equivalent**, notatie $\|\ \|' \sim \|\ \|$, als er reële getallen $C, D > 0$ bestaan zodanig dat voor alle $x \in V$ geldt

$$C\|x\| \leq \|x\|' \leq D\|x\|.$$

De bovenstaande definitie geeft een equivalentierelatie op de verzameling van alle normen op V; zie opgave 5.4. Twee equivalente normen op V geven aanleiding tot dezelfde noties van open deelverzamelingen van V; zie opgave 5.5.

Stelling 5.6 *Zij V een eindigdimensionale $\mathbf{R}$-vectorruimte. Dan zijn alle normen op V onderling equivalent.*

Bewijs (schets). We kiezen een $\mathbf{R}$-basis $(b_1, \ldots, b_n)$ voor V en definiëren een functie

$$\begin{aligned} \|\ \|_1 \colon V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \sum_{i=1}^n c_i b_i &\longmapsto \sum_{i=1}^n |c_i|. \end{aligned}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat $\|\ \|_1$ een norm op V is (als we V identificeren met $\mathbf{R}^n$ via de gekozen basis, correspondeert $\|\ \|_1$ met de eerder gedefinieerde 1-norm op $\mathbf{R}^n$). Omdat $\sim$ een equivalentierelatie is, volstaat het te bewijzen dat voor elke norm $\|\ \|$ op V geldt $\|\ \| \sim \|\ \|_1$. Hiervoor gebruiken we het feit dat $\|\ \|$ continu is met betrekking tot (de metriek op V gedefinieerd door) $\|\ \|_1$; zie opgave 5.8 voor het bewijs van dit feit. Nu is

$$S = \{x \in V \mid \|x\|_1 = 1\}$$

een gesloten en begrensde deelverzameling van V met betrekking tot de norm $\|\ \|_1$. Hieruit volgt dat elke continue functie $S \to \mathbf{R}$ een maximum en minimum aanneemt; dit zullen we later in een algemenere vorm bewijzen in stelling 9.16. In het bijzonder neemt $\|\ \|$ op S een minimum aan, zeg C, en een maximum, zeg D. Nu volgen voor alle $x \in V$ de ongelijkheden

$$C\|x\|_1 \leq \|x\| \leq D\|x\|_1,$$

dus $\|\ \|$ is equivalent met $\|\ \|_1$. □

In toepassingen in de analyse is het vaak nuttig om limieten te kunnen nemen in genormeerde vectorruimten; denk aan de limiet van een rij functies op $\mathbf{R}$. Hiervoor is de volgende definitie van belang.

Definitie 5.7 Een **Banachruimte** is een genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimte $(V, \|\ \|)$ die volledig is met betrekking tot de metriek d gedefinieerd door $d(x, y) = \|x - y\|$.

Voorbeeld 5.8 Elke *eindigdimensionale* genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimte is een Banachruimte. (Zie opgave 5.9 voor het bewijs.)

Voorbeeld 5.9 Zij V de ruimte van continue functies $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ voorzien van de norm $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Dan is $(V, \|\ \ \|)$ een Banachruimte. (Zie opgave 5.7 voor het bewijs.)

Opgaven

1. Zij S een niet-lege verzameling, zij E een reële vectorruimte voorzien van een norm $\|\ \ \|$, en zij $\mathrm{B}(S,E)$ de verzameling van begrensde functies $S \to E$. Voor $f \in \mathrm{B}(S,E)$ definiëren we

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in S} \|f(x)\|.$$

Laat zien dat $\|\ \ \|_\infty$ een norm op $\mathrm{B}(S,E)$ is. Wat is het verband met opgave 2.3?

2. Bekijk op $V = \mathbf{R}^2$ de euclidische norm

$$\begin{aligned} \|\ \ \|_{\mathrm{E}}\colon V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1,x_2) &\longmapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

en de Manhattannorm

$$\begin{aligned} \|\ \ \|_{\mathrm{M}}\colon V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1,x_2) &\longmapsto |x_1| + |x_2|. \end{aligned}$$

We schrijven d_{E} en d_{M} voor de door deze normen gedefinieerde metrieken op V, en voor $x \in V$ en $\epsilon > 0$ definiëren we

$$B_\epsilon^{\mathrm{E}}(x) = \{y \in V \mid d_{\mathrm{E}}(x,y) < \epsilon\}$$

en

$$B_\epsilon^{\mathrm{M}}(x) = \{y \in V \mid d_{\mathrm{M}}(x,y) < \epsilon\}.$$

(a) Laat zien dat voor alle $x \in V$ geldt

$$\|x\|_{\mathrm{E}} \le \|x\|_{\mathrm{M}} \le \sqrt{2}\|x\|_{\mathrm{E}}.$$

(b) Zij $x \in V$ en zij $\epsilon > 0$. Bewijs dat er een $\delta > 0$ bestaat waarvoor geldt $B_\delta^{\mathrm{E}}(x) \subseteq B_\epsilon^{\mathrm{M}}(x)$.

(c) Bewijs omgekeerd dat er voor alle $x \in V$ en $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat waarvoor geldt $B_\delta^{\mathrm{M}}(x) \subseteq B_\epsilon^{\mathrm{E}}(x)$.

(d) Leid hieruit af dat een deelverzameling $Y \subseteq V$ open is in (V, d_{E}) dan en slechts dan als Y open is in (V, d_{M}).

3. Zij $(V, \|\ \ \|)$ een genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimte. Laat zien dat de normafbeelding $\|\ \ \|\colon V \to \mathbf{R}$ continu is.

4. Zij V een $\mathbf{R}$-vectorruimte. Bewijs dat de relatie $\sim$ op de verzameling van alle normen op V een equivalentierelatie is.

5. Zij V een $\mathbf{R}$-vectorruimte, zijn $\|\ \ \|$, $\|\ \ \|'$ twee normen op V, en zijn d, d' de hierdoor gedefinieerde metrieken. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

(1) er geldt $\|\ \ \| \sim \|\ \ \|'$;

(2) voor elke deelverzameling $U \subseteq V$ geldt: U is open in (V,d) dan en slechts dan

als U open is in (V, d').

6. Zijn $(E, \| \ \|_E)$ en $(F, \| \ \|)_F)$ genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimten, en zij $T\colon E \to F$ een $\mathbf{R}$-lineaire afbeelding. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1) T is continu;

(2) T is continu in 0;

(3) er bestaat een reëel getal C zodanig dat voor alle $x \in E$ geldt $\|T(x)\|_F \le C\|x\|_E$.

7.

(a) Zij V de ruimte van continue functies $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ voorzien van de norm $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Laat zien dat $(V, \| \ \|)$ een Banachruimte is. (Aanwijzing: elke continue functie $[0,1] \to \mathbf{R}$ is begrensd. TODO: zonder bewijs aannemen)

(b) Zij V de vectorruimte van alle rijen $(x_n)_{n\ge 0}$ in $\mathbf{R}$ zodanig dat er een $N \ge 0$ bestaat met $x_n = 0$ voor alle $n \ge N$. We voorzien V van de norm

$$\|(x_n)_{n\ge 0}\| = \left(\sum_{n\ge 0} x_n^2\right)^{1/2}.$$

Laat zien dat V geen Banachruimte is.

8. Bewijs (in de context van het bewijs van stelling 5.6) de bewering dat de functie $\| \ \|\colon V \to \mathbf{R}$ continu is met betrekking tot de metriek op V gedefinieerd door $\| \ \|_1$ en de euclidische metriek op $\mathbf{R}$.

9. Zij $(V, \| \ \|)$ een eindigdimensionale genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimte.

(a) Laat zien dat elke lineaire afbeelding $V \to \mathbf{R}$ continu is (met betrekking tot de metriek op V gedefinieerd door $\| \ \|$ en de euclidische metriek op $\mathbf{R}$).

(b) Laat zien dat $(V, \| \ \|)$ een Banachruimte is.

(Aanwijzing: gebruik stelling 5.6.)

10. Zij $(V, \| \ \|)$ een genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimte. Zij $i\colon V \to V'$ de completering van V met betrekking tot de door $\| \ \|$ gedefinieerde metriek.

(a) Laat zien dat V' een natuurlijke $\mathbf{R}$-vectorruimtestructuur heeft.

(b) Laat zien dat er een unieke norm $\| \ \|'$ op V' bestaat zodanig dat voor alle $v \in V$ geldt $\|i(v)\|' = \|v\|$.

(c) Laat zien dat V' een Banachruimte is.

6 Topologische ruimten

Het gedrag van open en gesloten deelverzamelingen van een metrische ruimte met betrekking tot het nemen van verenigingen en doorsneden (propositie 1.14) blijkt zo fundamenteel te zijn dat deze eigenschappen als basis dienen voor de algemene definitie van topologische ruimten.

Definitie 6.1 Zij X een verzameling. Een **topologie** op X is een collectie $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X met de volgende eigenschappen:

(0) $\emptyset$ en X zijn elementen van $\mathcal{T}$;

(1) elke vereniging van elementen van $\mathcal{T}$ is een element van $\mathcal{T}$;

(2) elke eindige doorsnede van elementen van $\mathcal{T}$ is een element van $\mathcal{T}$.

Een **topologische ruimte** is een paar $(X, \mathcal{T})$ met X een verzameling en $\mathcal{T}$ een topologie op X. De elementen van $\mathcal{T}$ heten **open deelverzamelingen** van $(X, \mathcal{T})$. Een **gesloten deelverzameling** van $(X, \mathcal{T})$ is een deelverzameling $F \subseteq X$ waarvoor geldt $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

Opmerking 6.2 Omdat de vereniging (respectievelijk doorsnede) van de lege collectie deelverzamelingen van X gelijk is aan $\emptyset$ (respectievelijk X) volgt (0) in feite uit (1) en (2).

Opmerking 6.3 Uit de definitie volgen direct de eigenschappen van gesloten verzamelingen met betrekking tot verenigingen en doorsneden:

(0) $\emptyset$ en X zijn gesloten deelverzamelingen van $(X, \mathcal{T})$;

(1) elke doorsnede van gesloten deelverzamelingen van $(X, \mathcal{T})$ is een gesloten deelverzameling van $(X, \mathcal{T})$;

(2) elke eindige vereniging van gesloten deelverzamelingen van $(X, \mathcal{T})$ is een gesloten deelverzameling van $(X, \mathcal{T})$.

Voorbeeld 6.4 Voor elke verzameling X is $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ een topologie op X. Deze heet de **triviale topologie**.

Voorbeeld 6.5 Voor elke verzameling X is de machtsverzameling $\mathcal{P}(X)$ (de collectie van alle deelverzamelingen van X) een topologie op X. Deze heet de **discrete topologie**.

Voorbeeld 6.6 Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $\mathcal{T}_d$ de verzameling van open deelverzamelingen van (X, d) (volgens de definitie van open deelverzamelingen in een metrische ruimte). Dan is $\mathcal{T}_d$ een topologie op X wegens propositie 1.14.

Voorbeeld 6.7 Zij $\mathcal{T}$ de collectie deelverzamelingen van het complexe vlak $\mathbf{C}$ gedefinieerd door

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbf{C} \mid \mathbf{C} \setminus U \text{ is eindig}\}.$$

Dan is $(\mathbf{C}, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.

Voorbeeld 6.8 Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X. We definiëren

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Dit is een topologie op Y; deze heet de **deelruimtetopologie** op Y, en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ heet een **(topologische) deelruimte** van $(X, \mathcal{T}_X)$.

In plaats van een topologie te beschrijven door alle open verzamelingen te geven, is het vaak praktischer om een kleinere collectie open verzamelingen aan te geven waaruit alle open verzamelingen verkregen kunnen worden door het nemen van verenigingen en eventueel eindige doorsneden. Dit geeft aanleiding tot de definitie van *bases* en *subbases*.

Definitie 6.9 Een **basis** van een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is een deelverzameling $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ zodanig dat elke open verzameling van X een vereniging van elementen van $\mathcal{B}$ is. Een **subbasis** van $(X, \mathcal{T})$ is een deelverzameling $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ zodanig dat de collectie van eindige doorsneden van elementen van $\mathcal{S}$ een basis van $\mathcal{T}$ is.

Gegeven een willekeurige collectie $\mathcal{S}$ van deelverzamelingen van X is er een unieke topologie op X waarvoor $\mathcal{S}$ een subbasis is, namelijk de collectie van alle verenigingen van eindige doorsneden van elementen van $\mathcal{S}$.

Voorbeeld 6.10 Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $\mathcal{T}_d$ de door d gedefinieerde topologie op X. Dan is de collectie

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$$

van alle open ballen in (X, d) wegens propositie 1.11 een basis voor $\mathcal{T}_d$.

Evenals in het geval van metrische ruimten kunnen we een topologie ook karakteriseren met behulp van de omgevingen.

Definitie 6.11 Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $x \in X$. Een **omgeving** van x in $(X, \mathcal{T})$ is een deelverzameling $N \subseteq X$ zodanig dat er een $U \in \mathcal{T}$ bestaat met $x \in U \subseteq N$.

Net als voor metrische ruimten is een open omgeving van x een open deelverzameling $U \subseteq X$ met $x \in U$.

Propositie 6.12 *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.*

(1) Voor alle $x \in X$, elke omgeving N van x en elke deelverzameling M van X met $M \supseteq N$ is M een omgeving van x.

(2) Voor alle $x \in X$ is de doorsnede van twee omgevingen van x ook een omgeving van x.

(3) Een verzameling $U \subseteq X$ is open dan en slechts dan als U een omgeving van x is voor elke $x \in U$.

Bewijs. Bewering (1) volgt direct uit de definitie. Laten N, N' omgevingen van x zijn. Dan zijn er open verzamelingen U, U' met $x \in U \subseteq N$ en $x \in U' \subseteq N'$. Dan is $U \cap U'$ een open verzameling met $x \in U \cap U' \subseteq N \cap N'$; dit geeft (2). Het is duidelijk dat elke open verzameling U een omgeving van elke $x \in U$ is. Omgekeerd: stel U is een omgeving van x voor elke $x \in U$. Voor elke $x \in U$ kunnen we een open verzameling U_x kiezen met $x \in U_x \subseteq U$. Nu geldt

$$U \subseteq \bigcup_{x \in U} U_x \subseteq U,$$

dus beide inclusies zijn gelijkheden; in het bijzonder is U een vereniging van open verzamelingen en dus open. □

De volgende propositie laat zien dat het begrip **omgeving** gebruikt kan worden om een alternatieve definitie van topologische ruimten te geven.

Propositie 6.13 *Zij X een verzameling, en zij voor elke $x \in X$ een niet-lege collectie $\mathcal{N}_x$ van deelverzamelingen van X gegeven zodanig dat de volgende uitspraken gelden voor alle $x \in X$:*

(1) voor alle $N \in \mathcal{N}_x$ geldt $x \in N$;

(2) voor alle $N \in \mathcal{N}_x$ en $M \supseteq N$ geldt $M \in \mathcal{N}_x$;

(3) voor alle $N, N' \in \mathcal{N}_x$ geldt $N \cap N' \in \mathcal{N}_x$;

(4) voor alle $N \in \mathcal{N}_x$ is er een $U \in \mathcal{N}_x$ met $U \subseteq N$ zodanig dat voor alle $y \in U$ geldt $U \in \mathcal{N}_y$.

Dan is er een unieke topologie $\mathcal{T}$ op X zodanig dat voor elke $x \in X$ de omgevingen van x in $(X, \mathcal{T})$ precies de elementen van $\mathcal{N}_x$ zijn.

Bewijs (schets). We nemen voor $\mathcal{T}$ de collectie van alle deelverzamelingen $U \subseteq X$ die voldoen aan $U \in \mathcal{N}_x$ voor alle $x \in U$; dit is de enige mogelijkheid wegens propositie 6.12(3). Het bewijs dat $\mathcal{T}$ een topologie op X is, wordt aan de lezer overgelaten. Zij nu $x \in X$ en $N \subseteq X$. Als N een omgeving van x in X is, bestaat er per definitie een open verzameling U met $x \in U \subseteq N$; uit de definitie van $\mathcal{T}$ volgt $U \in \mathcal{N}_x$, en wegens (2) ook $N \in \mathcal{N}_x$. Omgekeerd impliceert de definitie van $\mathcal{T}$ dat als $N \in \mathcal{N}_x$ geldt, een verzameling U als in (4) een open verzameling is met $x \in U \subseteq N$, dus N is een omgeving van x in X. $\square$

Zoals we in voorbeeld (3) gezien hebben, is elke metrische ruimte op een natuurlijke manier op te vatten als topologische ruimte. Het is echter niet zo dat elke topologische ruimte op deze manier geconstrueerd kan worden. Een tegenvoorbeeld is $X = \{p, q\}$ met $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$. Dan is $\{p\}$ niet gesloten. In een metrische ruimte zijn alle eindige verzamelingen echter gesloten (opgave 1.7), dus $\mathcal{T}$ komt niet van een metriek op X.

Zij (X, d) een metrische ruimte. Dan zijn er voor twee punten $x \neq y$ altijd open omgevingen U van x en V van y te vinden met lege doorsnede. (Neem bijvoorbeeld $U = B_r(x)$ en $V = B_r(y)$, waarbij $r = d(x, y)/2$.) Deze eigenschap is nuttig, maar geldt niet voor alle topologische ruimten. Voor de eerder genoemde topologische ruimte $X = \{p, q\}$ met $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$ geldt zelfs dat elke open omgeving van q ook p bevat, dus zijn er zeker geen disjuncte open omgevingen van p en q.

Definitie 6.14 Een **Hausdorffruimte** is een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ zodanig dat er voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ open omgevingen U van x en V van y bestaan waarvoor geldt $U \cap V = \emptyset$.

Voorbeeld 6.15 Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $\mathcal{T}_d$ de topologie op X gedefinieerd door d. Dan is $(X, \mathcal{T}_d)$ een Hausdorffruimte: als x, y twee verschillende punten van X zijn en $r = d(x, y)/2$, dan zijn $B_r(x)$ en $B_r(y)$ disjuncte open omgevingen van x en y.

Het is vaak zinvol om verschillende topologieën op dezelfde verzameling met elkaar te vergelijken.

Definitie 6.16 Zij X een verzameling, en zijn $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ twee topologieën op X. We zeggen dat $\mathcal{T}'$ **fijner** is dan $\mathcal{T}$, of dat $\mathcal{T}$ **grover** is dan $\mathcal{T}'$, als geldt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Op precies dezelfde manier als voor metrische ruimten kunnen we nu het inwendige, de afsluiting en de rand van deelverzamelingen van topologische ruimten definiëren, evenals het begrip dichtheid.

Definitie 6.17 Zij X een topologische ruimte, en zij S een deelverzameling van X. Het **inwendige** van S in X, notatie S°, is de grootste open deelverzameling $U \subseteq X$ waarvoor geldt $U \subseteq S$. De **afsluiting** van S in X, notatie $\bar{S}$, is de kleinste gesloten deelverzameling $F \subseteq X$ waarvoor geldt $S \subseteq F$. De **rand** van S in X, notatie ∂S, is de gesloten deelverzameling van X gedefinieerd door

$$\partial S = \bar{S} \cap \overline{X \setminus S}.$$

We zeggen dat S **dicht** is in X als geldt $\bar{S} = X$.

Opgaven

1. Bewijs dat er een unieke topologie op $\mathbf{R}^2$ bestaat waarvoor de gesloten verzamelingen (behalve $\mathbf{R}^2$ zelf) precies de eindige verenigingen van punten en lijnen zijn.

2.

(a) Laat zien dat als $(X, \mathcal{T})$ een Hausdorffruimte is en $x \in X$, de deelverzameling $\{x\} \subseteq X$ gesloten is.

(b) Laat zien dat elke topologische deelruimte van een Hausdorffruimte weer een Hausdorffruimte is.

3. Laat zien dat er voor de euclidische topologie op $\mathbf{R}^n$ een aftelbare basis bestaat.

4. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $\mathcal{B}$ een basis voor $\mathcal{T}$. Zij Y een deelruimte van X. Laat zien dat $\{U \cap Y \mid U \in \mathcal{B}\}$ een basis voor de deelruimtetopologie op Y is.

5. Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte, en zij S een deelverzameling van X. Bewijs de gelijkheden $X \setminus S^\circ = \overline{X \setminus S}$ en $X \setminus \bar{S} = (X \setminus S)^\circ$.

6. Voor alle $a, b \in \mathbf{Z}$ met $b > 0$ definiëren we

$$N_{a,b} = \{a + nb \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

Voor $a \in \mathbf{Z}$ definiëren we $\mathfrak{N}_a$ als de verzameling van alle deelverzamelingen $N \subseteq \mathbf{Z}$ zodanig dat er een $b > 0$ is met $N_{a,b} \subseteq N$.

(a) Bewijs dat er een unieke topologie $\mathcal{T}$ op $\mathbf{Z}$ is zodanig de omgevingen van $a \in \mathbf{Z}$ met betrekking tot $\mathcal{T}$ precies de elementen van $\mathfrak{N}_a$ zijn. (Aanwijzing: gebruik propositie 6.13.)

(b) Bewijs dat elke open deelverzameling van $(\mathbf{Z}, \mathcal{T})$ ofwel oneindig ofwel leeg is.

(c) Bewijs dat alle verzamelingen $N_{a,b}$ zowel open als gesloten zijn.

(d) Bewijs dat $\mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\}$ de vereniging is van de verzamelingen $N_{0,p}$ met p een priemgetal.

(e) Leid uit de eerdere onderdelen af dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

7 Continue afbeeldingen tussen topologische ruimten

In stelling 3.2 hebben we gezien dat continuïteit van afbeeldingen tussen metrische ruimten uitgedrukt kan worden in termen van open verzamelingen. Hierop baseren we de definitie van continue afbeeldingen tussen algemene topologische ruimten.

Definitie 7.1 Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten. Een **continue afbeelding** van $(X, \mathcal{T}_X)$ naar $(Y, \mathcal{T}_Y)$ is een afbeelding $f\colon X \to Y$ zodanig dat voor elke $U \in \mathcal{T}_Y$ geldt $f^{-1}U \in \mathcal{T}_X$.

Voorbeeld 7.2 Elke afbeelding van een verzameling met de discrete topologie naar een willekeurige topologische ruimte is continu.

Voorbeeld 7.3 Elke afbeelding van een willekeurige topologische ruimte naar een verzameling met de triviale topologie is continu.

Voorbeeld 7.4 De samenstelling van twee continue afbeeldingen is continu.

Voorbeeld 7.5 Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimten, en zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding. Dan is f continu als afbeelding van metrische ruimten dan en slechts dan als f continu is als afbeelding van topologische ruimten van $(X, \mathcal{T}_{d_X})$ naar $(Y, \mathcal{T}_{d_Y})$.

Voorbeeld 7.6 Neem $X = \mathbf{C}$ en zij $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbf{C} \mid \mathbf{C} \backslash U \text{ is eindig}\}$. Dan geldt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$, dus de identieke afbeelding op $\mathbf{C}$ definieert een continue afbeelding $(\mathbf{C}, \mathcal{T}_d) \to (\mathbf{C}, \mathcal{T})$.

Voorbeeld 7.7 Zijn $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ twee topologieën op een verzameling X. Dan is de identiteit op X een continue afbeelding van $(X, \mathcal{T}')$ naar $(X, \mathcal{T})$ dan en slechts dan als $\mathcal{T}'$ fijner is dan $\mathcal{T}$.

We voeren nu een begrip in dat zegt wanneer twee topologische ruimten "topologisch hetzelfde" zijn.

Definitie 7.8 Een **homeomorfisme** tussen topologische ruimten X en Y is een continue afbeelding $f\colon X \to Y$ met de eigenschap dat er een continue afbeelding $g\colon Y \to X$ bestaat zodanig dat $g \circ f$ de identiteit op X is en $f \circ g$ de identiteit op Y is. We zeggen dat X en Y **homeomorf** zijn als er een homeomorfisme van X naar Y bestaat.

Definitie 7.9 Een afbeelding $f\colon X \to Y$ tussen topologische ruimten heet **open** als voor elke open deelverzameling $U \subseteq X$ de verzameling $f(U)$ open is in Y. Net zo heet een afbeelding $f\colon X \to Y$ **gesloten** als voor elke gesloten deelverzameling $F \subseteq X$ de verzameling $f(F)$ gesloten is in Y.

Propositie 7.10 *Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) f is een homeomorfisme;

(2) f is bijectief, continu en open;

(3) f is bijectief, continu en gesloten.

Bewijs. Zie opgave 7.8. □

Voorbeeld 7.11 Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten, en zij $f\colon X \to Y$ een bijectieve isometrie. Vatten we X en Y op als topologische ruimten, dan is f een homeomorfisme.

Voorbeeld 7.12 De afbeelding

$$\begin{aligned}(-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbf{R}\\ x &\longmapsto \tan x\end{aligned}$$

is een homeomorfisme met inverse $y \mapsto \arctan y$.

Voorbeeld 7.13 De afbeelding van de open eenheidsschijf naar $\mathbf{R}^2$ die in poolcoördinaten gegeven wordt door $(r, \theta) \mapsto (r/(1-r), \theta)$ is een homeomorfisme met inverse $(u, \theta) \mapsto (u/(1+u), \theta)$.

Voorbeeld 7.14 Een koffiekop en een donut zijn homeomorf.

Een type afbeelding dat later een belangrijke rol zal spelen, zijn continue afbeeldingen vanaf het eenheidsinterval $[0, 1]$.

Definitie 7.15 Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een **weg** of **pad** in X is een continue afbeelding

$$\gamma\colon [0, 1] \to X.$$

Als $x = \gamma(0)$ en $y = \gamma(1)$ het begin- en eindpunt van γ zijn, dan noemen we γ een **weg** (of **pad**) **van** x **naar** y.

De volgende begrippen zijn erg nuttig bij het redeneren over wegen.

Definitie 7.16 Zij X een topologische ruimte, en zij $\gamma\colon [0, 1] \to X$ een weg. De **omkering** van γ is de weg

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}\colon [0, 1] &\longrightarrow X\\ t &\longmapsto \gamma(1-t).\end{aligned}$$

Definitie 7.17 Zij X een topologische ruimte, en zijn $\gamma_1, \gamma_2\colon [0, 1] \to X$ twee wegen die voldoen aan $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. De **aaneenschakeling** van γ_1 en γ_2 is de weg

$$\begin{aligned}\gamma_1 \odot \gamma_2\colon [0, 1] &\longrightarrow X\\ t &\longmapsto \begin{cases}\gamma_1(2t) & \text{voor } 0 \le t \le 1/2,\\ \gamma_2(2t-1) & \text{voor } 1/2 \le t \le 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Merk op dat $\gamma_1 \odot \gamma_2$ goed gedefinieerd is dankzij de aanname $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Zie opgave 7.10 voor het bewijs dat $\gamma_1 \odot \gamma_2$ continu is.

Opgaven

1. Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten. Zijn $X' \subseteq X$ en $Y' \subseteq Y$ deelverzamelingen waarvoor geldt $f(X') \subseteq Y'$. Bewijs dat de door f geïnduceerde afbeelding $f'\colon X' \to Y'$ continu is.

2. Zijn X, Y topologische ruimten, en zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding.

(a) Zijn X_1, X_2 open deelverzamelingen van X die voldoen aan $X = X_1 \cup X_2$ en zodanig dat de beperkingen $f|_{X_1}\colon X_1 \to Y$ en $f|_{X_2}\colon X_2 \to Y$ continu zijn. Bewijs dat f continu is.

(b) Zelfde vraag met "gesloten" in plaats van "open".

3.

(a) Geef een voorbeeld van een continue afbeelding tussen topologische ruimten die niet open is.

(b) Geef een voorbeeld van een open afbeelding tussen topologische ruimten die niet continu is.

4. Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten, en zij $\mathcal{B}$ een basis voor $\mathcal{T}_Y$. Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding. Laat zien dat f continu is dan en slechts dan als voor elke $U \in \mathcal{B}$ de verzameling $f^{-1}U$ open is in X.

5. Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten zodanig dat $\mathcal{T}_X$ de triviale topologie op X is en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ een Hausdorffruimte is. Bewijs dat elke continue afbeelding $f\colon X \to Y$ constant is.

6. Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten, en zij $D \subseteq X$ een dichte deelverzameling. Zijn $f, g\colon X \to Y$ twee continue afbeeldingen waarvoor geldt $f|_D = g|_D$.

(a) Neem aan dat $(Y, \mathcal{T}_Y)$ een Hausdorffruimte is. Bewijs dat f en g gelijk zijn.

(b) Geef een voorbeeld van een situatie als boven (met Y geen Hausdorffruimte) waarbij f en g ongelijk zijn.

7. Zijn X en Y discrete topologische ruimten. Laat zien dat X en Y homeomorf zijn dan en slechts dan als X en Y dezelfde kardinaliteit hebben (als verzamelingen).

8. Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1) f is een homeomorfisme;

(2) f is bijectief, continu en open;

(3) f is bijectief, continu en gesloten.

9. Construeer een homeomorfisme van het eenheidsvierkant

$$V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1/2\}$$

naar de eenheidscirkel

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

10. Zij X een topologische ruimte, en zijn $\gamma_1, \gamma_2\colon [0, 1] \to X$ continue afbeeldingen zodanig dat $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Bewijs dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \gamma_1 \odot \gamma_2\colon [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{voor } 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{voor } 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

continu is. (Dit laat zien dat wegen aaneengeschakeld kunnen worden: als er wegen van x naar y en van y naar z bestaan, dan bestaat er een weg van x naar z.)

8 Constructies van topologische ruimten

We hebben al gezien dat het nemen van deelruimten een manier is om “nieuwe” topologische ruimten te construeren. In deze paragraaf beschrijven we drie andere constructies: disjuncte verenigingen, quotiënten en producten van topologische ruimten.

Definitie 8.1 Zijn X en Y twee verzamelingen. De **disjuncte vereniging** van X en Y is de verzameling

$$X \sqcup Y = \{(0,x) \mid x \in X\} \cup \{(1,y) \mid y \in Y\}.$$

We kunnen X als deelverzameling van $X \sqcup Y$ opvatten via de injectieve afbeelding

$$\begin{aligned} X &\to X \sqcup Y \\ x &\mapsto (0,x), \end{aligned}$$

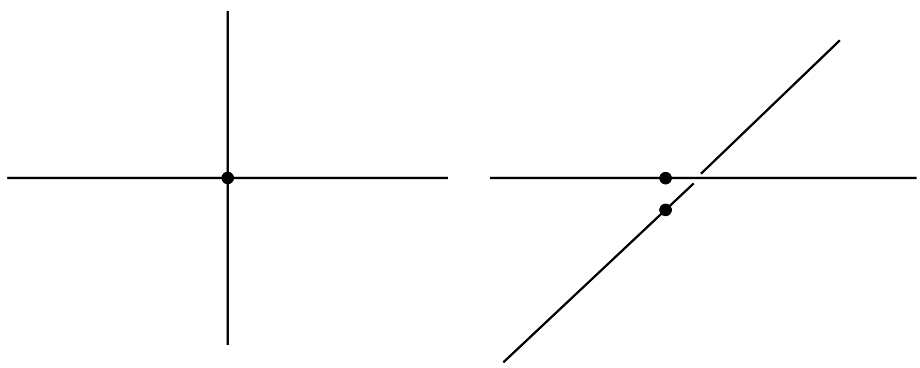
en net zo voor Y. De disjuncte vereniging verschilt van een “gewone” vereniging doordat X en Y per definitie lege doorsnede hebben als deelverzamelingen van $X \sqcup Y$.

Definitie 8.2 Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ twee topologische ruimten. De **topologie van de disjuncte vereniging** is de collectie deelverzamelingen van $X \sqcup Y$ gedefinieerd door

$$\mathcal{T}_{X \sqcup Y} = \{U \sqcup V \subseteq X \sqcup Y \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Het is niet moeilijk na te gaan dat $\mathcal{T}_{X \sqcup Y}$ inderdaad een topologie op $X \sqcup Y$ is, dat X en Y open deelverzamelingen van $X \sqcup Y$ zijn en dat de deelruimtetopologie van X (respectievelijk Y) als deelruimte van $X \sqcup Y$ precies de oorspronkelijke topologie $\mathcal{T}_X$ (respectievelijk $\mathcal{T}_Y$) is.

Voorbeeld 8.3 Bekijk de deelruimten $X, Y \subseteq \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door $X = \{(x,0) \mid x \in \mathbf{R}\}$ en $Y = \{(0,y) \mid y \in \mathbf{R}\}$. In de “gewone” vereniging $X \cup Y$ hebben X en Y doorsnede $\{(0,0)\}$. In de disjuncte vereniging zijn $(0,0) \in X$ en $(0,0) \in Y$ daarentegen twee verschillende punten; zie figuur 8.4.



Figuur 8.4 Vereniging (links) en disjuncte vereniging (rechts) van de x- en y-as in $\mathbf{R}^2$.

Als X een verzameling is en $\sim$ een equivalentierelatie op X, noteren we de equivalentieklasse van een element $x \in X$ met $[x]$, en de verzameling equivalentieklassen met $X/{\sim}$. Er bestaat een kanonieke afbeelding

$$\begin{aligned} q\colon X &\to X/{\sim} \\ x &\mapsto [x]. \end{aligned}$$

Per definitie is q *invariant* voor de equivalentierelatie $\sim$, d.w.z. voor alle $x, y \in X$ geldt de implicatie

$$x \sim y \implies q(x) = q(y).$$

Deze heeft de volgende *universele eigenschap*: als Z een verzameling is en $f\colon X \to Z$ is een functie die invariant is voor $\sim$, d.w.z. die voldoet aan

$$x \sim y \implies f(x) = f(y),$$

dan bestaat er een unieke functie $g\colon X/{\sim} \to Z$ die voldoet aan $g \circ q = f$, namelijk de functie die gegeven wordt door

$$g([x]) = f(x) \quad \text{voor alle } x \in X;$$

merk op dat g goed gedefinieerd is wegens de aanname dat f invariant is voor $\sim$.

Stelling 8.5 *Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte. Zij $\sim$ een equivalentierelatie op de verzameling X, zij $Q = X/{\sim}$ de quotiëntverzameling, en zij $q\colon X \to Q$ de quotiëntafbeelding.*

(a) Zij $\mathcal{T}_Q$ de collectie van deelverzamelingen van Q gedefinieerd door

$$\mathcal{T}_Q = \{U \subseteq Q \mid q^{-1}U \textit{ is open in } X\}.$$

Dan is $\mathcal{T}_Q$ een topologie op Q.

(b) De afbeelding q definieert een continue afbeelding $(X, \mathcal{T}_X) \to (Q, \mathcal{T}_Q)$.

(c) We voorzien Q van de topologie $\mathcal{T}_Q$ uit (a). Zij Z een topologische ruimte, en zij $f\colon X \to Z$ een continue afbeelding zodanig dat voor alle $x, x' \in X$ geldt $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$. Dan bestaat er een unieke continue afbeelding $g\colon Q \to Z$ waarvoor geldt $f = g \circ q$.

Bewijs.

(a) Omdat $q^{-1}\emptyset = \emptyset$ en $q^{-1}Q = X$ open zijn in X, geldt $\emptyset, Q \in \mathcal{T}_Q$. Voor een willekeurige collectie $\mathcal{U}$ van elementen van $\mathcal{T}_Q$ is de deelverzameling

$$q^{-1} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} q^{-1}U$$

van X open, dus geldt $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}_Q$; dit laat zien dat willekeurige verenigingen van elementen van $\mathcal{T}_Q$ weer in $\mathcal{T}_Q$ liggen. Een soortgelijk argument laat zien dat eindige doorsneden van elementen van $\mathcal{T}_Q$ weer in $\mathcal{T}_Q$ liggen.

(b) De continuïteit van q volgt uit de constructie van $\mathcal{T}_Q$ en de definitie van continuïteit.

(c) We merken als hierboven op dat de gezochte afbeelding g noodzakelijk gegeven wordt door $g([x]) = f(x)$; we moeten laten zien dat deze g continu is. Voor elke open deelverzameling $U \subseteq Z$ is de deelverzameling

$$q^{-1}(g^{-1}U) = (g \circ q)^{-1}U = f^{-1}U$$

van X open wegens de continuïteit van f; de definitie van $\mathcal{T}_Q$ impliceert nu $g^{-1}U \in \mathcal{T}_Q$, hetgeen we moesten bewijzen.

$\square$

Definitie 8.6 Zij X een topologische ruimte, zij $\sim$ een equivalentierelatie op X, en zij $Q = X/{\sim}$ de quotiëntverzameling. De topologie $\mathcal{T}_Q$ uit stelling 8.5 heet de **quotiënttopologie** op Q, en de topologische ruimte $(Q, \mathcal{T}_Q)$ heet het **quotiënt** van de ruimte X naar de equivalentierelatie $\sim$.

Stelling 8.5(c) laat zien dat wanneer we $Q = X/{\sim}$ voorzien van de quotiënttopologie, de bovengenoemde universele eigenschap van quotiëntverzamelingen betekenis blijft houden in de context van continue afbeeldingen. De topologie $\mathcal{T}_Q$ is te karakteriseren als de fijnste topologie op Q waarvoor de afbeelding $q\colon X \to Q$ continu is.

Voorbeeld 8.7 Zij I het eenheidsinterval $[0, 1]$, en zij $\sim$ de equivalentierelatie op I waarvoor geldt $x \sim y$ dan en slechts dan als geldt $x = y$ of $\{x, y\} = \{0, 1\}$. Door het quotiënt te nemen, plakken we de uiteinden 0 en 1 aan elkaar; intuïtief levert dit een cirkel op. Dit is precies te maken door na te gaan dat de continue afbeelding

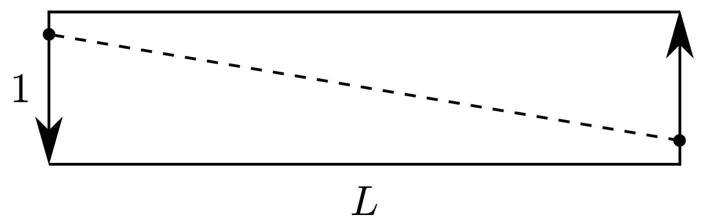
$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

een homeomorfisme induceert van $I/{\sim}$ naar $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Zie hiervoor opgave 8.1.

Voorbeeld 8.8 Zij R de rechthoek $[0, L] \times [0, 1]$ in $\mathbf{R}^2$ voor een $L > 0$. We definiëren een equivalentierelatie $\sim$ op R door voor te schrijven dat twee punten $(x, y), (x', y') \in R$ equivalent zijn dan en slechts dan als ze ofwel gelijk zijn, ofwel er een $t \in [0, 1]$ bestaat waarvoor geldt

$$\{(x, y), (x', y')\} = \{(0, t), (L, 1 - t)\}.$$

De quotiëntruimte $R/{\sim}$ staat bekend als de **Möbiusband**.

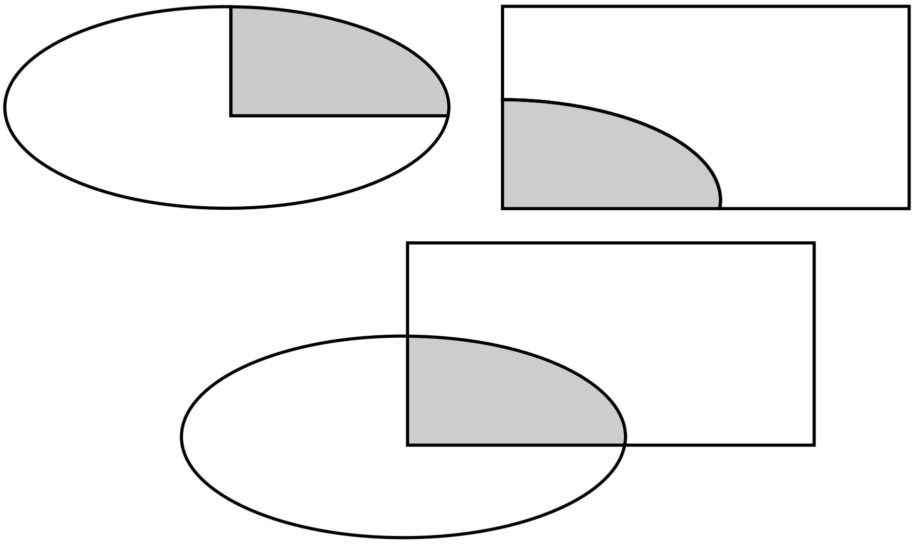


Figuur 8.9 Constructie van de Möbiusband.

Voorbeeld 8.10 Als gelijktijdige toepassing van disjuncte verenigingen en quotiënten kunnen we twee topologische ruimten “aan elkaar plakken”. Hiertoe nemen we aan dat de volgende data gegeven zijn:

- twee topologische ruimten X_1 en X_2;
- topologische deelruimten $U_1 \subseteq X_1$ respectievelijk $U_2 \subseteq X_2$;
- een homeomorfisme $\phi\colon U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$.

We nemen $X = X_1 \sqcup X_2$ met de topologie van de disjuncte vereniging, en we beschouwen X_1 en X_2 als deelruimten van X. We definiëren een equivalentierelatie $\sim$ op X door voor te schrijven dat twee punten $x, x' \in X$ equivalent zijn dan en slechts dan als ze ofwel gelijk zijn, ofwel er een $x_1 \in U_1$ bestaat waarvoor geldt $\{x, x'\} = \{x_1, \phi(x_1)\}$. De oorspronkelijke ruimten X_1 en X_2 zijn op te vatten als deelruimten van de quotiëntruimte $X/{\sim}$, en de doorsnede van deze deelruimten is homeomorf met zowel U_1 als U_2.



Figuur 8.11 Twee ruimten X_1 en X_2 met homeomorfe deelruimten (boven) en het resultaat van plakken langs deze deelruimten (onder)

Een ander type constructie waarmee we nieuwe ruimten kunnen maken, is het nemen van producten. We kunnen op het product van twee metrische ruimten (X, d_X) en (Y, d_Y) een "productmetriek" definiëren (opgave 3.4). Net zo kunnen we op het product van twee topologische ruimten $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ een **producttopologie** definiëren. Dit is de grofste topologie op $X \times Y$ zodanig dat de projectieafbeeldingen $X \times Y \to X$ en $X \times Y \to Y$ continu zijn.

Definitie 8.12 De **producttopologie** op $X \times Y$ is de topologie $\mathcal{T}$ zodanig dat de verzameling

$$\mathcal{S} = \{U \times Y \mid U \subseteq X \text{ open}\} \cup \{X \times V \mid V \subseteq Y \text{ open}\}$$

een subbasis voor $\mathcal{T}$ is.

Stelling 8.13 *Zijn X en Y twee topologische ruimten, en zijn $p\colon X \times Y \to X$ en $q\colon X \times Y \to Y$ de projectieafbeeldingen. Dan bestaat er voor elke topologische ruimte Z en elk tweetal continue afbeeldingen $g\colon Z \to X$ en $h\colon Z \to Y$ een unieke continue afbeelding $f\colon Z \to X \times Y$ die voldoet aan $p \circ f = g$ en $q \circ f = h$.*

Bewijs. Op het niveau van verzamelingen is de afbeelding $f\colon Z \to X \times Y$ gedefinieerd door $f(z) = (g(z), h(z))$ de unieke afbeelding met de gewenste eigenschap. We moeten dus nagaan dat f continu is; zie hiervoor opgave 8.8. □

Voorbeeld 8.14 De producttopologie op $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ is gelijk aan de euclidische topologie op $\mathbf{R}^2$; zie opgave 8.5.

Voorbeeld 8.15 Het product $S^1 \times S^1$ van twee exemplaren van de cirkel staat bekend als de **torus**. Deze kan ook verkregen worden door de randen van een vierkant op een geschikte manier aan elkaar te plakken; zie opgave 8.9.

De definitie van de producttopologie is zonder problemen te generaliseren naar producten van willekeurig veel topologische ruimten.

Definitie 8.16 Zij I een verzameling, zij voor elke $i \in I$ een topologische ruimte X_i gegeven, zij X de productverzameling $\prod_{i \in I} X_i$, en zij $p_i\colon X \to X_i$ de i-de projectieafbeelding. De

producttopologie op X is de topologie $\mathcal{T}$ zodanig dat de verzameling

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}U \mid i \in I, U \subseteq X_i \text{ open}\}$$

een subbasis voor $\mathcal{T}$ is.

Evenals in het eindige geval volgt uit de definitie dat $\mathcal{T}$ de grofste topologie op X is waarvoor alle projectieafbeeldingen $p_i\colon X \to X_i$ met $i \in I$ continu zijn.

Opgaven

1. Zij $\sim$ de equivalentierelatie op het eenheidsinterval $[0,1]$ waarvoor geldt $x \sim y$ dan en slechts dan als geldt $x = y$ of $\{x, y\} = \{0, 1\}$. Bewijs dat de continue afbeelding

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

een homeomorfisme van de quotiëntruimte $[0,1]/{\sim}$ naar de cirkel $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ induceert.

2. Zij $\sim$ de equivalentierelatie op $(0, \infty)$ waarvoor geldt $x \sim y$ dan en slechts dan als er een $n \in \mathbf{Z}$ bestaat met $y = 2^n x$. Geef een homeomorfisme van de quotiëntruimte $(0,\infty)/{\sim}$ naar de cirkel S^1.

3. In deze en volgende opgaven is een product $X \times Y$ van topologische ruimten steeds voorzien van de producttopologie $\mathcal{T}_{X\times Y}$.

Zijn X en Y discrete topologische ruimten. Laat zien dat $X \times Y$ discreet is.

4. Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten, zij $\mathcal{B}_X$ een basis voor $\mathcal{T}_X$, en zij $\mathcal{B}_Y$ een basis voor $\mathcal{T}_Y$. Laat zien dat $\{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$ een basis voor de producttopologie $\mathcal{T}_{X\times Y}$ is.

5. Zij X een verzameling, zijn $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ topologieën op X, zij $\mathcal{B}_1$ een basis voor $\mathcal{T}_1$, en zij $\mathcal{B}_2$ een basis voor $\mathcal{T}_2$.

(a) Stel dat er voor alle $x \in X$ en alle $U_1 \in \mathcal{B}_1$ met $x \in U_1$ een $U_2 \in \mathcal{B}_2$ bestaat met $x \in U_2$ en $U_2 \subseteq U_1$. Bewijs dat $\mathcal{T}_2$ fijner dan (of gelijk aan) $\mathcal{T}_1$ is, d.w.z. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

(b) Bewijs dat de producttopologie op $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ gelijk is aan de euclidische topologie op $\mathbf{R}^2$.

6. Zij X een topologische ruimte. Laat zien dat X een Hausdorffruimte is dan en slechts dan als de diagonaal

$$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$$

een gesloten deelverzameling van $X \times X$ is.

7. Zij X een topologische ruimte. Laat zien dat X een Hausdorffruimte is dan en slechts dan als $X \times X$ een Hausdorffruimte is.

8. Zijn X, Y, Z drie topologische ruimten, zijn $p\colon X \times Y \to X$ en $q\colon X \times Y \to Y$ de projectieafbeeldingen en zij $f\colon Z \to X \times Y$ een afbeelding. Laat zien dat f continu is dan en slechts dan als de samenstellingen

$$p \circ f\colon Z \to X, \quad q \circ f\colon Z \to Y$$

continu zijn.

9. Zij V het eenheidsvierkant $[0,1] \times [0,1]$, en zij $\sim$ de equivalentierelatie op V waarvoor geldt $(x,y) \sim (x',y')$ dan en slechts dan als één van de volgende uitspraken geldt:

- $(x,y) = (x',y')$;
- $\{(x,y),(x',y')\} = \{(0,0),(1,1)\}$;
- $\{(x,y),(x',y')\} = \{(0,1),(1,0)\}$;
- er bestaat een $t \in [0,1]$ waarvoor geldt $\{(x,y),(x',y')\} = \{(0,t),(1,t)\}$;
- er bestaat een $t \in [0,1]$ waarvoor geldt $\{(x,y),(x',y')\} = \{(t,0),(t,1)\}$.

Construeer een homeomorfisme van de quotiëntruimte $V/{\sim}$ naar de torus $S^1 \times S^1$.

10. Zij $X = \{0,1\}$ met de discrete topologie, en zij $Y = \prod_{n=0}^{\infty} X$ (de verzameling van rijen in $\{0,1\}$) voorzien van de producttopologie.

(a) Voor alle $n \geq 0$ en $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \{0,1\}$ definiëren we

$$B(s_0, \ldots, s_n) = \{(x_i)_{i \geq 0} \in Y \mid x_0 = s_0, \ldots, x_n = s_n\} \subseteq Y.$$

Laat zien dat deze verzamelingen $B(s_0, \ldots, s_n)$ een basis voor de topologie op Y vormen.

(b) Laat zien dat Y niet discreet is (zonder gebruik te maken van de stelling van Tichonov; zie ook opgave 9.13).

9 Compactheid

Een fundamentele eigenschap van de reële getallen is het volgende feit, dat samenhangt met de volledigheid van $\mathbf{R}$.

Stelling 9.1 (Bolzano–Weierstraß). *Elke begrensde rij in* $\mathbf{R}$ *heeft een convergente deelrij.*

Dit geeft aanleiding tot de volgende definities.

Definitie 9.2 Een metrische ruimte (X, d) is **begrensd** als er een positief reëel getal M bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x, y) < M$.

Definitie 9.3 Een metrische ruimte (X, d) is **rijcompact** als elke rij in X een convergente deelrij heeft.

Stelling 9.4 (Heine–Borel). *Zij X een deelverzameling van* $\mathbf{R}$. *Dan is X rijcompact dan en slechts dan als X gesloten en begrensd is.*

We zullen deze stelling hieronder als gevolg van een algemenere stelling afleiden. Daarnaast willen we de gesloten en begrensde deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ karakteriseren op een manier waarin alleen de topologie en niet de metriek tot uitdrukking komt.

Definitie 9.5 Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een **open overdekking** van X is een deelverzameling $\mathcal{U}$ van $\mathcal{T}$ waarvoor geldt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Definitie 9.6 Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet **compact** als er voor elke open overdekking $\mathcal{U}$ van X een eindige deelverzameling $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ bestaat waarvoor geldt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$.

De definitie van compactheid wordt vaak geformuleerd als "elke open overdekking heeft een eindige deeloverdekking".

Voorbeeld 9.7 Elke eindige topologische ruimte X is compact. Dit volgt direct uit het feit dat X maar eindig veel open verzamelingen heeft.

Voorbeeld 9.8 De topologische ruimte $\mathbf{R}$ is niet compact. Bekijk bijvoorbeeld de open overdekking $\mathcal{U} = \{B_1(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ van $\mathbf{R}$. De vereniging van eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ is begrensd, en is dus niet gelijk aan $\mathbf{R}$; dit betekent dat $\mathcal{U}$ geen eindige deeloverdekking heeft.

Hetzelfde argument laat zien dat elke compacte metrische ruimte begrensd is.

Het begrip compactheid wordt vaak toegepast op deelruimten. Hierbij is de volgende karakterisering nuttig.

Propositie 9.9 *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij S een deelverzameling van X. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) S (gezien als topologische ruimte met de deelruimtetopologie van X) is compact;

(2) voor elke deelverzameling $\mathcal{U}$ van $\mathcal{T}$ met $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ bestaat er een eindige deelverzameling $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ waarvoor geldt $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$.

Bewijs. Dit is af te leiden uit het feit dat de open deelverzamelingen van S precies de verzamelingen van de vorm $U \cap S$ zijn met U een open deelverzameling van X. De details worden als opgave aan de lezer overgelaten. □

We noemen een verzameling S als in de bovenstaande propositie een **compacte deelverzameling** van X. Een verzameling $\mathcal{U}$ als in de propositie heet een **open overdekking** van S (door open verzamelingen van X).

Propositie 9.10 *Zij X een topologische ruimte, en zij Y een topologische deelruimte van X.*

(a) Als X compact is en Y gesloten is in X, dan is Y compact.

(b) Als X een Hausdorffruimte is en Y compact is, dan is Y gesloten in X.

Bewijs.

(a) Zij $\mathcal{U}$ een overdekking van Y door open verzamelingen van X. Omdat Y gesloten is in X, is $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ een open overdekking van X. Wegens de compactheid van X heeft deze open overdekking een eindige deeloverdekking $\mathcal{U}'$. De doorsnede $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ is nu een eindige deelverzameling van $\mathcal{U}$ die Y overdekt.

(b) We bewijzen dat $X \setminus Y$ open is. Zij $x \in X \setminus Y$. Omdat X een Hausdorffruimte is, bestaan er voor alle $y \in Y$ open verzamelingen $U_y, V_y \subseteq X$ waarvoor geldt $x \in U_y$, $y \in V_y$ en $U_y \cap V_y = \emptyset$. De verzameling $\mathcal{V} = \{V_y \mid y \in Y\}$ is een overdekking van Y met open deelverzamelingen van X. Wegens de compactheid van Y is er een eindige deeloverdekking $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$; deze heeft de vorm $\{V_y \mid y \in S\}$ voor een eindige deelverzameling $S \subseteq Y$. Bekijk nu de open verzameling $U = \bigcap_{y \in S} U_y$. Deze U heeft lege doorsnede met V_y voor elke $y \in S$, en dus geldt $U \cap Y = \emptyset$. Hieruit volgt dat U een open omgeving van x is die binnen $X \setminus Y$ ligt.

□

Een nuttige eigenschap van compacte ruimten is dat het beeld van een compacte ruimte onder een continue afbeelding weer compact is.

Propositie 9.11 *Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten, en zij C een compacte deelverzameling van X. Dan is $f(C)$ (met de deelruimtetopologie van Y) compact.*

Bewijs. We mogen aannemen dat geldt $C = X$ en $f(C) = Y$. Zij $\mathcal{V}$ een open overdekking van Y, en zij $\mathcal{U} = \{f^{-1}V \mid V \in \mathcal{V}\}$. Dan is $\mathcal{U}$ een open overdekking van X. Wegens de compactheid van X is er een eindige deeloverdekking $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$. Deze is van de vorm $\mathcal{U}' = \{f^{-1}V \mid V \in \mathcal{V}'\}$ voor een eindige deelverzameling $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$. Als $x \in X$ bevat is in $f^{-1}V$, dan is $f(x)$ bevat in $f(f^{-1}V) \subseteq V$. Hieruit volgt dat $\mathcal{V}'$ een overdekking van Y is. □

Gevolg 9.12 *Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding van een compacte ruimte X naar een Hausdorffruimte Y. Dan is f gesloten.*

Bewijs. Zij $F \subseteq X$ een gesloten deelverzameling. Wegens propositie 9.10(a) is F compact. Uit propositie 9.11 volgt dat $f(F)$ compact is. Tot slot volgt uit propositie 9.10(b) dat $f(F)$ gesloten is in Y. □

Gevolg 9.13 *Zij $f\colon X \to Y$ een bijectieve continue afbeelding van een compacte ruimte X naar een Hausdorffruimte Y. Dan is f een homeomorfisme.*

Bewijs. Wegens propositie 7.10 volstaat het om te bewijzen dat f gesloten is. Dit hebben we echter gezien in gevolg 9.12. □

De volgende herformulering van compactheid is vaak nuttig.

Definitie 9.14 Een topologische ruimte X heeft de **eindige-doorsnijdingseigenschap** als er voor elke collectie $\mathcal{F}$ van gesloten verzamelingen met $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$ een eindige deelverzameling $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ bestaat zodanig dat $\bigcap_{F\in\mathcal{F}'} F = \emptyset$.

Propositie 9.15 *Zij X een topologische ruimte. Dan is X compact dan en slechts dan als X de eindige-doorsnijdingseigenschap heeft.*

Bewijs. Dit volgt uit de definitie door het nemen van complementen. □

Het volgende feit is een bijzonder nuttige eigenschap van compacte ruimten.

Stelling 9.16 *Zij X een niet-lege compacte topologische ruimte, en zij $f\colon X \to \mathbf{R}$ een continue functie. Dan neemt f een maximum en minimum aan op X, d.w.z. er bestaan $a, b \in X$ zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt $f(a) \le f(x) \le f(b)$.*

Bewijs. Omdat X compact is, is $f(X)$ compact wegens propositie 9.11. Uit propositie 9.10(b) volgt nu dat $f(X)$ gesloten is; gezien het eerder opgemerkte feit dat compacte metrische ruimten begrensd zijn, is $f(X)$ begrensd. Omdat X niet-leeg is, geldt hetzelfde voor $f(X)$; dit impliceert dat $f(X)$ een minimaal en een maximaal element heeft. □

We gaan terug naar metrische ruimten.

Definitie 9.17 Zij X een metrische ruimte. We zeggen dat X **totaal begrensd** is als er voor elke $\epsilon > 0$ een eindige overdekking van X bestaat met open ballen van straal ϵ.

De volgende stelling kan gezien worden als een generalisatie van de stelling van Heine–Borel (gebruik dat gesloten en begrensde deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ hetzelfde zijn als volledige en totaal begrensde deelverzamelingen van $\mathbf{R}$).

Stelling 9.18 *Zij (X, d) een metrische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) X is compact;

(2) X is rijcompact;

(3) X is volledig en totaal begrensd.

Bewijs. We bewijzen de implicaties (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2) Neem aan dat X compact is. Zij $(x_n)_{n\ge0}$ een rij in X. We willen een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k\ge0}$ construeren. Voor alle $n \ge 0$ definiëren we F_n als de afsluiting van de verzameling $\{x_m \mid m \ge n\}$. Dan is de doorsnede van eindig veel F_n niet-leeg. Wegens de eindige-doorsnijdingseigenschap is de doorsnede van alle F_n ook niet-leeg. We kiezen een punt $x \in \bigcap_{n\ge0} F_n$. Zij $n_0 = 0$. Voor alle $k \ge 1$ is er wegens het feit dat x in $F_{n_{k-1}+1}$ ligt een $n_k > n_{k-1}$ waarvoor geldt $d(x_{n_k}, x) < 2^{-k}$. De rij $(x_{n_k})_{k\ge0}$ convergeert nu naar x.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Neem aan dat X rijcompact is. Zij $(x_n)_{n\ge0}$ een Cauchyrij in X. Wegens de rijcompactheid heeft $(x_n)_{n\ge0}$ een convergente deelrij. Zij x de limiet van deze deelrij. Dan convergeert ook de hele rij $(x_n)_{n\ge0}$ naar x. Hieruit volgt dat X volledig is.

Stel nu dat X niet totaal begrensd is. Dan is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat X niet overdekt kan worden door eindig veel ballen van straal ϵ. We willen een rij construeren zonder convergente deelrij. Kies $x_0 \in X$. Dan is $B_\epsilon(x_0)$ niet gelijk aan X, dus er bestaat $x_1 \in X \setminus B_\epsilon(x_0)$. Nu is ook $B_\epsilon(x_0) \cup B_\epsilon(x_1)$ niet gelijk aan X, dus er bestaat

$x_2 \in X \setminus (B_\epsilon(x_0) \cup B_\epsilon(x_1))$. Inductief construeren we zo een rij $(x_n)_{n\geq 0}$ die voldoet aan $x_{n+1} \notin B_\epsilon(x_0) \cup \ldots \cup B_\epsilon(x_n)$ voor alle $n \geq 0$. Hieruit volgt dat $(x_n)_{n\geq 0}$ geen deelrij heeft die een Cauchyrij is (twee verschillende punten liggen altijd minstens ϵ van elkaar vandaan), tegenspraak. Dus X is totaal begrensd.

(3) $\Longrightarrow$ **(1)** Neem aan dat X volledig en totaal begrensd is. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X. Stel dat $\mathcal{U}$ geen eindige deeloverdekking heeft. Er bestaat daarentegen wel een eindige overdekking van X met open ballen van straal 1. Omdat $\mathcal{U}$ geen eindige deeloverdekking heeft, is er dus een $x_0 \in X$ zodanig dat $B_1(x_0)$ niet overdekt kan worden door eindig veel open verzamelingen in $\mathcal{U}$. Wel kan X, en dus ook $B_1(x_0)$, overdekt worden met eindig veel open ballen van straal 1/2 in X; er is dus een $x_1 \in X$ zodanig dat $B_1(x_0) \cap B_{1/2}(x_1)$ niet overdekt kan worden door eindig veel open verzamelingen in $\mathcal{U}$. Zo verdergaand construeren we een rij $(x_n)_{n\geq 0}$ in X zodanig dat de open verzameling $V_n = B_1(x_0) \cap \cdots \cap B_{2^{-n}}(x_n)$ in X niet overdekt kan worden door eindig veel open verzamelingen in $\mathcal{U}$. In het bijzonder geldt $d(x_m, x_n) < 2^{-m} + 2^{-n}$ voor alle $m, n \geq 0$, dus $(x_n)_{n\geq 0}$ is een Cauchyrij. Wegens de volledigheid van X heeft deze rij een limiet $x \in X$, en deze voldoet aan $d(x_n, x) \leq 2^{-n}$ voor alle $n \geq 0$. Kies $U \in \mathcal{U}$ met $x \in U$. Dan bestaat er een $\epsilon > 0$ met $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Voor $n \geq 0$ met $2^{1-n} \leq \epsilon$ geldt nu $V_n \subseteq B_{2^{-n}}(x_n) \subseteq B_\epsilon(x) \subseteq U$. In het bijzonder is $\{U\}$ een eindige overdekking van V_n door open verzamelingen in $\mathcal{U}$, een tegenspraak.

□

Compacte topologische ruimten zijn in zekere zin “overzichtelijker” dan algemene topologische ruimten; denk aan het feit dat compacte metrische ruimten volledig en totaal begrensd zijn. Een veel gebruikte techniek om een niet-compacte ruimte X te bestuderen is het “inbedden” van X in een compacte ruimte. Dit heet het *compactificeren* van X en is enigszins vergelijkbaar met het completeren van een metrische ruimte. Voor onze doeleinden beperken we ons tot lokaal compacte Hausdorffruimten X en tot het eenvoudigste type compactificatie.

Definitie 9.19 Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is **lokaal compact** als er voor elke $x \in X$ een (niet noodzakelijk open) omgeving N van x bestaat zodanig dat N compact is.

Voorbeeld 9.20 Compacte ruimten, $\mathbf{R}^n$, discrete ruimten.

Definitie 9.21 Zij $(X, \mathcal{T})$ een lokaal compacte Hausdorffruimte. Een **eenpuntscompactificatie** van $(X, \mathcal{T})$ is een compacte Hausdorffruimte $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ samen met een continue afbeelding $\iota\colon (X, \mathcal{T}) \to (X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ zodanig dat $\iota\colon X \to \iota(X)$ een homeomorfisme is en $X_\infty \setminus \iota(X)$ uit één punt bestaat.

Stelling 9.22 *Zij $(X, \mathcal{T})$ een lokaal compacte Hausdorffruimte. Dan bestaat er een eenpuntscompactificatie $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ van $(X, \mathcal{T})$, en deze is op homeomorfie na uniek bepaald.*

Bewijs. Zij X_∞ de verzameling $X \sqcup \{\infty\}$. We definiëren een topologie $\mathcal{T}_\infty$ op X_∞ door

$$\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T} \cup \{X_\infty \setminus K \mid K \subseteq X \text{ is compact}\}.$$

De collectie van complementen van verzamelingen in $\mathcal{T}_\infty$ is

$$\mathcal{F}_\infty = \{F \cup \{\infty\} \mid F \subseteq X \text{ is gesloten}\} \cup \{K \mid K \subseteq X \text{ is compact}\}.$$

We gaan na dat $\mathcal{T}_\infty$ een topologie is door te bewijzen dat $\mathcal{F}_\infty$ de eigenschappen van de collectie van gesloten verzamelingen heeft. Ten eerste is duidelijk dat geldt $\emptyset, X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$.

Laten $F, F' \in \mathcal{F}_\infty$ gegeven zijn. Als ∞ in $F \cup F'$ ligt, dan is $F \cup F'$ van de vorm $F'' \cup \{\infty\}$ met F'' gesloten (compacte deelverzamelingen van X zijn gesloten omdat X een Hausdorffruimte is). Anders is $F \cup F'$ een vereniging van twee compacte verzamelingen en is dus weer compact.

Zij $\mathcal{G}$ een willekeurige deelverzameling van $\mathcal{F}_\infty$. Als voor alle $F \in \mathcal{G}$ geldt $\infty \in F$, dan is $\bigcap_{F\in\mathcal{G}} F$ van de vorm $F \cup \{\infty\}$ met F gesloten in X. Anders bevat $\mathcal{G}$ een compacte deelverzameling K van X, en geldt

$$\bigcap_{F\in\mathcal{G}} F = \bigcap_{F\in\mathcal{G}} (F \cap K)$$

De verzameling rechts is een doorsnede van gesloten deelverzamelingen van de compacte ruimte K, is dus zelf gesloten in K en is dus een compacte deelverzameling van X.

We bewijzen dat $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ compact is. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X_∞. Dan is er minstens een $U \in \mathcal{U}$ met $\infty \in U$. Zij $K = X_\infty \setminus U$; dan is $X = U \cup K$ en het volstaat te bewijzen dat K een eindige overdekking door elementen van $\mathcal{U}$ heeft. Dit volgt echter uit het feit dat $U \cap X$ open is in X voor elke $U \in \mathcal{T}_\infty$ en K compact is.

We bewijzen dat $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ een Hausdorffruimte is. Zijn $x, y \in X_\infty$ verschillend. Als x en y beide verschillend zijn van ∞, dan bestaan er disjuncte open omgevingen van x en y in X (en dus in X_∞) omdat X een Hausdorffruimte is. We mogen dus aannemen dat $x \in X$ en $y = \infty$. Omdat X lokaal compact is, bestaan er $U \subseteq X$ open en $K \subseteq X$ compact met $x \in U \subseteq K$. Verder is $X_\infty \setminus K$ een open omgeving van ∞ in X_∞. Hiermee zijn U en $X_\infty \setminus K$ disjuncte open omgevingen van x en ∞ in X_∞.

De natuurlijke inbedding $\iota\colon X \to X_\infty$ is een homeomorfisme naar $\iota(X)$ omdat $\{U \cap X \mid U \in \mathcal{T}_\infty\} = \mathcal{T}$.

Om te bewijzen dat $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ op homeomorfismen na uniek is, nemen we aan dat $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ een andere eenpuntscompactificatie is. Dan kunnen we een voor de hand liggende bijectie $f\colon X'_\infty \to X_\infty$ construeren. We merken nu op dat de topologie $\mathcal{T}_\infty$ "minimaal" is in de zin dat voor alle $U \in \mathcal{T}_\infty$ de eis dat $(X'_\infty, \mathcal{T}'_\infty)$ een compacte Hausdorffruimte is, impliceert dat $f^{-1}U$ open is. Dit betekent dat f een continue afbeelding van een compacte ruimte naar een Hausdorffruimte is. Wegens gevolg 9.13 is f een homeomorfisme. □

Compacte topologische ruimten zijn het onderwerp van een van de meest fundamentele stellingen uit de topologie, namelijk de *stelling van Tichonov.* (Alternatieve transliteraties: Tikhonov, Tichonow, Tychonoff enz.)

Stelling 9.23 (Tichonov). *Elk product van compacte topologische ruimten is compact.*

De stelling in deze algemene vorm (voor producten van mogelijk oneindig veel ruimten) is equivalent met het keuzeaxioma. We verwijzen naar appendix A voor een bewijs. We zullen de stelling hieronder voor een product van eindig veel compacte ruimten bewijzen. Door inductie volgt deze versie uit de onderstaande stelling voor een product van twee compacte ruimten.

Stelling 9.24 *Zijn X en Y twee compacte topologische ruimten. Dan is $X \times Y$ compact.*

Bewijs. Zij $\mathcal{W}$ een open overdekking van $X \times Y$. Laten we een deelverzameling $Z \subseteq X \times Y$ *klein* noemen als Z overdekt kan worden door eindig veel verzamelingen in $\mathcal{W}$. We moeten dus bewijzen dat $X \times Y$ klein is. We merken eerst op dat er voor elke $(a, b) \in X \times Y$ een $W \in \mathcal{W}$ is met $(a, b) \in W$, en dat er open verzamelingen $U_{a,b} \subseteq X$ en $V_{a,b} \subseteq Y$ zijn met $(a, b) \in U_{a,b} \times V_{a,b} \subseteq W$. De verzamelingen $U_{a,b} \times V_{a,b}$ met $(a, b) \in X \times Y$ vormen dus een open overdekking van $X \times Y$ door *kleine* deelverzamelingen.

We beweren nu dat er voor elke $a \in X$ een open omgeving U_a van a bestaat zodanig dat $U_a \times Y$ klein is. Aangezien $\{V_{a,b} \mid b \in Y\}$ een open overdekking van Y is en Y compact is, bestaat er een eindige deelverzameling $T_a \subseteq Y$ waarvoor geldt $\bigcup_{b \in T_a} V_{a,b} = Y$. Zij $U_a = \bigcap_{b \in T_a} U_{a,b}$; dan geldt $U_a \times Y \subseteq \bigcup_{b \in T_a} U_{a,b} \times V_{a,b}$, dus $U_a \times Y$ is klein.

De open verzamelingen U_a met $a \in X$ overdekken X. Omdat X compact is, bestaat er een eindige deelverzameling $S \subseteq X$ waarvoor geldt $\bigcup_{a \in S} U_a = X$. We merken nu op dat $X \times Y = \bigcup_{a \in S} U_a \times Y$, dus $X \times Y$ is klein. □

Opgaven

1. Bewijs (zonder stelling 9.18 te gebruiken) dat elke rijcompacte metrische ruimte begrensd is.

2. Bewijs dat elke totaal begrensde metrische ruimte begrensd is.

3. Bepaal voor elk van de volgende metrische ruimten of ze (totaal) begrensd zijn.

(a) $\mathbf{R}$;

(b) (a, b) met $a < b$ in $\mathbf{R}$;

(c) $[a, b]$ met $a < b$ in $\mathbf{R}$;

(d) $(\mathbf{R}, \tilde{d})$ met $\tilde{d}$ de metriek uit opgave 1.11;

(e) $\mathbf{Z}$ met $d(x, x) = 0$ en $d(x, y) = 1$ voor $x \neq y$.

4. Zij $n \geq 0$.

(a) Bewijs dat elke begrensde deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ totaal begrensd is.

(b) Leid uit stelling 9.18 de stelling van Heine–Borel af: een deelverzameling $S \subseteq \mathbf{R}^n$ is (rij)compact dan en slechts dan als S gesloten en begrensd is.

5. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte en zij $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ een basis voor $\mathcal{T}$. Laat zien dat X compact is dan en slechts dan als elke open overdekking $\mathcal{U}$ van X met $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ een eindige deeloverdekking heeft.

6. Laat zien dat het open eenheidsinterval $(0, 1)$ en het gesloten eenheidsinterval $[0, 1]$ niet homeomorf zijn.

7. Zij $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$, en zij d de unieke Franse-spoorwegmetriek op X met centrum 0 en $d(x, 0) = 1$ voor alle $x \neq 0$.

(a) Laat zien dat de metrische ruimte (X, d) volledig is.

(b) Laat zien dat X begrensd is, maar niet totaal begrensd.

(c) Geef een rij in X zonder convergente deelrij.

(d) Geef een open overdekking van X zonder eindige deeloverdekking.

(e) Bepaal alle compacte deelverzamelingen van X.

8. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X met limiet x. Laat zien dat $\{x_0, x_1, x_2 \ldots\} \cup \{x\}$ compact is.

9. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zijn $K_1, \ldots, K_n$ compacte deelverzamelingen van X. Laat zien dat $K_1 \cup \ldots \cup K_n$ compact is.

10. Zij X een Hausdorffruimte.

(a) Zij A een compacte deelverzameling van X, en zij $z \in X \setminus A$. Bewijs dat er disjuncte open verzamelingen $U, V \subseteq X$ bestaan waarvoor geldt $A \subseteq U$ en $z \in V$.

(b) Zijn A en B twee disjuncte compacte deelverzamelingen van X. Bewijs dat er disjuncte open verzamelingen $U, V \subseteq X$ bestaan waarvoor geldt $A \subseteq U$ en $B \subseteq V$.

11. Zijn X en Y niet-lege topologische ruimten. Neem aan dat $X \times Y$ compact is. Bewijs dat X en Y compact zijn.

12. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten. Een afbeelding $f\colon X \to Y$ heet **uniform continu** als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $a, b \in X$ geldt

$$d_X(a, b) < \delta \implies d_Y(f(a), f(b)) < \epsilon.$$

Neem aan dat X compact is. Bewijs dat elke continue afbeelding $f\colon X \to Y$ uniform continu is.

13. Zij $X = \{0, 1\}$ met de discrete topologie, en zij $Y = \prod_{n=0}^{\infty} X$ met de producttopologie. Gebruik de stelling van Tichonov om te bewijzen dat Y niet discreet is. (Zie ook opgave 8.10.)

14. Zij (X, d) een metrische ruimte.

(a) Stel dat X lokaal compact en volledig is. Is X noodzakelijk compact? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(b) Stel dat X lokaal compact en totaal begrensd is. Is X noodzakelijk compact? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

15. Zij $\mathbf{R}_\infty$ een eenpuntscompactificatie van $\mathbf{R}$. Laat zien dat $\mathbf{R}_\infty$ homeomorf is met een cirkel.

16. Zij X een *compacte* Hausdorffruimte. Beschrijf de eenpuntscompactificatie van X.

10 Samenhang en wegsamenhang

De metrische ruimte $\mathbf{R}$ heeft precies twee deelverzamelingen die zowel open als gesloten zijn, namelijk de lege verzameling en $\mathbf{R}$ zelf; zie opgave 1.3. Dit is een eigenschap die bekendstaat als *samenhang* (of *samenhangendheid*).

Definitie 10.1 Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is **samenhangend** als X precies twee deelverzamelingen heeft die zowel open als gesloten zijn.

In het bijzonder wordt $\emptyset$ niet beschouwd als samenhangend. Voor elke topologische ruimte X zijn $\emptyset$ en X zowel open als gesloten, dus X is samenhangend dan en slechts dan als X niet-leeg is en $\emptyset$ en X de enige deelverzamelingen van X zijn die zowel open als gesloten zijn.

Opmerking 10.2 In [Runde, Definition 3.4.7] wordt de lege verzameling wel als samenhangend beschouwd, maar dit is niet de algemeen gangbare conventie.

Voorbeeld 10.3 Een discrete ruimte X is samenhangend dan en slechts dan als X uit precies één punt bestaat.

Propositie 10.4 *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) X is samenhangend;

(2) X is niet leeg, en als U en V open verzamelingen zijn waarvoor geldt $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = X$, dan geldt $U = \emptyset$ of $V = \emptyset$;

(3) er bestaan precies twee continue afbeeldingen van X naar $\{0, 1\}$ (met de discrete topologie), namelijk de constante functie 0 en de constante functie 1.

Bewijs. De equivalentie van (1) en (2) is in te zien door op te merken dat verzamelingen U en V als in (2) zowel open als gesloten zijn, aangezien ze elkaars complement zijn. De equivalentie van (1) en (3) is opgave 10.1. □

Voorbeeld 10.5 Het gesloten eenheidsinterval $[0, 1]$ is samenhangend. Wegens de tussenwaardestelling is elke continue functie $f\colon [0, 1] \to \{0, 1\}$ namelijk constant, dus er bestaan precies twee continue afbeeldingen van $[0, 1]$ naar $\{0, 1\}$.

Propositie 10.6 *Het beeld van een samenhangende ruimte onder een continue afbeelding is samenhangend.*

Bewijs. Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding. Stel dat U en V open deelverzamelingen van $f(X)$ zijn waarvoor geldt $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = f(X)$. Zij $U' = f^{-1}U$ en $V' = f^{-1}V$. Dan geldt $U' \cap V' = \emptyset$ en $U' \cup V' = X$. Omdat X samenhangend is, geldt $U' = \emptyset$ of $V' = \emptyset$. Hieruit volgt $U = \emptyset$ of $V = \emptyset$. We concluderen dat $f(X)$ samenhangend is. □

Een definitie van samenhang die op het eerste gezicht intuïtiever lijkt, is als volgt.

Definitie 10.7 Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is **wegsamenhangend** als X niet leeg is en er voor alle $x, y \in X$ een weg $\gamma\colon [0, 1] \to X$ van x naar y bestaat.

Propositie 10.8 *Het beeld van een wegsamenhangende ruimte onder een continue afbeelding is wegsamenhangend.*

Bewijs. Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding. Gegeven twee punten in $f(X)$, die we kunnen schrijven als $f(x)$ en $f(y)$ met $x, y \in X$, bestaat er wegens de wegsamenhang van X een weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ van x naar y. De afbeelding $f \circ \gamma\colon [0,1] \to f(X)$ is nu een weg van $f(x)$ naar $f(y)$. We concluderen dat $f(X)$ wegsamenhangend is. □

Propositie 10.9 *Elke wegsamenhangende topologische ruimte is samenhangend.*

Bewijs. Stel dat X een wegsamenhangende ruimte is die niet samenhangend is. Dan kunnen we X schrijven als disjuncte vereniging $U \sqcup V$ met U, V open en verschillend van $\emptyset$ en X. De functie

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{voor } x \in U, \\ 1 & \text{voor } x \in V \end{cases} \end{aligned}$$

is continu. Kies $x \in U$ en $y \in V$; dan bestaat er een weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ van x naar y. De functie $g = f \circ \gamma$ is nu echter een continue functie met $g(0) = f(x) = 0$ en $g(1) = f(y) = 1$, hetgeen de samenhang van $[0,1]$ tegenspreekt. □

Samenhang en wegsamenhang zijn niet equivalent. Hieronder geven we een voorbeeld van een topologische ruimte X die wel samenhangend, maar niet wegsamenhangend is. Om te laten zien dat X samenhangend is, hebben we het volgende resultaat nodig.

Propositie 10.10 *Zij X een topologische ruimte, en zij Y een dichte deelverzameling van X die samenhangend is. Dan is X samenhangend.*

Bewijs. Stel dat U, V open deelverzamelingen van X zijn waarvoor geldt $U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = X$. We schrijven $U' = U \cap Y$ en $V' = V \cap Y$. Dan geldt $U' \cap V' = \emptyset$ en $U' \cup V' = Y$. Uit de aanname dat Y samenhangend is, volgt $U' = \emptyset$ of $V' = \emptyset$. Wegens symmetrie mogen we aannemen $V' = \emptyset$. Hieruit volgt $Y \subseteq U$. Omdat Y dicht is in X, impliceert dit $\bar{U} = X$. Aangezien U gesloten is, concluderen we $U = X$. □

Voorbeeld 10.11 Zij Y de verzameling $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$ in $\mathbf{R}^2$, en zij X de afsluiting van Y in $\mathbf{R}^2$. Dan is Y dicht in X, en (als beeld van een continue afbeelding $(0,\infty) \to \mathbf{R}^2$) samenhangend. Wegens propositie 10.10 is ook X samenhangend.

We beweren dat X niet wegsamenhangend is. Zij Z de gesloten deelverzameling $\{0\} \times [-1,1] = \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\}$ van X. Stel dat er een weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ bestaat met $\gamma(0) \in Z$ en $\gamma(1) \in Y$. De deelverzameling $\gamma^{-1}Z$ van $[0,1]$ is gesloten en niet-leeg, en bevat dus een maximaal element a. Uit $\gamma(1) \in Y$ volgt $a < 1$. Door γ te beperken tot $[a,1]$ krijgen we een continue functie $\gamma\colon [a,1] \to X$ met $\gamma(a) \in Z$ en $\gamma((a,1]) \subseteq Y$. Het beeld $\gamma([a,1])$ is compact en dus gesloten en begrensd in $\mathbf{R}^2$. Hieruit is af te leiden dat $\gamma([a,1])$ de verzameling Z bevat. Er geldt echter $\gamma([a,1]) \cap Z = \{\gamma(a)\}$, tegenspraak.

We gaan nu twee manieren bekijken waarop een topologische ruimte op een natuurlijke manier "opgedeeld kan worden": in samenhangscomponenten en in wegsamenhangscomponenten. We beginnen met wegsamenhangscomponenten, omdat deze intuïtief makkelijker te begrijpen zijn.

Gegeven een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ schrijven we $x \sim_{\mathrm{p}} y$ als er een weg van x naar y bestaat. Uit het feit dat wegen omgekeerd en aaneengeschakeld kunnen worden, volgt dat $\sim_{\mathrm{p}}$ een equivalentierelatie op X is.

Definitie 10.12 Zij X een topologische ruimte. Een **wegsamenhangscomponent** van X is een equivalentieklasse voor de equivalentierelatie $\sim_{\mathrm{p}}$ op X. Voor alle $x \in X$ is de **wegsamenhangscomponent van x (in X)** de equivalentieklasse van x met betrekking tot $\sim_{\mathrm{p}}$.

Propositie 10.13 *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Dan is X als verzameling de disjuncte vereniging van de wegsamenhangscomponenten van $(X, \mathcal{T})$.*

Bewijs. Dit volgt uit het feit dat een verzameling door een equivalentierelatie opgedeeld wordt in een disjuncte vereniging van equivalentieklassen. □

Een wegsamenhangscomponent van X is hetzelfde als een maximale wegsamenhangende deelruimte van X, d.w.z. een wegsamenhangende deelruimte $Y \subseteq X$ zodanig dat er geen strikt grotere wegsamenhangende deelruimte $Y' \supset Y$ van X bestaat. De wegsamenhangscomponent van x is de unieke wegsamenhangscomponent van X die x bevat, oftewel de maximale wegsamenhangende deelruimte van X die x bevat.

Voorbeeld 10.14 De wegsamenhangscomponenten van de topologische ruimte X in het voorbeeld na propositie 10.10 zijn Y en Z.

We gaan nu in op de vraag voor welke topologische ruimten de begrippen samenhang en wegsamenhang hetzelfde zijn. We zullen later zien (in propositie 10.22) dat dit het geval is wanneer elk punt van X een wegsamenhangende omgeving heeft. Hiervoor hebben we het volgende resultaat nodig.

Propositie 10.15 *Zij X een topologische ruimte zodanig dat elk punt van X een wegsamenhangende omgeving heeft. Dan is elke wegsamenhangscomponent van X zowel open als gesloten.*

Bewijs. Zij Y een wegsamenhangscomponent van X, en zij $y \in Y$. Per aanname is er een wegsamenhangende omgeving N van y in X. Omdat Y de wegsamenhangscomponent van y is, geldt $N \subseteq Y$. Elke $y \in Y$ heeft dus een omgeving die in Y bevat is, dus Y is open. Uit het feit dat Y het complement is van de vereniging van alle wegsamenhangscomponenten verschillend van Y, en deze zelf open zijn, volgt dat Y gesloten is. □

Een gerelateerde manier om een topologische ruimte in componenten op te delen, is in *samenhangscomponenten*. Deze blijken in veel gevallen hetzelfde te zijn als de wegsamenhangscomponenten. In het algemeen heeft een topologische ruimte X echter "meer" wegsamenhangscomponenten dan samenhangscomponenten, in de zin dat elke samenhangscomponent uit meerdere wegsamenhangscomponenten bestaat.

Definitie 10.16 Zij X een topologische ruimte. Een **samenhangscomponent** van X is een maximale samenhangende deelruimte van X, d.w.z. een samenhangende deelruimte $Y \subseteq X$ zodanig dat er geen strikt grotere samenhangende deelruimte $Y' \supset Y$ van X bestaat.

Lemma 10.17 *Zij X een topologische ruimte, en zij $\mathcal{S}$ een niet-lege collectie samenhangende deelruimten van X zodanig dat voor alle $Y, Y' \in \mathcal{S}$ geldt $Y \cap Y' \neq \emptyset$. Dan is $Z = \bigcup_{Y \in \mathcal{S}} Y$ samenhangend.*

Bewijs. Stel dat Z niet samenhangend is. Aangezien Z per constructie niet leeg is, bestaat er dan een continue, niet-constante functie $f\colon Z \to \{0, 1\}$; zie opgave 10.1. Omdat elke $Y \in \mathcal{S}$ samenhangend is, is f op elke $Y \in \mathcal{S}$ constant. Kies $Y \in \mathcal{S}$ waarop f constant 0 is, en $Y' \in \mathcal{S}$ waarop f constant 1 is. Op de niet-lege doorsnede van Y en Y' is f dan zowel 0 als 1, tegenspraak. □

Stelling 10.18 *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.*

(a) Als verzameling is X de disjuncte vereniging van de samenhangscomponenten van $(X, \mathcal{T})$.

(b) De samenhangscomponenten van $(X, \mathcal{T})$ zijn gesloten.

Bewijs.

(a) We moeten laten zien dat elk punt $x \in X$ in precies één samenhangscomponent van $(X, \mathcal{T})$ ligt. Zij $\mathcal{S}_x$ de collectie van alle samenhangende deelruimten $Y \subseteq X$ met $x \in Y$. Dan is $\mathcal{S}_x$ niet-leeg (er geldt $\{x\} \in \mathcal{S}_x$), en voor alle $Y, Y' \in \mathcal{S}_x$ geldt $x \in Y \cap Y'$. Uit lemma 10.17 volgt dat de verzameling $X_x = \bigcup_{Y \in \mathcal{S}_x} Y$ samenhangend is en dus het unieke maximale element van $\mathcal{S}_x$ is. Dit impliceert dat X_x een samenhangscomponent van $(X, \mathcal{T})$ is. Er bestaat dus een samenhangscomponent van X waar x in ligt. Verder volgt uit lemma 10.17 dat de doorsnede van twee verschillende samenhangscomponenten leeg is. Dit betekent dat X_x de *unieke* samenhangscomponent van X is waar x in ligt.

(b) Zij Z een samenhangscomponent van X. We merken op dat Z dicht is in de afsluiting $\bar{Z}$ van Z in X; wegens propositie 10.10 is $\bar{Z}$ ook samenhangend. Uit de maximaliteit van samenhangscomponenten volgt $\bar{Z} = Z$, dus Z is gesloten.

□

Opmerking 10.19 Stelling 10.18(a) zegt alleen dat X als *verzameling* de disjuncte vereniging van zijn samenhangscomponenten is. De topologie op X is niet altijd gelijk aan de topologie van de disjuncte vereniging van de samenhangscomponenten.

Opmerking 10.20 Het analogon van stelling 10.18(b) geldt niet voor wegsamenhangscomponenten: deze zijn niet automatisch gesloten.

Definitie 10.21 Zij X een topologische ruimte, en zij $x \in X$. De **samenhangscomponent van x (in X)** is de unieke samenhangscomponent van X die x bevat.

Propositie 10.22 *Zij X een topologische ruimte zodanig dat elk punt van X een wegsamenhangende omgeving heeft.*

(a) De samenhangscomponenten van X zijn gelijk aan de wegsamenhangscomponenten van X.

(b) X is samenhangend dan en slechts dan als X wegsamenhangend is.

Bewijs.

(a) Zij Y een wegsamenhangscomponent van X. Dan is Y samenhangend en dus bevat in een unieke samenhangscomponent Z van X. Wegens propositie 10.15 is Y open en gesloten in X, en dus ook in Z. Uit het feit dat Z samenhangend is en Y niet-leeg is, volgt $Y = Z$.

(b) Dit volgt direct uit (a).

□

Verschillende interessante topologische ruimten hebben de eigenschap dat elke samenhangscomponent uit slechts één punt bestaat. Dit motiveert de volgende definitie.

Definitie 10.23 Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet **totaal onsamenhangend** als elke samenhangscomponent van $(X, \mathcal{T})$ uit slechts één punt bestaat, d.w.z. als voor alle $x \in X$ de samenhangscomponent van x gelijk is aan $\{x\}$.

Voorbeeld 10.24 Elke discrete topologische ruimte is totaal onsamenhangend.

Voorbeeld 10.25 De deelruimte $\mathbf{Q}$ van $\mathbf{R}$ is totaal onsamenhangend.

Voorbeeld 10.26 Het product van aftelbaar veel exemplaren van de discrete ruimte $\{0, 1\}$ is totaal onsamenhangend.

(Zie opgave 10.12 voor het bewijs dat de ruimten in bovenstaande voorbeelden totaal onsamenhangend zijn.)

Voorbeeld 10.27 De **Cantorverzameling** is een topologische deelruimte $C \subseteq \mathbf{R}$ die als volgt gedefinieerd is. We schrijven

$$C_0 = [0, 1], \qquad C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1],$$
$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1],$$

enzovoorts; C_{n+1} wordt steeds gemaakt door uit elk van de 2^n intervallen waaruit C_n bestaat het (open) middelste derde deel weg te laten. Vervolgens definiëren we C als de doorsnede van alle C_n voor $n \geq 0$. De verzamelingen C_0, C_1, ..., C_6 zijn in figuur 10.28 weergegeven.

Figuur 10.28 Constructie van de Cantorverzameling.

Zie de opgaven 10.16 en 10.17 voor een aantal eigenschappen van de Cantorverzameling.

De hierboven gegeven definities hebben ook "lokale analoga".

Definitie 10.29 Een topologische ruimte X heet **lokaal samenhangend** (respectievelijk **lokaal wegsamenhangend**) als er voor elke $x \in X$ en elke omgeving N van x een samenhangende (respectievelijk wegsamenhangende) omgeving N' van x bestaat met $N' \subseteq N$.

(Met andere woorden: X is lokaal (weg)samenhangend als $\mathcal{N}_x$ voor elke $x \in X$ een basis heeft die bestaat uit (weg)samenhangende verzamelingen; zie ook [Runde, Definition 3.4.20.])

Gevolg 10.30 *Zij X een lokaal wegsamenhangende topologische ruimte.*

(a) De samenhangscomponenten van X zijn gelijk aan de wegsamenhangscomponenten van X.

(b) X is samenhangend dan en slechts dan als X wegsamenhangend is.

Bewijs. Omdat X lokaal wegsamenhangend is, heeft elk punt van X een wegsamenhangende omgeving. Beide beweringen volgen nu uit propositie 10.22. □

Propositie 10.31 *Zij X een lokaal samenhangende topologische ruimte.*

(a) Elke open deelverzameling $U \subseteq X$ (voorzien van de deelruimtetopologie) is lokaal

samenhangend.

(b) Elke samenhangscomponent van X is open in X.

Bewijs.

(a) Zij $x \in U$, en zij N een omgeving van x in U. Omdat U open is in X, is N ook een omgeving van x in X. Aangezien X lokaal samenhangend is, bestaat er een samenhangende omgeving N' van x in X met $N' \subseteq N$. Deze N' is tevens een samenhangende omgeving van x in U.

(b) Zij Y een samenhangscomponent van X. Omdat X lokaal samenhangend is, heeft elke $y \in Y$ een samenhangende omgeving N_y in X. Omdat Y een samenhangscomponent van X is, geldt $N_y \subseteq Y$. We zien dus dat Y de vereniging is van de verzamelingen N_y voor $y \in Y$. Hieruit volgt dat Y open is in X.

□

Propositie 10.32 *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) X is lokaal samenhangend;

(2) $\mathcal{T}$ heeft een basis die bestaat uit samenhangende verzamelingen.

Bewijs. De implicatie (2) $\Longrightarrow$ (1) is eenvoudig na te gaan. We bewijzen (1) $\Longrightarrow$ (2). Zij $x \in X$, en zij U een open omgeving van x. Wegens propositie 10.31(a) is U lokaal samenhangend. Zij V de samenhangscomponent van x in U. Dan is V open in U wegens propositie 10.31(b). Aangezien U open is in X, is V ook open in X, dus V is een samenhangende open omgeving van x in X met $V \subseteq U$. Hieruit volgt dat $\mathcal{T}$ een basis heeft die bestaat uit samenhangende verzamelingen. □

Propositie 10.33 *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) X is lokaal wegsamenhangend;

(2) $\mathcal{T}$ heeft een basis die bestaat uit wegsamenhangende verzamelingen.

Bewijs. We bewijzen (1) $\Longrightarrow$ (2); het bewijs van de implicatie (2) $\Longrightarrow$ (1) wordt aan de lezer overgelaten. Stel dat X lokaal wegsamenhangend is. Zij U een open deelverzameling van X. Dan bestaat er voor elke $x \in U$ een wegsamenhangende open omgeving V_x van x die bevat is in U, en de open verzameling U is de vereniging van de wegsamenhangende deelverzamelingen V_x. Hieruit volgt dat $\mathcal{T}$ een basis heeft die bestaat uit wegsamenhangende verzamelingen. □

Opgaven

1. Laat zien dat een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ samenhangend is dan en slechts dan als er precies twee continue afbeeldingen van $(X, \mathcal{T})$ naar $\{0, 1\}$ zijn; hier heeft $\{0, 1\}$ de discrete topologie.

2. In deze opgave bewijzen we dat $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^2$ niet homeomorf zijn. Zij $P \in \mathbf{R}$ en $Q \in \mathbf{R}^2$.

(a) Laat zien dat $\mathbf{R} \setminus \{P\}$ niet samenhangend is.

(b) Laat zien dat $\mathbf{R}^2 \setminus \{Q\}$ wel samenhangend is.

(c) Concludeer dat $\mathbf{R} \setminus \{P\}$ en $\mathbf{R}^2 \setminus \{Q\}$ niet homeomorf zijn.

(d) Leid uit (c) af dat $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^2$ niet homeomorf zijn.

3. Laat zien dat de volgende topologische ruimten wegsamenhangend zijn:

(a) de ruimte $X = \{p, q\}$ voorzien van de topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$;

(b) de eenheidscirkel $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(c) de eenheidsbol $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

4. Zij X een topologische ruimte, en zijn $A, B \subseteq X$ wegsamenhangende deelverzamelingen zodanig dat $A \cap B$ niet-leeg is.

(a) Is $A \cap B$ noodzakelijk wegsamenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(b) Is $A \cup B$ noodzakelijk wegsamenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

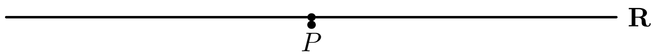
5. Zij X de verzameling $\mathbf{R} \cup \{P\}$ (met $P \notin \mathbf{R}$) voorzien van de topologie $\mathcal{T}$ waarvan een basis $\mathcal{B}$ gegeven wordt door

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{&U \mid U \text{ is open in } \mathbf{R}\} \\ &\cup \{(U \setminus \{0\}) \cup \{P\} \mid U \text{ is een open omgeving van 0 in } \mathbf{R}\}.\end{aligned}$$

Dit is een “lijn met een verdubbeld punt”; zie figuur 10.34.

(a) Laat zien dat X geen Hausdorffruimte is.

(b) Laat zien dat X wegsamenhangend is.



Figuur 10.34 Lijn met een verdubbeld punt.

6. Zijn X en Y topologische ruimten.

(a) Bewijs dat $X \times Y$ wegsamenhangend is dan en slechts dan als X en Y het zijn.

(b) Bewijs dat $X \times Y$ samenhangend is dan en slechts dan als X en Y het zijn. (Aanwijzing: gebruik continue functies naar $\{0, 1\}$.)

7. Beschrijf voor elk van de volgende topologische ruimten (met de voor de hand liggende topologie, tenzij anders vermeld) de samenhangscomponenten:

(a) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$;

(b) een triviale topologische ruimte X;

(c) een discrete topologische ruimte X;

(d) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{Z} \text{ of } y \in \mathbf{Z}\}$;

(e) $\mathbf{C}$ met de co-eindige topologie (= Zariskitopologie; de gesloten verzamelingen zijn de eindige verzamelingen en $\mathbf{C}$ zelf);

(f) $\mathbf{Q}$;

(g) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$;

(h) $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Q}^2$.

Zijn deze samenhangscomponenten tevens de wegsamenhangscomponenten?

8. Zij X een topologische ruimte die slechts eindig veel samenhangscomponenten heeft. Bewijs dat de samenhangscomponenten zowel open als gesloten zijn.

9. Zij X een deelverzameling van $\mathbf{R}^n$. We zeggen dat X **convex** is als voor alle $x, y \in X$ het lijnsegment dat x en y verbindt in X bevat is, d.w.z. voor alle $t \in [0,1]$ geldt

$$(1-t)x + ty \in X.$$

Zij $\mathcal{C}$ een collectie convexe deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$.

(a) Is $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ noodzakelijk convex? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(b) Is $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ noodzakelijk convex? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

10. Zij X een deelverzameling van $\mathbf{R}^n$. We zeggen dat X **stervormig** is als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in X$ en alle $t \in [0,1]$ geldt

$$x_0 + t(x - x_0) \in X.$$

(a) Bewijs dat elke niet-lege convexe deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ stervormig is.

(b) Geef een voorbeeld van een deelverzameling van $\mathbf{R}^2$ die wel stervormig, maar niet convex is.

(c) Laat zien dat elke stervormige deelruimte van $\mathbf{R}^n$ wegsamenhangend is.

11. Zij X een topologische ruimte, en zij $\mathcal{F}$ de verzameling van alle continue functies $f\colon X \to \{0,1\}$, waarbij $\{0,1\}$ de discrete topologie heeft. Zij $\sim_{\mathrm{q}}$ de relatie op X gedefinieerd als volgt: $x \sim_{\mathrm{q}} y$ dan en slechts dan als voor alle $f \in \mathcal{F}$ geldt $f(x) = f(y)$.

(a) Laat zien dat $\sim_{\mathrm{q}}$ een equivalentierelatie op X is.

(b) Zij $x \in X$. Zij P_x de wegsamenhangscomponent van x, zij C_x de samenhangscomponent van x, en zij Q_x de equivalentieklasse van x onder $\sim_{\mathrm{q}}$. Bewijs de inclusies $P_x \subseteq C_x \subseteq Q_x$.

Een **quasicomponent** van X (respectievelijk de **quasicomponent van** $x \in X$) is een equivalentieklasse van $\sim_{\mathrm{q}}$ (respectievelijk de klasse die x bevat).

12. Bewijs dat de onderstaande topologische ruimten totaal onsamenhangend zijn:

(a) elke discrete topologische ruimte;

(b) $\mathbf{Q}$ met de deelruimtetopologie van $\mathbf{R}$;

(c) $\prod_{n\geq 1}\{0,1\}$ met de producttopologie ($\{0,1\}$ heeft de discrete topologie).

13. Zijn X en Y topologische ruimten met X samenhangend en Y totaal onsamenhangend. Bewijs dat elke continue afbeelding $X \to Y$ constant is.

14. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Stel dat er voor elk tweetal verschillende punten $x, y \in X$ een continue functie $f\colon X \to \{0,1\}$ bestaat die voldoet aan $f(x) = 0$ en $f(y) = 1$. Laat zien dat $(X, \mathcal{T})$ een totaal onsamenhangende Hausdorffruimte is.

15. Zij Y de deelruimte $\{1/n \mid n \in \{1,2,3,\ldots\}\} \cup \{0, P\}$ van de lijn met een verdubbeld punt (de topologische ruimte X uit opgave 10.5).

(a) Laat zien dat Y totaal onsamenhangend is.

(b) Laat zien dat Y een quasicomponent heeft die uit twee punten bestaat.

16. Zij $C \subseteq \mathbf{R}$ de Cantorverzameling (zie voorbeeld 10.27). In deze opgave bestuderen we eigenschappen van C.

(a) Laat zien dat C compact is.

(b) Laat zien dat C totaal onsamenhangend is.

(c) Laat zien dat het inwendige van C in $\mathbf{R}$ leeg is.

(d) Laat zien dat C gelijk is aan de verzameling reële getallen die geschreven kunnen worden als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ met $a_n \in \{0, 2\}$ voor alle $n \geq 1$.

(e) Leid uit (d) af dat C dezelfde kardinaliteit als $\mathbf{R}$ heeft.

17. Zij $X = \prod_{n \geq 1} \{0, 2\}$, waar $\{0, 2\}$ de discrete topologie heeft en X de producttopologie. Het doel van deze opgave is om te laten zien dat de Cantorverzameling C homeomorf is met X.

(a) Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow C \\ (a_n)_{n \geq 1} &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \end{aligned}$$

continu en bijectief is.

(b) Leid uit (a) af dat C en X homeomorf zijn. (Aanwijzing: C en X zijn compacte Hausdorffruimten.)

18. Zij X een lokaal samenhangende topologische ruimte, en zij $Y \subseteq X$ een deelruimte. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1) Y is een vereniging van samenhangscomponenten van X;

(2) er bestaat een continue functie $f \colon X \to \{0, 1\}$ zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \in Y, \\ 1 & \text{voor } x \notin Y. \end{cases}$$

19. Laat zien dat de samenhangende topologische ruimte

$$X = \{(x, \sin(1/x) \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

niet lokaal samenhangend is.

11 Homotopie en weghomotopie

Het begrip *homotopie* betekent intuïtief dat twee continue afbeeldingen $f, g\colon X \to Y$ “in elkaar vervormd kunnen worden”.

Definitie 11.1 Zijn X en Y twee topologische ruimten, en zijn $f, g\colon X \to Y$ twee continue afbeeldingen. Een **homotopie** van f naar g is een continue afbeelding

$$F\colon [0,1] \times X \to Y$$

(waarbij $[0,1] \times X$ voorzien is van de producttopologie) zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt

$$F(0,x) = f(x) \quad \text{en} \quad F(1,x) = g(x).$$

We zeggen dat f en g **homotoop** zijn, notatie $f \sim g$, als er een homotopie van f naar g bestaat.

Gegeven twee topologische ruimten X en Y schrijven we $C(X, Y)$ voor de verzameling van alle continue afbeeldingen $X \to Y$.

Propositie 11.2 *De homotopierelatie $\sim$ op $C(X, Y)$ is een equivalentierelatie.*

Bewijs. Elke continue afbeelding $f\colon X \to Y$ is homotoop met zichzelf via de homotopie

$$\begin{aligned} F\colon [0,1] \times X &\longrightarrow Y \\ (t,x) &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Dit betekent dat $\sim$ reflexief is. Als $F\colon [0,1] \times X \to Y$ een homotopie van f naar g is, dan is de afbeelding

$$\begin{aligned} G\colon [0,1] \times X &\longrightarrow Y \\ (t,x) &\longmapsto F(1-t,x) \end{aligned}$$

een homotopie van g naar f. Dit betekent dat $\sim$ symmetrisch is. Zij $F\colon [0,1] \times X \to Y$ een homotopie van f naar g, en zij $G\colon [0,1] \times X \to Y$ een homotopie van g naar h. Dan is

$$\begin{aligned} H\colon [0,1] \times X &\longrightarrow Y \\ (t,x) &\longmapsto \begin{cases} F(2t,x) & \text{voor } t \in [0,1/2], \\ G(2t-1,x) & \text{voor } t \in [1/2,1] \end{cases} \end{aligned}$$

een homotopie van f naar h. Dit betekent dat $\sim$ transitief is. $\square$

Voorbeeld 11.3 De twee afbeeldingen $f, g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = (x,y) \quad \text{en} \quad g(x,y) = (0,0)$$

zijn homotoop via de homotopie

$$F(t,(x,y)) = (1-t)(x,y).$$

Voorbeeld 11.4 Bekijk de eenheidscirkel

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

en de eenheidsbol

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

De twee afbeeldingen $f, g\colon S^1 \to S^2$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = (0,0,1) \quad \text{en} \quad g(x,y) = (x,y,0)$$

zijn homotoop via de homotopie

$$\begin{aligned} F\colon [0,1] \times S^1 &\longrightarrow S^2 \\ (t,(x,y)) &\longmapsto (tx, ty, \sqrt{1-t^2}). \end{aligned}$$

Naast het begrip homeomorfisme, dat zegt wanneer twee ruimten “topologisch hetzelfde” zijn, voeren we nu een flexibelere manier in om topologische ruimten met elkaar te vergelijken, en wel door middel van homotopieën tussen continue afbeeldingen.

Definitie 11.5 Zijn X en Y topologische ruimten. Een **homotopie-equivalentie** van X naar Y is een continue afbeelding

$$f\colon X \to Y$$

zodanig dat er een continue afbeelding $g\colon Y \to X$ bestaat waarvoor $g \circ f$ (respectievelijk $f \circ g$) homotoop is met de identiteit op X (respectievelijk Y).

Als $f\colon X \to Y$ een homotopie-equivalentie is, dan is een afbeelding $g\colon Y \to X$ als in de bovenstaande definitie duidelijk ook een homotopie-equivalentie. Verder is de samenstelling van twee homotopie-equivalenties weer een homotopie-equivalentie; zie hiervoor opgave 11.6.

Definitie 11.6 Twee topologische ruimten X en Y worden **homotopie-equivalent** genoemd als er een homotopie-equivalentie van X naar Y bestaat.

Voorbeeld 11.7 Zij $f\colon X \to Y$ een homeomorfisme. Dan is f een homotopie-equivalentie. In de definitie van homotopie-equivalenties kunnen we namelijk $g = f^{-1}$ nemen; dan is $g \circ f$ (respectievelijk $f \circ g$) niet slechts homotoop, maar zelfs gelijk aan de identiteit op X (respectievelijk Y).

Voorbeeld 11.8 Zij $X = \mathbf{R}^n$, en zij $Y = \{0\}$. Bekijk de afbeeldingen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbf{R}^n &\to \{0\} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} g\colon \{0\} &\to \mathbf{R}^n \\ 0 &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Dan is $g \circ f$ homotoop met de identiteit op $\mathbf{R}^n$ (zie het voorbeeld na propositie 11.2), en $f \circ g$ is de identiteit op $\{0\}$. Hieruit volgt dat f en g homotopie-equivalenties zijn en dat $\mathbf{R}^n$ en $\{0\}$ homotopie-equivalent zijn.

Voorbeeld 11.9 Zij $X = S^1$, en zij $Y = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Bekijk de afbeeldingen

$$\begin{aligned} f\colon S^1 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \\ (x,y) &\longmapsto (x,y) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} g\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow S^1 \\ (x,y) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y). \end{aligned}$$

Dan is $g \circ f$ gelijk aan de identiteit op S^1, en $f \circ g$ is homotoop met de identiteit op $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$

via de homotopie

$$\begin{aligned} F\colon [0,1] \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \\ (t,(x,y)) &\longmapsto \frac{1}{t + (1-t)\sqrt{x^2+y^2}}(x,y). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat f en g homotopie-equivalenties zijn en dat S^1 en $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ homotopie-equivalent zijn.

Definitie 11.10 Een topologische ruimte X heet **samentrekbaar** als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat de constante afbeelding $f_0\colon X \to X$ met beeld $\{x_0\}$ homotoop is met de identiteit op X.

Lemma 11.11 *Een topologische ruimte X is samentrekbaar dan en slechts dan als X homotopie-equivalent is met de eenpuntsruimte $\{0\}$.*

Bewijs. Zie opgave 11.5. □

Een belangrijk soort continue afbeeldingen zijn wegen $[0,1] \to X$. Het hierboven gedefinieerde begrip homotopie is echter niet erg zinvol voor wegen. Als $\gamma\colon [0,1] \to X$ namelijk een willekeurige weg is, dan is γ homotoop met de constante weg $s \mapsto \gamma(0)$ via de homotopie

$$\begin{aligned} F\colon [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow X \\ (t,s) &\longmapsto \gamma((1-t)s). \end{aligned}$$

Om deze reden voeren we een gerelateerde definitie in die geschikter is voor wegen in X.

Zij X een topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten. We schrijven $P(X; x_0, x_1)$ voor de verzameling van alle wegen van x_0 naar x_1.

Definitie 11.12 Zij X een topologische ruimte, zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten, en zijn $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0, x_1)$ twee wegen van x_0 naar x_1. Een **weghomotopie** van γ naar γ' is een continue afbeelding

$$\Gamma\colon [0,1] \times [0,1] \to X$$

zodanig dat voor alle $s, t \in [0,1]$ geldt

$$\begin{aligned} \Gamma(0,s) &= \gamma(s), \quad \Gamma(1,s) = \gamma'(s), \\ \Gamma(t,0) &= x_0, \quad \Gamma(t,1) = x_1. \end{aligned}$$

We zeggen dat γ en γ' **weghomotoop** zijn, notatie $\gamma \simeq \gamma'$, als er een weghomotopie van γ naar γ' bestaat.

Propositie 11.13 *Zij X een topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten. Dan is de weghomotopierelatie $\simeq$ op de verzameling $P(X; x_0, x_1)$ een equivalentierelatie.*

Bewijs. Dit gaat op dezelfde manier als het bewijs van propositie 11.2. □

Lemma 11.14 *Zij X een topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1, x_2 \in X$ drie punten. Stel dat $\gamma_0, \gamma_0' \in P(X; x_0, x_1)$ en $\gamma_1, \gamma_1' \in P(X; x_1, x_2)$ wegen zijn waarvoor geldt $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ en $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$. Dan zijn de aaneenschakelingen $\gamma_0 \odot \gamma_1$ en $\gamma_0' \odot \gamma_1'$ in $P(X; x_0, x_2)$ weghomotoop.*

Bewijs. Zij Γ_0 een weghomotopie van γ_0 naar γ_0', en zij Γ_1 een weghomotopie van γ_1 naar γ_1'.

We bekijken de afbeelding

$$\begin{aligned}\Gamma\colon [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow X\\ (t,s) &\longmapsto \begin{cases}\Gamma_0(t,2s) & \text{voor } s\in[0,1/2],\\ \Gamma_1(t,2s-1) & \text{voor } s\in[1/2,1].\end{cases}\end{aligned}$$

Dan is Γ continu, en door $t=0$ en $t=1$ in te vullen, zien we dat Γ een weghomotopie van $\gamma_0\odot\gamma_1$ naar $\gamma_0'\odot\gamma_1'$ is. □

Een belangrijk voorbeeld van weghomotopie is herparametrisatie van wegen (verandering van variabelen).

Lemma 11.15 *Zij X een topologische ruimte, en zij $\gamma\colon[0,1]\to X$ een weg. Bekijk twee continue functies*

$$\phi_0,\phi_1\colon[0,1]\to[0,1]$$

zodanig dat voor zekere $s_0,s_1\in[0,1]$ geldt

$$\phi_0(0)=\phi_1(0)=s_0,\quad \phi_0(1)=\phi_1(1)=s_1.$$

Dan zijn de "geherparametriseerde wegen" $\gamma\circ\phi_0$ en $\gamma\circ\phi_1$ in $P(X;\gamma(s_0),\gamma(s_1))$ weghomotoop.

Bewijs. Dit is intuïtief duidelijk: het enige verschil tussen de wegen $\gamma\circ\phi_0$ en $\gamma\circ\phi_1$ is dat ze met een andere snelheid doorlopen worden. We bekijken de functie

$$\begin{aligned}\Gamma\colon[0,1]\times[0,1] &\longrightarrow X\\ (t,s) &\longmapsto \gamma((1-t)\phi_0(s)+t\phi_1(s)).\end{aligned}$$

Er geldt

$$\begin{aligned}\Gamma(0,s)&=\gamma(\phi_0(s))=(\gamma\circ\phi_0)(s), & \Gamma(1,s)&=\gamma(\phi_1(s))=(\gamma\circ\phi_1)(s),\\ \Gamma(t,0)&=\gamma(s_0), & \Gamma(t,1)&=\gamma(s_1).\end{aligned}$$

Dit laat zien dat Γ een weghomotopie van $\gamma\circ\phi_0$ naar $\gamma\circ\phi_1$ is. □

Opgaven

1. Zij X een topologische ruimte. Laat zien dat X wegsamenhangend is dan en slechts dan als elk tweetal afbeeldingen van de eenpuntsruimte $\{0\}$ naar X homotoop is.

2. Zij X een wegsamenhangende topologische ruimte. Laat zien dat elk tweetal wegen $[0,1]\to X$ homotoop is. (Aanwijzing: laat eerst zien dat elke weg in X homotoop is met een constante weg.)

3.

(a) Laat zien dat de twee afbeeldingen $f,g\colon\mathbf{C}^\times\to\mathbf{C}^\times$ gedefinieerd door

$$f(z)=z\quad\text{en}\quad g(z)=z/|z|$$

homotoop zijn.

(b) Idem voor de twee afbeeldingen $f,g\colon\mathbf{C}^\times\to\mathbf{C}^\times$ gedefinieerd door

$$f(z)=\bar z\quad\text{en}\quad g(z)=1/z.$$

4. Zij X een topologische ruimte, zij $n \geq 0$, en zij $f\colon \mathbf{R}^n \to X$ een continue afbeelding. Bewijs dat f homotoop is met een constante afbeelding $\mathbf{R}^n \to X$.

5. Zij X een topologische ruimte. Laat zien dat X samentrekbaar is dan en slechts dan als X homotopie-equivalent is met de eenpuntsruimte $\{0\}$.

6. Zijn X, Y en Z topologische ruimten.

(a) Stel dat afbeeldingen $f, f' \in C(X,Y)$ en $g, g' \in C(Y,Z)$ gegeven zijn die voldoen aan $f \sim f'$ en $g \sim g'$. Laat zien dat de afbeeldingen $g \circ f$ en $g' \circ f'$ in $C(X,Z)$ voldoen aan $g \circ f \sim g' \circ f'$.

(b) Stel dat $f \in C(X,Y)$ en $g \in C(Y,Z)$ homotopie-equivalenties zijn. Laat zien dat $g \circ f \in C(X,Z)$ een homotopie-equivalentie is.

7. Gegeven twee topologische ruimten X en Y definiëren we de verzameling van **homotopieklassen van continue afbeeldingen van** X **naar** Y, notatie $H(X,Y)$, als de quotiëntverzameling

$$H(X,Y) = C(X,Y)/{\sim}.$$

Voor $f \in C(X,Y)$ noteren we de klasse van f in $H(X,Y)$ met $\langle f \rangle$.

Zijn X, Y en Z topologische ruimten. Bewijs dat er een unieke afbeelding

$$H(Y,Z) \times H(X,Y) \xrightarrow{*} H(X,Z)$$

van verzamelingen bestaat zodanig dat voor alle $f \in C(X,Y)$ en $g \in C(Y,Z)$ geldt

$$\langle g \rangle * \langle f \rangle = \langle g \circ f \rangle.$$

12 De fundamentaalgroep

Het blijkt bijzonder nuttig te zijn om wegen van een punt naar zichzelf te bekijken. Dit geeft aanleiding tot een belangrijke "invariant" van een topologische ruimte, de *fundamentaalgroep*. Om deze te kunnen introduceren, hebben we nog enkele hulpresultaten nodig. Hieronder is X steeds een topologische ruimte.

Lemma 12.1 *Zijn $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$ vier punten. Voor elk drietal wegen*

$$\gamma_0 \in P(X; x_0, x_1), \quad \gamma_1 \in P(X; x_1, x_2), \quad \gamma_2 \in P(X; x_2, x_3)$$

zijn de wegen $(\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2$ en $\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2)$ weghomotoop.

Bewijs. We geven eerst de vergelijkingen voor de wegen in kwestie:

$$((\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2)(s) = \begin{cases} \gamma_0(4s) & \text{voor } 0 \le s \le 1/4, \\ \gamma_1(4s-1) & \text{voor } 1/4 \le s \le 1/2, \\ \gamma_2(2s-1) & \text{voor } 1/2 \le s \le 1, \end{cases}$$

$$(\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2))(s) = \begin{cases} \gamma_0(2s) & \text{voor } 0 \le s \le 1/2, \\ \gamma_1(4s-2) & \text{voor } 1/2 \le s \le 3/4, \\ \gamma_2(4s-3) & \text{voor } 3/4 \le s \le 1. \end{cases}$$

We passen lemma 11.15 toe met

$$\gamma = (\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2$$

en

$$\phi_0(s) = s, \quad \phi_1(s) = \begin{cases} s/2 & \text{voor } 0 \le s \le 1/2, \\ s - 1/4 & \text{voor } 1/2 \le s \le 3/4, \\ 2s-1 & \text{voor } 3/4 \le s \le 1. \end{cases}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \phi_0)(s) &= \gamma(s) \\ &= ((\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2)(s), \\ (\gamma \circ \phi_1)(s) &= \begin{cases} \gamma(s/2) = \gamma_0(2s) & \text{voor } 0 \le s \le 1/2, \\ \gamma(s-1/4) = \gamma_1(4s-2) & \text{voor } 1/2 \le s \le 3/4, \\ \gamma(2s-1) = \gamma_2(4s-3) & \text{voor } 3/4 \le s \le 1 \end{cases} \\ &= (\gamma_0 \odot (\gamma_1 \circ \gamma_2))(s). \end{aligned}$$

We zien dus dat $(\gamma_0 \odot \gamma_1) \odot \gamma_2$ en $\gamma_0 \odot (\gamma_1 \odot \gamma_2)$ herparametrisaties van elkaar zijn, en daarmee weghomotoop zijn. □

Lemma 12.2 *Zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten, en zij $\gamma \in P(X; x_0, x_1)$ een weg. We schrijven γ_0 en γ_1 voor de constante wegen $s \mapsto x_0$ respectievelijk $s \mapsto x_1$. Dan geldt*

$$\gamma \simeq \gamma_0 \odot \gamma \simeq \gamma \odot \gamma_1.$$

Bewijs. We nemen

$$\phi_0(s) = s,$$
$$\phi_1(s) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \le s \le 1/2, \\ 2s-1 & \text{voor } 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \phi_0)(s) &= \gamma(s), \\ (\gamma \circ \phi_1)(s) &= \begin{cases} \gamma(0) = s_0 = \gamma_0(2s) & \text{voor } 0 \le s \le 1/2, \\ \gamma(2s-1) & \text{voor } 1/2 \le s \le 1 \end{cases} \\ &= (\gamma_0 \odot \gamma)(s). \end{aligned}$$

Dit laat zien dat γ en $\gamma_0 \odot \gamma$ weghomotoop zijn. Het bewijs dat γ en $\gamma \odot \gamma_1$ weghomotoop zijn, gaat net zo. □

Lemma 12.3 *Zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten, zij $\gamma \in P(X; x_0, x_1)$ een weg, en zij $\gamma^{-1} \in P(X; x_1, x_0)$ de omkering van γ. We schrijven γ_0 en γ_1 voor de constante wegen $s \mapsto x_0$ respectievelijk $s \mapsto x_1$. Dan geldt*

$$\gamma \odot \gamma^{-1} \simeq \gamma_0 \quad \textit{en} \quad \gamma^{-1} \odot \gamma \simeq \gamma_1.$$

Bewijs. We nemen

$$\phi_0(s) = 0,$$
$$\phi_1(s) = \begin{cases} 2s & \text{voor } 0 \le s \le 1/2, \\ 2-2s & \text{voor } 1/2 \le s \le 1. \end{cases}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \phi_0)(s) &= \gamma(0) \\ &= \gamma_0(s), \\ (\gamma \circ \phi_1)(s) &= \begin{cases} \gamma(2s) & \text{voor } 0 \le s \le 1/2, \\ \gamma(2-2s) = \gamma^{-1}(2s-1) & \text{voor } 1/2 \le s \le 1 \end{cases} \\ &= (\gamma \odot \gamma^{-1})(s). \end{aligned}$$

Dit laat zien dat γ_0 en $\gamma \odot \gamma^{-1}$ weghomotoop zijn. Het bewijs dat γ_1 en $\gamma^{-1} \odot \gamma$ weghomotoop zijn, gaat net zo. □

Definitie 12.4 Zij X een topologische ruimte. Een weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ heet een **lus** als geldt $\gamma(0) = \gamma(1)$. Het punt $\gamma(0) = \gamma(1)$ heet het **basispunt** van γ.

Zij X een topologische ruimte, en zij $x_0 \in X$. We schrijven $P(X; x_0)$ voor de verzameling van alle lussen met basispunt x_0, en $\pi_1(X, x_0)$ voor het quotiënt van $P(X; x_0)$ naar de equivalentierelatie $\simeq$.

Stelling 12.5 *Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$,*

(a) Er bestaat een unieke afbeelding

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ (\lambda, \lambda') &\longrightarrow \lambda \cdot \lambda' \end{aligned}$$

zodanig dat voor alle $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0)$ geldt

$$[\gamma] \cdot [\gamma'] = [\gamma \odot \gamma'].$$

(b) *De verzameling $\pi_1(X, x_0)$ voorzien van de bewerking $\cdot$ is een groep. Het eenheidselement van $\pi_1(X, x_0)$ is de klasse van de constante lus $\gamma_0\colon s \mapsto x_0$, en de inverse van $[\gamma]$ is $[\gamma^{-1}]$.*

Bewijs. Voor (a) moeten we bewijzen dat de weghomotopieklasse van $\gamma \odot \gamma'$ niet verandert als we γ en γ' vervangen door lussen die daarmee weghomotoop zijn. Dit volgt echter uit lemma 11.14. De eigenschappen in (b) volgen uit de lemma's 12.1, 12.2 en 12.3. □

Definitie 12.6 De **fundamentaalgroep** van X met betrekking tot het basispunt x_0 is $\pi_1(X, x_0)$.

Voorbeeld 12.7 Zij $X = \{p\}$ een eenpuntsruimte. Dan zijn alle wegen in X gelijk, dus $P(X; p)$ en $\pi_1(X, p)$ hebben beide slechts één element. Met andere woorden: X heeft triviale fundamentaalgroep.

Propositie 12.8 *Zij X een wegsamenhangende topologische ruimte, en zijn $x_0, x_1 \in X$ twee punten. Dan bestaat er een groepsisomorfisme $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)$.*

Bewijs. Zie opgave 12.5. □

Opmerking 12.9 Uit de constructie in de opgave volgt dat een isomorfisme als boven in het algemeen niet uniek is, maar afhangt van de keuze van een weg van x_0 naar x_1.

Definitie 12.10 Een topologische ruimte X heet **enkelvoudig samenhangend** als X wegsamenhangend is en de groep $\pi_1(X, x_0)$ triviaal is (voor een willekeurig gekozen $x_0 \in X$; de keuze maakt niet uit wegens propositie 12.8).

Voorbeeld 12.11 Elke samentrekbare topologische ruimte is enkelvoudig samenhangend. Dit zullen we als speciaal geval van een algemenere stelling bewijzen in gevolg 15.4.

Opgaven

1. Zij X een stervormige deelruimte van $\mathbf{R}^n$, en zij $x_0 \in X$ als in de definitie van "stervormig" (zie opgave 10.10).

(a) Zij Y een topologische ruimte. Laat zien dat elke continue afbeelding $Y \to X$ homotoop is met de constante afbeelding $Y \to X$ met beeld $\{x_0\}$.

(b) Bewijs dat elke lus $\gamma \in P(X; x_0)$ weghomotoop is met de constante lus $t \mapsto x_0$.

(c) Laat zien dat voor elke $x \in X$ de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$ triviaal is.

2. Zij S^1 de eenheidscirkel $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Geef een surjectieve continue afbeelding $\gamma\colon [0, 1] \to S^1$ met $\gamma(0) = \gamma(1) = (1, 0)$ (gezien als lus in S^1) zodanig dat γ weghomotoop is met de constante weg $\gamma_0\colon [0, 1] \to S^1$ met beeld $\{(1, 0)\}$. Geef ook een weghomotopie tussen γ en γ_0.

3. Zijn X en Y twee topologische ruimten, zij $f\colon X \to Y$ een homeomorfisme, zij $x_0 \in X$ en zij $y_0 = f(x_0)$. Laat zien dat f een isomorfisme

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, y_0)$$

van fundamentaalgroepen induceert.

4. Zij X een topologische ruimte, zij Y een wegsamenhangscomponent van X, en zij $x_0 \in Y$. Laat zien dat de inclusie $Y \to X$ een isomorfisme

$$\pi_1(Y, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0)$$

van fundamentaalgroepen induceert.

5. Zij X een topologische ruimte, zijn $x_0, x_1 \in X$, en zij $\alpha \in P(X; x_0, x_1)$ een weg. Bewijs dat er tussen de fundamentaalgroepen $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$ een groepsisomorfisme

$$\phi_\alpha \colon \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)$$

bestaat dat voor elke weg $\gamma \in P(X; x_0)$ de klasse $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ afbeeldt op de klasse $[\alpha^{-1} \odot \gamma \odot \alpha] \in \pi_1(X, x_1)$.

13 Overdekkingsruimten en het liften van wegen

Tot nu toe is er geen topologische ruimte waarvan we kunnen bewijzen dat hij een niet-triviale fundamentaalgroep heeft. In stelling 14.3 zullen we zien dat de fundamentaalgroep van de cirkel S^1 isomorf is met de oneindige cyclische groep $\mathbf{Z}$. Om dit te bewijzen, hebben we een aantal nieuwe noties nodig.

Definitie 13.1 Zij X een topologische ruimte. Een **overdekkingsruimte** van X is een paar (Y, p) met Y een topologische ruimte en $p\colon Y \to X$ een surjectieve continue afbeelding met de volgende eigenschap: X heeft een open overdekking $\mathcal{U}$ zodanig dat voor elke $U \in \mathcal{U}$ de deelruimte $p^{-1}U \subseteq Y$ een vereniging is van paarsgewijs disjuncte open deelverzamelingen $V \subseteq Y$ waarvoor de afbeelding $p|_V\colon V \to U$ een homeomorfisme is. De open verzamelingen $V \subseteq Y$ heten **bladen** van Y over U. De afbeelding p heet een **overdekkingsafbeelding**.

Opmerking 13.2 De eis dat $p^{-1}U \subseteq Y$ een vereniging van paarsgewijs disjuncte open verzamelingen $V \subseteq Y$ is, impliceert dat de deelruimtetopologie op $p^{-1}U$ gelijk is aan de topologie van de disjuncte vereniging van de deelruimten V. Hieruit volgt dat de voorwaarde op $p^{-1}U$ in de definitie ook als volgt geformuleerd kan worden: er bestaan een niet-lege discrete topologische ruimte S en een homeomorfisme $p^{-1}U \xrightarrow{\sim} S \times U$ zodanig dat de afbeelding $p^{-1}U \to U$ correspondeert met de projectie $S \times U \to U$ op de tweede coördinaat.

Voorbeeld 13.3 We nemen $X = S^1$ en bekijken de afbeelding

$$\begin{aligned} p\colon \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

We beweren dat p een overdekkingsafbeelding is. We bekijken de open deelverzameling $U = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$. Er geldt

$$\begin{aligned} p^{-1}U &= \{t \in \mathbf{R} \mid \cos(2\pi t) > 0\} \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbf{Z}} \Bigl(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\Bigr). \end{aligned}$$

Dan is p voor elke $n \in \mathbf{Z}$ een homeomorfisme $\bigl(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\bigr) \xrightarrow{\sim} U$. Een soortgelijke uitspraak geldt voor de open deelverzamelingen van S^1 gedefinieerd door $x < 0$, $y > 0$ respectievelijk $y < 0$. Hiermee krijgen we een open overdekking van S^1 met de vereiste eigenschap.

Lemma 13.4 *Zij X een topologische ruimte, zij $\gamma\colon [0, 1] \to X$ een weg en zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X. Dan bestaan er $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ met*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

en open verzamelingen $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ zodanig dat voor alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ geldt $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$.

Bewijs. We merken op dat $\{\gamma^{-1}U \mid U \in \mathcal{U}\}$ een open overdekking van $[0, 1]$ is. Door deze overdekking te verfijnen, krijgen we een open overdekking $\mathcal{V}$ van $[0, 1]$ met intervallen die open zijn in $[0, 1]$ en zodanig dat voor elke $V \in \mathcal{V}$ geldt $\gamma(V) \subseteq U$ voor een $U \in \mathcal{U}$. Aangezien $[0, 1]$ compact is, mogen we aannemen dat $\mathcal{V}$ eindig is. Zij $t_0 = 0$, en zij

$V_1 \in \mathcal{V}$ zodanig dat t_0 in V_1 ligt. Als 1 in V_1 ligt, nemen we $t_1 = 1$ en zijn we klaar. We kunnen dus aannemen dat 1 niet in V_1 ligt. Dan is V_1 te schrijven als $[t_0, b_1)$ met $b_1 \in (t_0, 1]$; er geldt $V_1 \cap [b_1, 1] = \emptyset$, dus $\mathcal{V} \setminus \{V_1\}$ is een overdekking van $[b_1, 1]$ met open deelverzamelingen van $[0, 1]$. In het bijzonder is $\bigcup_{V \in \mathcal{V} \setminus \{V_1\}} V$ een open omgeving van b_1; hieruit volgt dat er een element $t_1 \in (t_0, b_1)$ is zodanig dat ook $[t_1, 1]$ overdekt wordt door $\mathcal{V} \setminus \{V_1\}$. We passen het voorgaande argument toe op het interval $[t_1, 1]$ en de open overdekking $\{V \cap [t_1, 1] \mid V \in \mathcal{V} \setminus \{V_1\}\}$. Door dit te herhalen (eindig vaak omdat $\mathcal{V}$ eindig is), krijgen we de gevraagde $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$. Voor elke $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bestaat er per constructie een $U_j \in \mathcal{U}$ met $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq \gamma(V_j) \subseteq U_j$; dit geeft de gevraagde $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$. □

Propositie 13.5 *Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$, en zij $\gamma\colon [0, 1] \to X$ een weg met $\gamma(0) = x_0$. Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $y \in p^{-1}\{x_0\}$. Dan is er een unieke weg $\tilde{\gamma}_y\colon [0, 1] \to Y$ waarvoor geldt $p \circ \tilde{\gamma}_y = \gamma$ en $\tilde{\gamma}_y(0) = y$.*

Bewijs. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X als in de definitie van overdekkingsruimten. We kiezen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ en $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ als in het bovenstaande lemma. Voor alle $1 \le j \le n$ schrijven we

$$x_j = \gamma(t_j) \in U_{j-1} \cap U_j$$

en schrijven we $p^{-1}U_j$ als een disjuncte vereniging van bladen, dus

$$p^{-1}U_j = \bigsqcup_{V \in \mathcal{V}_j} V$$

met $\mathcal{V}_j$ een collectie open deelverzamelingen van $p^{-1}U_j$ zodanig dat voor elke $V \in \mathcal{V}_j$ de continue afbeelding $p|_V\colon V \to U_j$ een homeomorfisme is. Zij $y_0 = y$, en zij $V_1 \in \mathcal{V}_1$ het blad van $p^{-1}U_1$ dat y_0 bevat. Per aanname is de afbeelding

$$p|_{V_1}\colon V_1 \to U_1$$

een homeomorfisme. We definiëren

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1\colon [t_0, t_1] &\longrightarrow V_1 \\ t &\longmapsto (p|_{V_1})^{-1}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Dan is $\tilde{\gamma}_1\colon [t_0, t_1] \to Y$ een weg van y_0 naar een tweede punt $y_1 = \tilde{\gamma}_1(t_1) \in V_1 \subseteq Y$. Zij $V_2 \in \mathcal{V}_2$ het blad van $p^{-1}U_2$ dat y_1 bevat. We definiëren

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_2\colon [t_1, t_2] &\longrightarrow V_2 \\ t &\longmapsto (p|_{V_2})^{-1}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

en $y_2 = \tilde{\gamma}_2(t_2)$. Zo verdergaand vinden we achtereenvolgens open deelverzamelingen $V_j \subseteq Y$, punten $y_j \in V_j$ met $p(y_j) = x_j$ en continue afbeeldingen

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_j\colon [t_{j-1}, t_j] &\longrightarrow V_j \\ t &\longmapsto (p|_{V_j})^{-1}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

met $\tilde{\gamma}_j(t_{j-1}) = y_{j-1}$ en $\tilde{\gamma}_j(t_j) = y_j$. Wegens $\tilde{\gamma}_j(t_j) = y_j = \tilde{\gamma}_{j+1}(t_j)$ is er een unieke weg

$$\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \to Y$$

waarvan de beperking tot $[t_{j-1}, t_j]$ voor alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gelijk is aan $\tilde{\gamma}_j$. We moeten nog bewijzen dat $\tilde{\gamma}_j$ de *unieke* continue afbeelding $[t_{j-1}, t_j] \to Y$ is die voldoet aan

$\tilde{\gamma}_j(t_{j-1}) = y_{j-1}$ en $p \circ \tilde{\gamma}_j = \gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$. Wegens $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$ is het beeld $\tilde{\gamma}_j([t_{j-1}, t_j])$ van zo'n afbeelding $\tilde{\gamma}_j$ bevat in $p^{-1}U_j$. Dit beeld is bovendien samenhangend, bevat het punt $y_{j-1} \in V_j$ en is dus (omdat V_j een vereniging van samenhangscomponenten van $p^{-1}U_j$ is) bevat in V_j. Omdat $p|_{V_j}$ een homeomorfisme is, volgt dat zo'n afbeelding $\tilde{\gamma}_j$ noodzakelijkerwijs gegeven wordt door de bovenstaande definitie. We concluderen dat $\tilde{\gamma}$ de unieke weg met de gevraagde eigenschap is. □

Definitie 13.6 De weg $\tilde{\gamma}_y$ als boven heet de **lift** van γ naar de overdekkingsruimte Y met beginpunt y.

Voorbeeld 13.7 Zij $X = S^1$, en zij $x_0 = (1, 0) \in S^1$. Voor elke $n \in \mathbf{Z}$ definiëren we een lus $\gamma^n \in P(S^1; x_0)$ door

$$\begin{aligned} \gamma^n \colon [0,1] &\longrightarrow S^1 \\ s &\longmapsto (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns)). \end{aligned}$$

We bekijken opnieuw de afbeelding

$$\begin{aligned} p \colon \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Er geldt

$$p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}.$$

Voor alle $m \in p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z}$ en alle $n \in \mathbf{Z}$ is de weg $\widetilde{(\gamma^n)}_m \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ gegeven door

$$\widetilde{(\gamma^n)}_m(s) = m + ns.$$

Propositie 13.8 *Zij X een topologische ruimte, zij $x_0 \in X$, en zij $\Gamma \colon [0,1] \times [0,1] \to X$ een continue afbeelding met $\Gamma(0,0) = x_0$. Zij $p \colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $y \in p^{-1}\{x_0\}$.*

(a) Er bestaat een unieke continue afbeelding $\tilde{\Gamma} \colon [0,1] \times [0,1] \to Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma$ en $\tilde{\Gamma}(0,0) = y$.

(b) Als Γ een weghomotopie is, dan is $\tilde{\Gamma}$ ook een weghomotopie.

Bewijs.

(a) Dit gaat op een soortgelijke manier als het bewijs van propositie 13.5. We geven hier een constructie die niet direct laat zien dat $\tilde{\Gamma}$ continu is; zie bijvoorbeeld [Runde, Lemma 5.2.4] voor een volledig bewijs. We definiëren eerst

$$\begin{aligned} \Gamma_0 \colon [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \Gamma(t, 0). \end{aligned}$$

Wegens propositie 13.5 is er een unieke weg $\tilde{\Gamma}_0 \colon [0,1] \to Y$ waarvoor geldt $p \circ \tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0$ en $\tilde{\Gamma}_0(0) = x_0$. Voor elke $t \in [0,1]$ bekijken we nu de weg

$$\begin{aligned} \gamma_t \colon [0,1] &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto \Gamma(t, s). \end{aligned}$$

Er geldt

$$\begin{aligned}\gamma_t(0) &= \Gamma(t,0)\\ &= \Gamma_0(t)\\ &= p(\tilde{\Gamma}_0(t)).\end{aligned}$$

Wegens propositie 13.5 is er een unieke weg $\tilde{\gamma}_t\colon [0,1] \to Y$ zodanig dat $p \circ \tilde{\gamma}_t = \gamma_t$ en $\tilde{\gamma}_t(0) = \tilde{\Gamma}_0(t)$. We definiëren

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}\colon [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow Y\\ (t,s) &\longmapsto \tilde{\gamma}_t(s).\end{aligned}$$

Zoals gezegd, bewijzen we hier niet dat $\tilde{\Gamma}$ continu is.

(b) Stel dat Γ een weghomotopie is. Dan geldt $\Gamma(t,0) = x_0$ voor alle $t \in [0,1]$. Hieruit volgt dat de afbeelding $t \mapsto \tilde{\Gamma}(t,0)$ een lift van de constante weg $t \mapsto x_0$ is met beginpunt y. Ook de afbeelding $t \mapsto y$ is zo'n lift. Wegens uniciteit van lifts impliceert dit $\tilde{\Gamma}(t,0) = y$ voor alle $t \in [0,1]$. Op dezelfde manier zien we dat $t \mapsto \tilde{\Gamma}(t,1)$ een constante weg is. Hieruit volgt dat $\tilde{\Gamma}$ een weghomotopie is.

□

Gevolg 13.9 *Zij X een topologische ruimte, zijn $x_0, x_1 \in X$, en zijn $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0, x_1)$ twee wegen die weghomotoop zijn. Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding, en zijn $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'\colon [0,1] \to Y$ lifts van γ respectievelijk γ'. Als $\tilde{\gamma}$ en $\tilde{\gamma}'$ hetzelfde beginpunt hebben, dan hebben ze ook hetzelfde eindpunt.*

Opgaven

1. Beschouw de eenheidscirkel S^1 als de deelruimte $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Zij n een positief geheel getal. Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned}f_n\colon S^1 &\longrightarrow S^1\\ z &\longmapsto z^n\end{aligned}$$

een overdekkingsafbeelding is.

2. Zijn X en S topologische ruimten met S discreet en niet leeg. We definiëren een continue afbeelding $p\colon X \times S \to X$ door $p(x,s) = x$. Bewijs dat p een overdekkingsafbeelding is.

3. Zij $f\colon Y \to X$ een continue afbeelding. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1) f is een overdekkingsafbeelding;

(2) voor elke $x \in X$ is er een open omgeving U van x in X zodanig dat $f|_V\colon V \to U$ een overdekkingsafbeelding is, waarbij $V = f^{-1}U$.

4. Zij $f\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding zodanig dat voor elke $x \in X$ de verzameling $f^{-1}\{x\}$ eindig is. We definiëren een functie $d\colon X \to \mathbf{Z}$ door $d(x) = \#(f^{-1}\{x\})$.

(a) Zij $x \in X$. Bewijs dat er een open omgeving U van x in X bestaat zodanig dat voor alle $x' \in U$ geldt $d(x') = d(x)$.

(b) Laat zien dat voor elke $n \in \mathbf{Z}$ de verzameling $\{x \in X \mid d(x) = n\}$ zowel open als gesloten is.

(c) Stel dat X samenhangend is. Laat zien dat de functie $d\colon X \to \mathbf{Z}$ constant is.

5. Zij $f\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding.

(a) Stel dat X een Hausdorffruimte is. Bewijs dat Y een Hausdorffruimte is.

(b) Stel dat Y een Hausdorffruimte is en dat voor elke $x \in X$ de deelverzameling $f^{-1}\{x\} \subseteq Y$ eindig is. Bewijs dat X een Hausdorffruimte is.

6. Zij $Y = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en zij $\sim$ de equivalentierelatie op Y waarvoor geldt $(x,y) \sim (x',y')$ dan en slechts dan als er een $n \in \mathbf{Z}$ bestaat met $(x',y') = (2^n x, 2^{-n} y)$. Zij X de quotiëntruimte $Y/{\sim}$, en zij $q\colon Y \to X$ de quotiëntafbeelding.

(a) Laat zien dat q een overdekkingsafbeelding is.

(b) Laat zien dat X geen Hausdorffruimte is.

14 Een groepswerking van de fundamentaalgroep

Een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen van groepen is het begrip *groepswerking*, bekend uit Algebra 1. Gegeven een topologische ruimte X, een punt $x_0 \in X$ en een overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to X$ laten we nu zien dat de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x_0)$ via het liften van wegen werkt op de verzameling $p^{-1}\{x_0\}$.

Stelling 14.1 *Zij X een topologische ruimte, en zij $x_0 \in X$. Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $Y_0 = p^{-1}\{x_0\}$.*

(a) Er bestaat een unieke afbeelding van verzamelingen

$$\begin{aligned} Y_0 \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow Y_0 \\ (y, \lambda) &\longmapsto y \star \lambda \end{aligned}$$

zodanig dat voor alle $\gamma \in P(X; x_0)$ en alle $y \in Y_0$ geldt

$$y \star [\gamma] = \tilde{\gamma}_y(1).$$

(b) De in (a) gedefinieerde afbeelding is een rechtswerking van de groep $\pi_1(X, x_0)$ op de verzameling Y_0.

(c) Als Y wegsamenhangend is, dan werkt $\pi_1(X, x_0)$ transitief op Y_0.

(d) Als Y enkelvoudig samenhangend is, dan werkt $\pi_1(X, x_0)$ vrij op Y_0.

Bewijs.

(a) Als $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0)$ hetzelfde element van $\pi_1(X, x_0)$ representeren, dan zijn γ en γ' weghomotoop. Wegens gevolg 13.9 zijn dan ook $\tilde{\gamma}_y$ en $\tilde{\gamma}'_y$ weghomotoop; in het bijzonder geldt $\tilde{\gamma}_y(1) = \tilde{\gamma}'_y(1)$. Dit laat zien dat de afbeelding $\star$ goed gedefinieerd is.

(b) We moeten twee uitspraken bewijzen: (1) als γ_0 de constante lus $s \mapsto x_0$ is, dan geldt voor alle $y \in Y_0$ de identiteit

$$y \star [\gamma_0] = y,$$

en (2) voor alle $\gamma, \gamma' \in P(X; x_0)$ en $y \in Y_0$ geldt de identiteit

$$(y \star [\gamma]) \star [\gamma'] = y \star ([\gamma] \cdot [\gamma']).$$

De eerste uitspraak volgt uit het feit dat de lift van γ_0 met beginpunt y de constante weg $s \mapsto y$ is. We moeten nog de tweede uitspraak bewijzen. Zij $\tilde{\gamma}_y$ de lift van γ met beginpunt y, en zij $y' = \tilde{\gamma}_y(1)$. Zij $\tilde{\gamma}'_{y'}$ de lift van γ' met beginpunt y', en zij $y'' = \tilde{\gamma}'_{y'}(1)$. Dan geldt per definitie

$$\begin{aligned} y' &= y \star [\gamma], \\ y'' &= y' \star [\gamma'] \\ &= (y \star [\gamma]) \star [\gamma']. \end{aligned}$$

Anderzijds is het eindpunt van $\tilde{\gamma}_y$ gelijk aan het beginpunt van $\tilde{\gamma}'_{y'}$, namelijk y', en is de aaneenschakeling $\tilde{\gamma}_y \odot \tilde{\gamma}'_{y'}$ de unieke lift van $\gamma \odot \gamma'$ met beginpunt y. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} y'' &= (\tilde{\gamma}_y \odot \tilde{\gamma}'_{y'})(1) \\ &= \widetilde{(\gamma \odot \gamma')}_y(1) \\ &= y \star [\gamma \odot \gamma'] \\ &= y \star ([\gamma] \cdot [\gamma']), \end{aligned}$$

hetgeen te bewijzen was.

(c) Omdat p surjectief is, bestaat er een punt $y \in Y_0$. Gegeven een tweede punt $y' \in Y_0$ bestaat er een weg δ van y naar y' in Y. Nu is de weg $\gamma = p \circ \delta$ per definitie een lus waarvan de lift $\tilde{\gamma}_y$ met beginpunt y gelijk is aan δ. Er geldt dus $y \star [\gamma] = \delta(1) = y'$. Dit laat zien dat de baan van y gelijk is aan Y_0, dus dat $\pi_1(X, x_0)$ transitief op Y_0 werkt.

(d) Zij $y \in Y_0$. We moeten laten zien dat de stabilisator van y in $\pi_1(X, x_0)$ triviaal is. Zij $[\gamma]$ een element van deze stabilisator. Dan heeft de lift $\tilde{\gamma}_y$ van γ met beginpunt y ook eindpunt y, dus $\tilde{\gamma}_y$ is een lus in Y met basispunt y. Omdat Y enkelvoudig samenhangend is, is $\tilde{\gamma}_y$ weghomotoop met de constante weg $s \mapsto y$. Hieruit volgt dat γ weghomotoop is met de constante weg $s \mapsto x_0$, dus dat $[\gamma]$ het eenheidselement van $\pi_1(X, x_0)$ is.

□

Voorbeeld 14.2 Neem weer $X = S^1$ en $x_0 = (1, 0)$, en zij $p\colon \mathbf{R} \to S^1$ de overdekkingsafbeelding uit het voorbeeld na propositie 13.5. Voor alle $m \in Y_0 = p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z}$ en alle $n \in \mathbf{Z}$ volgt uit de in dit voorbeeld opgemerkte gelijkheid $\widetilde{(\gamma^n)}_m(s) = m + ns$ dat geldt

$$m \star [\gamma^n] = m + n.$$

Met de hierboven gedefinieerde groepswerking tot onze beschikking kunnen we nu bewijzen dat de fundamentaalgroep van de cirkel S^1 isomorf is met de oneindige cyclische groep $\mathbf{Z}$.

Stelling 14.3 *Zij $x_0 = (1, 0) \in S^1$. Voor alle $n \in \mathbf{Z}$ schrijven we $\gamma^n \in P(S^1; x_0)$ voor de lus gegeven door*

$$\begin{aligned} \gamma^n\colon [0, 1] &\longrightarrow S^1 \\ s &\longmapsto (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns)). \end{aligned}$$

(a) De fundamentaalgroep $\pi_1(S^1, x_0)$ is een oneindige cyclische groep voortgebracht door de weghomotopieklasse $[\gamma^1]$, d.w.z. het groepshomomorfisme

$$\begin{aligned} \omega\colon \mathbf{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, x_0) \\ n &\longmapsto [\gamma^1]^n \end{aligned}$$

is een isomorfisme.

(b) Voor alle $n \in \mathbf{Z}$ is het element $[\gamma^1]^n \in \pi_1(S^1, x_0)$ gelijk aan de klasse $[\gamma^n]$ van de weg $\gamma^n \in P(S^1; x_0)$.

Bewijs. We bekijken opnieuw de overdekkingsafbeelding

$$\begin{aligned} p\colon \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Omdat $\mathbf{R}$ wegsamenhangend en enkelvoudig samenhangend is, werkt de groep $\pi_1(S^1, x_0)$ vrij en transitief op de verzameling $Y_0 = p^{-1}\{x_0\} = \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}$ wegens stelling 14.1. Dit betekent dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \sigma\colon \pi_1(S^1; x_0) &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ [\gamma] &\longmapsto 0 \star [\gamma] \end{aligned}$$

een bijectie is. We merken op dat $[\gamma^1] \in \pi_1(S^1, x_0)$ op $Y_0 = \mathbf{Z}$ werkt als translatie over 1, d.w.z. er geldt $m \star [\gamma^1] = m + 1$ en hiermee $m \star [\gamma^1]^n = m + n$ voor alle $m, n \in \mathbf{Z}$. Dit impliceert dat voor alle $n \in \mathbf{Z}$ geldt

$$\sigma(\omega(n)) = 0 \star [\gamma^1]^n = n.$$

Dus ω is de inverse van σ en hiermee ook een bijectie. We berekenen

$$\begin{aligned} \sigma([\gamma^n]) &= 0 \star [\gamma^n] \\ &= n \\ &= \sigma([\gamma^1]^n); \end{aligned}$$

wegens de injectiviteit van σ volgt $[\gamma^n] = [\gamma^1]^n$. □

Opgaven

1. We bekijken we de eenheidsbol

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

voorzien van het basispunt $x_0 = (0, 0, 1)$.

(a) Zij $p \in S^2$. Laat zien dat $S^2 \setminus \{p\}$ samentrekbaar is. (Aanwijzing: reduceer naar een situatie waarin p "makkelijke" coördinaten heeft.)

(b) Zij $\gamma \in P(S^2; x_0)$ een lus met basispunt x_0. Neem aan dat γ niet surjectief is. Bewijs dat γ weghomotoop is met de constante lus met beeld $\{x_0\}$.

2. In deze opgave bewijzen we dat S^2 enkelvoudig samenhangend is.

(a) Zijn $x_1, x_2 \in S^2$, en zij $\gamma \in P(S^2; x_1, x_2)$ een weg. Zij $p \in S^2 \setminus \{x_1, x_2\}$. Stel dat γ niet surjectief is. Bewijs dat γ weghomotoop is met een weg die niet door p gaat. (Aanwijzing: gebruik opgave 14.1.)

(b) Zijn $x_1, x_2 \in S^2$, en zij $\gamma \in P(S^2; x_1, x_2)$ een weg. Bewijs dat γ weghomotoop is met een niet-surjectieve weg. (Aanwijzing: gebruik lemma 13.4 met een geschikte open overdekking van S^2, en pas vervolgens (a) toe op de resulterende "deelwegen" $\gamma\colon [t_{j-1}, t_j] \to S^2$, met $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ en $p \in S^2 \setminus \{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)\}$.)

(c) Bewijs dat elke lus in S^2 met basispunt x_0 weghomotoop is met de constante lus met beeld $\{x_0\}$. (Aanwijzing: gebruik (b) en opgave 14.1.)

(d) Concludeer dat S^2 enkelvoudig samenhangend is.

3. Zij X de "∞-vormige" deelruimte van $\mathbf{R}^2$ gedefinieerd door

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ of } (x+1)^2 + y^2 = 1\},$$

voorzien van het basispunt $x_0 = (0, 0)$. We bekijken de lussen $\gamma_1, \gamma_{-1} \in P(X; x_0)$ met basispunt x_0 gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &= (1 - \cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), \\ \gamma_{-1}(s) &= (\cos(2\pi s) - 1, \sin(2\pi s)). \end{aligned}$$

(a) Laat zien dat er een overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to X$ en een $y \in Y_0$ bestaan zodanig dat de lifts van $\gamma_1 \odot \gamma_{-1}$ en $\gamma_{-1} \odot \gamma_1$ naar Y met beginpunt y verschillende eindpunten hebben. (Aanwijzing: dit is mogelijk met een $p\colon Y \to X$ zodanig dat $p^{-1}\{x\}$ uit drie punten bestaat voor elke $x \in X$.)

(b) Leid uit (a) af dat de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x_0)$ niet abels is.

4. Zij $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ de eenheidsbol, en zij $\sim$ de relatie op S^2 gedefinieerd door

$$x \sim y \iff x = y \text{ of } x = -y.$$

Het **(reële) projectieve vlak** is de quotiëntruimte $P = S^2/{\sim}$ (zie stelling 8.5; ga zelf na dat $\sim$ een equivalentierelatie is).

(a) Laat zien dat de quotiëntafbeelding $q\colon S^2 \to P$ een overdekkingsafbeelding is.

(b) Zij $p \in P$. Laat zien dat de fundamentaalgroep $\pi_1(P, p)$ orde 2 heeft. (Aanwijzing: gebruik opgave 14.2.)

15 Fundamentaalgroepen, continue afbeeldingen en homotopie

We gaan nu bekijken hoe de fundamentaalgroep zich gedraagt onder continue afbeeldingen. Een belangrijke conclusie (stelling 15.3) is dat de fundamentaalgroep een "invariant is op homotopie-equivalentieklassen van topologische ruimten". Dit generaliseert het in opgave 12.3 bewezen resultaat dat de fundamentaalgroep "invariant is onder homeomorfismen".

Stelling 15.1 *Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding, zij $x_0 \in X$, en zij $y_0 = f(x_0)$.*

(a) Er is een unieke afbeelding

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

met de eigenschap dat voor alle $\gamma \in P(X; x_0)$ geldt

$$f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma].$$

(b) De afbeelding f_* is een groepshomomorfisme.

(c) Zij $g\colon Y \to Z$ een tweede continue afbeelding, en zij $z_0 = g(y_0)$. Dan geldt

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$$

als groepshomomorfismen van $\pi_1(X, x_0)$ naar $\pi_1(Z, z_0)$.

Bewijs. Zie opgave 15.1. □

We bekijken nu hoe de zojuist ingevoerde geïnduceerde afbeeldingen op fundamentaalgroepen zich verhouden tot homotopieën.

Propositie 15.2 *Zijn X en Y topologische ruimten, en zij $x_0 \in X$. Zijn $f, g\colon X \to Y$ twee continue afbeeldingen, en zij $F\colon [0,1] \times X \to Y$ een homotopie van f naar g. Zij α de weg in Y gedefinieerd door $\alpha(t) = F(t, x_0)$. Dan voldoet het isomorfisme*

$$\phi_\alpha\colon \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, g(x_0))$$

geïnduceerd door α (zie opgave 12.5 of [Runde, Proposition 5.1.23]) aan de vergelijking

$$\phi_\alpha \circ f_* = g_*.$$

Bewijs. Zij $\gamma \in P(X; x_0)$ een lus. We schrijven

$$\gamma_t(s) = F(t, \gamma(s)).$$

In het bijzonder geldt

$$\gamma_0(s) = f(\gamma(s)),$$
$$\gamma_1(s) = g(\gamma(s)).$$

We moeten bewijzen dat de wegen

$$\gamma_0 \odot \alpha \quad \text{en} \quad \alpha \odot \gamma_1$$

van $f(x_0)$ naar $g(x_0)$ weghomotoop zijn. We definiëren een afbeelding

$$\begin{aligned} H\colon [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow Y \\ (t,s) &\longmapsto \begin{cases} \alpha(2s) & \text{voor } 0\le s\le t/2, \\ \gamma_t(2s-t) & \text{voor } t/2\le s\le (t+1)/2, \\ \alpha(2s-1) & \text{voor } (t+1)/2\le s\le 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat H continu is. Voor alle $s\in[0,1]$ geldt

$$H(0,s)=\begin{cases} \gamma_0(2s) & \text{voor } 0\le s\le 1/2, \\ \alpha(2s-1) & \text{voor } 1/2\le s\le 1 \end{cases}$$

en

$$H(1,s)=\begin{cases} \alpha(2s) & \text{voor } 0\le s\le 1/2, \\ \gamma_1(2s-1) & \text{voor } 1/2\le s\le 1, \end{cases}$$

dus H is een homotopie van $\gamma_0\odot\alpha$ naar $\alpha\odot\gamma_1$. Tot slot merken we op dat voor alle $t\in[0,1]$ geldt

$$H(t,0)=\alpha(0)=f(x_0) \quad \text{en} \quad H(t,1)=\alpha(1)=g(x_0)$$

dus H is een weghomotopie. □

Stelling 15.3 *Zij $f\colon X\to Y$ een homotopie-equivalentie. Zij $x_0\in X$ en zij $y_0=f(x_0)$. Dan is $f_*\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ een isomorfisme.*

Bewijs. Zij $g\colon Y\to X$ een continue afbeelding zodanig dat $g\circ f\sim \mathrm{id}_X$ en $f\circ g\sim\mathrm{id}_Y$. We schrijven $x_1=g(y_0)$ en $y_1=f(x_1)$. Zij $F\colon[0,1]\times X\to Y$ een homotopie van id_X naar $g\circ f$, en zij $G\colon[0,1]\times Y\to X$ een homotopie van id_Y naar $f\circ g$. We schrijven verder $\alpha(t)=F(t,x_0)$ en $\beta(t)=G(t,y_0)$. Dan is er een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}"', "="] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "\mathrm{id}", "="'] \arrow[d, "g_*"] \arrow[dr, "(f\circ g)_*"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "\phi_\beta", "\sim"'] \\ \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\sim", "\phi_\alpha"'] & \pi_1(X,x_1) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(Y,y_1). \end{tikzcd}$$

De diagonale afbeelding in het linker vierkant is een isomorfisme, dus g_* is surjectief. Ook de diagonale afbeelding in het rechter vierkant is een isomorfisme, dus g_* is injectief. Hieruit volgt dat g_* een isomorfisme is, dus ook f_* is een isomorfisme. □

Gevolg 15.4 *Zij X een samentrekbare topologische ruimte. Dan is X enkelvoudig samenhangend.*

Bewijs. Wegens lemma 11.11 is X homotopie-equivalent met de eenpuntsruimte. Uit stelling 15.3 volgt nu dat de fundamentaalgroep van X isomorf is met de fundamentaalgroep van de eenpuntsruimte; deze is triviaal, dus hetzelfde geldt voor de fundamentaalgroep van X. □

Opmerking 15.5 De omkering geldt niet. De eenheidsbol S^2 is enkelvoudig samenhangend; zie opgave 14.2. Anderzijds kan (met behulp van meer machinerie dan we hier ontwikkelen) aangetoond worden dat S^2 niet samentrekbaar is.

Voorbeeld 15.6 We hebben in paragraaf 11 gezien dat de standaardinbedding van de cirkel S^1 in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ een homotopie-equivalentie is. Hieruit volgt dat de fundamentaalgroep van $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ (voor elke keuze van het basispunt) isomorf is met $\mathbf{Z}$.

We geven nu een variant op stelling 15.3 die we zullen gebruiken in het bewijs van het laatste resultaat uit dit dictaat, de dekpuntsstelling van Brouwer.

Definitie 15.7 Zij X een topologische ruimte, en zij Y een deelruimte van X. Een **retractie** van X op Y is een continue afbeelding $f\colon X \to Y$ zodanig dat $f|_Y$ de identiteit op Y is.

Propositie 15.8 *Zij X een topologische ruimte, zij Y een deelruimte van X, en zij $x_0 \in Y \subseteq X$. Als er een retractie van X op Y bestaat, dan is het groepshomomorfisme $i_*\colon \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ geïnduceerd door de inclusieafbeelding $i\colon Y \to X$ injectief.*

Bewijs. We kiezen een retractie $f\colon X \to Y$ van X op Y. Per definitie geldt $f \circ i = \mathrm{id}_Y$. Dit impliceert dat $f_* \circ i_* = (f \circ i)_*$ de identiteit op $\pi_1(Y, x_0)$ is. In het bijzonder is i_* injectief en f_* surjectief. □

Een belangrijke toepassing van propositie 15.8 heeft betrekking op continue afbeeldingen $D^2 \to D^2$, waarbij

$$\begin{aligned} D^2 &= \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \le 1\} \\ &\cong \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\} \end{aligned}$$

de gesloten eenheidsschijf is.

Stelling 15.9 (Dekpuntsstelling van Brouwer). *Zij $f\colon D^2 \to D^2$ een continue afbeelding. Dan bestaat er een $z \in D^2$ waarvoor geldt $f(z) = z$.*

Bewijs. Stel dat f geen dekpunt heeft. We definiëren een afbeelding $g\colon D^2 \to S^1$ als volgt: voor $z \in D^2$ is $g(z)$ het snijpunt van de lijn door z en $f(z)$ met S^1 zodanig dat z tussen $f(z)$ en $g(z)$ op deze lijn ligt. Het is eenvoudig na te gaan (bijvoorbeeld door een formule voor $g(z)$ op te schrijven) dat g continu is. Verder geldt duidelijk $g(z) = z$ voor alle $z \in S^1$, dus g is een retractie. Uit propositie 15.8 volgt nu dat het groepshomomorfisme

$$i_*\colon \pi_1(S^1, (1, 0)) \longrightarrow \pi_1(D^2, (1, 0))$$

geïnduceerd door de inclusieafbeelding $i\colon S^1 \to D^2$ injectief is. De fundamentaalgroep van S^1 is echter isomorf met $\mathbf{Z}$, terwijl de fundamentaalgroep van D^2 triviaal is, een tegenspraak. We concluderen dat f een dekpunt heeft. □

Opgaven

1. Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten, zij $x_0 \in X$, en zij $y_0 = f(x_0)$.

(a) Bewijs dat er een unieke afbeelding van verzamelingen

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

bestaat zodanig dat voor alle $\gamma \in P(X; x_0)$ geldt

$$f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma].$$

(b) Bewijs dat f_* een groepshomomorfisme is.

(c) Zij $g\colon Y \to Z$ een tweede continue afbeelding, en zij $z_0 = g(y_0)$. Bewijs dat de groepshomomorfismen

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad g_*\colon \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0),$$
$$(g \circ f)_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0)$$

voldoen aan

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

2. Zijn X en Y topologische ruimten, en zijn $x_0 \in X$ en $y_0 \in Y$.

(a) Construeer een groepsisomorfisme

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

(Aanwijzing: gebruik opgave 15.1 om een groepshomomorfisme te construeren, en laat vervolgens zien dat dit een inverse heeft.)

(b) Concludeer dat de fundamentaalgroep van de torus $S^1 \times S^1$ isomorf is met $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

3. Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding, zij $y_0 \in Y$ en zij $x_0 = p(y_0)$. Bewijs dat het groepshomomorfisme $p_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ injectief is.

4. Zij n een positief geheel getal.

(a) Zij $B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ de open eenheidsbal in $\mathbf{R}^n$. Beschrijf een continue afbeelding $B^n \to B^n$ zonder dekpunten.

(b) Zij $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ de n-dimensionale eenheidsbol. Beschrijf een continue afbeelding $S^n \to S^n$ zonder dekpunten.

5. Zij $D^1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leq 1\}$. Bewijs dat elke continue afbeelding $f\colon D^1 \to D^1$ een dekpunt heeft.

6. Zij $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ een continue afbeelding. Bewijs dat er $\lambda > 0$ en $x \in \mathbf{R}^2$ bestaan waarvoor geldt $f(x) = \lambda x$.

7. Beschouw de eenheidscirkel S^1 als de deelruimte $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Bekijk voor $n \in \mathbf{Z}$ de afbeelding

$$\begin{aligned} f_n\colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n. \end{aligned}$$

Hoe ziet het geïnduceerde groepshomomorfisme

$$(f_n)_*\colon \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$$

eruit onder de identificatie van $\pi_1(S^1, 1)$ met $\mathbf{Z}$?

8.

(a) Gegeven zijn twee topologische ruimten X en Y en vier continue afbeeldingen $f, f'\colon X \to X$ en $g, g'\colon Y \to Y$ zodanig dat f homotoop is met f', en g met g'. We definiëren twee afbeeldingen $h, h'\colon X \times Y \longrightarrow X \times Y$ door $h(x, y) = (f(x), g(y))$ en $h'(x, y) = (f'(x), g'(y))$. Bewijs dat h en h' continu zijn en homotoop met elkaar zijn.

(b) Zijn X_1, X_2, Y_1 en Y_2 vier topologische ruimten zodanig dat X_1 homotopie-equivalent is met X_2, en Y_1 met Y_2. Bewijs dat $X_1 \times Y_1$ homotopie-equivalent is met $X_2 \times Y_2$.

9. Zij X een topologische ruimte, zij Y een deelruimte van X, en zij $x \in X$. Zij $r\colon X \to Y$ een retractie van X op Y.

(a) Neem aan dat x in Y ligt. Bewijs dat de afbeelding $r_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, r(x))$ surjectief is.

(b) Geldt de uitspraak in (a) ook zonder de aanname dat x in Y ligt? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

10.

(a) Bekijk de deelruimten $Y \subseteq X \subseteq \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door

$$X = \mathbf{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\},$$
$$Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ of } (x+1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Laat zien dat de inclusie $i\colon Y \to X$ een homotopie-equivalentie is.

(b) Zijn $p, q, r \in \mathbf{R}^2$ drie verschillende punten. Bewijs dat de fundamentaalgroep $\pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{q, r\}, p)$ niet abels is. (Aanwijzing: gebruik opgave 14.3.)

11. Beschouw in $\mathbf{R}^3$ de cirkel C en de lijn Z gegeven door

$$C = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\},$$
$$Z = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbf{R}\}.$$

Definieer $X = \mathbf{R}^3 \setminus (C \cup Z)$, en zij $x \in X$. Laat zien dat de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$ isomorf is met $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

A Filters, convergentie en de stelling van Tichonov

In deze appendix geven we een introductie tot het begrip *filter* en de hierop gebaseerde theorie van convergentie in algemene topologische ruimten. Vervolgens geven we een compact bewijs van de stelling van Tichonov. Een alternatieve aanpak is het begrip *net*; hiervoor verwijzen we naar het boek van Runde. Tot slot bewijzen we dat de stelling van Tichonov equivalent is met het keuzeaxioma.

Definitie A.1 Een **filter** op een verzameling X is een collectie $\mathcal{F}$ van deelverzamelingen van X met de volgende eigenschappen:

(1) $X \in \mathcal{F}$;

(2) voor alle deelverzamelingen $F \subseteq G \subseteq X$ met $F \in \mathcal{F}$ geldt $G \in \mathcal{F}$;

(3) voor alle $F, G \in \mathcal{F}$ geldt $F \cap G \in \mathcal{F}$.

Voorbeeld A.2 Voor elke verzameling X zijn $\{X\}$ en de machtsverzameling $\mathcal{P}(X)$ filters op X, en voor elk filter $\mathcal{F}$ op X geldt

$$\{X\} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Voorbeeld A.3 Zij X een verzameling, en zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij in X. We definiëren

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid \text{er is een } N \geq 0 \text{ met } x_n \in F \text{ voor alle } n \geq N\}.$$

Dan is $\mathcal{F}$ een filter op X.

Voorbeeld A.4 Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $x \in X$. De collectie

$$\mathcal{N}_x = \{N \subseteq X \mid N \text{ is een omgeving van } x \text{ in } (X, \mathcal{T})\}$$

is een filter op X.

Definitie A.5 Een **ultrafilter** of **maximaal filter** op een verzameling X is een filter $\mathcal{F}$ op X met $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(X)$ zodanig dat voor elk filter $\mathcal{F}'$ op X met $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ geldt $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ of $\mathcal{F}' = \mathcal{P}(X)$.

Voorbeeld A.6 Voor alle $x \in X$ is het filter $\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X \mid x \in F\}$ een ultrafilter op X.

Lemma A.7 *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een verzameling X. Dan is $\mathcal{F}$ een ultrafilter dan en slechts dan als $\emptyset \notin \mathcal{F}$ en voor alle $F \subseteq X$ geldt $F \in \mathcal{F}$ of $X \setminus F \in \mathcal{F}$.*

Bewijs. Neem aan dat $\emptyset \notin \mathcal{F}$ en voor alle $F \subseteq X$ geldt $F \in \mathcal{F}$ of $X \setminus F \in \mathcal{F}$. Dan geldt $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(X)$. Zij $\mathcal{F}'$ een filter dat strikt groter is dan $\mathcal{F}$. Dan is er een $F \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$, en deze voldoet aan $X \setminus F \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Er volgt $\emptyset = F \cap (X \setminus F) \in \mathcal{F}'$, dus $\mathcal{F}' = \mathcal{P}(X)$. We concluderen dat $\mathcal{F}$ een ultrafilter is.

Neem omgekeerd aan dat $\mathcal{F}$ een ultrafilter is. Dan geldt $\emptyset \notin \mathcal{F}$, anders zou $\mathcal{F}$ gelijk zijn aan $\mathcal{P}(X)$. Zij $F \subseteq X$, en zij $\mathcal{F}_F$ de collectie van alle deelverzamelingen $H \subseteq X$ waarvoor er een $G \in \mathcal{F}$ bestaat met $F \cap G \subseteq H$. De volgende beweringen zijn nu niet moeilijk te bewijzen:

- $\mathcal{F}_F$ is een filter;
- er geldt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_F$;

- er geldt $F \in \mathcal{F}_F$.

Stel nu dat $X \setminus F$ niet in $\mathcal{F}$ zit. Dan volgt $\mathcal{F}_F \neq \mathcal{P}(X)$, en omdat $\mathcal{F}$ een ultrafilter is, is $\mathcal{F}_F$ gelijk aan $\mathcal{F}$. In het bijzonder geldt $F \in \mathcal{F}$. □

Lemma A.8 *Zij X een verzameling, en zij $\mathcal{F}$ een filter op X met $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(X)$. Dan bestaat er een ultrafilter $\mathcal{F}'$ op X met $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.*

Bewijs. Dit is een gevolg van het *lemma van Zorn*, dat op zijn beurt equivalent is met het keuzeaxioma. We verwijzen naar paragraaf 15 van het dictaat Algebra II voor een inleiding en meer toepassingen van het lemma van Zorn.

De collectie $\Omega_{\mathcal{F}}$ van filters $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ met $\emptyset \notin \mathcal{F}'$ is een niet-lege partieel geordende verzameling onder inclusie. Elke keten (totaal geordende deelverzameling) in $\Omega_{\mathcal{F}}$ heeft een bovengrens, namelijk de vereniging van de keten. Wegens het lemma van Zorn bevat $\Omega_{\mathcal{F}}$ een maximaal element $\mathcal{F}'$. Zo'n $\mathcal{F}'$ is per constructie een ultrafilter dat $\mathcal{F}$ bevat. □

We gaan filters nu gebruiken om een definitie van convergentie in topologische ruimten te geven.

Definitie A.9 Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $\mathcal{F}$ een filter op X. Een **limiet** van $\mathcal{F}$ in $(X, \mathcal{T})$ is een punt $x \in X$ zodanig dat elke omgeving van x in $(X, \mathcal{T})$ een element van $\mathcal{F}$ is. Als zo'n x bestaat, zeggen we dat $\mathcal{F}$ **convergeert** (naar x).

Voorbeeld A.10 Zij (X, d) een metrische ruimte, zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een rij in X, en zij $\mathcal{F}$ het filter uit voorbeeld A.3. Dan convergeert $\mathcal{F}$ dan en slechts dan als de rij $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeert.

Definitie A.11 Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $\mathcal{F}$ een filter op X. Een **ophopingspunt** van $\mathcal{F}$ in $(X, \mathcal{T})$ is een punt $x \in X$ zodanig dat elke omgeving van x in $(X, \mathcal{T})$ niet-lege doorsnede heeft met elk element van $\mathcal{F}$.

Lemma A.12 *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, zij $\mathcal{F}$ een filter op X, en zij $x \in X$.*

(a) Als $\mathcal{F}$ niet gelijk is aan $\mathcal{P}(X)$ en x een limiet van $\mathcal{F}$ is, dan is x een ophopingspunt van $\mathcal{F}$.

(b) Als $\mathcal{F}$ een ultrafilter is en x een ophopingspunt van $\mathcal{F}$ is, dan is x een limiet van $\mathcal{F}$.

Bewijs.

(a) Zij N een omgeving van x en $F \in \mathcal{F}$. Omdat x een limiet van $\mathcal{F}$ is, geldt ook $N \in \mathcal{F}$, dus $N \cap F \in \mathcal{F}$, en omdat $\emptyset \notin \mathcal{F}$ volgt $N \cap F \neq \emptyset$.

(b) Zij N een omgeving van x. Omdat N niet-lege doorsnede heeft met elk element van $\mathcal{F}$, geldt $X \setminus N \notin \mathcal{F}$. Wegens lemma A.7 en de aanname dat $\mathcal{F}$ een ultrafilter is, volgt $N \in \mathcal{F}$.

□

Stelling A.13 *Voor een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(1) elk ultrafilter op X convergeert;

(2) elk filter op X ongelijk aan $\mathcal{P}(X)$ heeft een ophopingspunt;

(3) X heeft de eindige-doorsnijdingseigenschap;

(4) X is compact.

Bewijs.

(1) $\implies$ (2) Neem aan dat elk ultrafilter op X convergeert, en zij $\mathcal{F}$ een filter op X met $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(X)$. Wegens lemma A.8 is $\mathcal{F}$ bevat in een ultrafilter $\mathcal{F}'$. Per aanname heeft $\mathcal{F}'$ een limiet x. Uit lemma A.12 volgt dat x een ophopingspunt van $\mathcal{F}'$ is, en dus ook van $\mathcal{F}$.

(2) $\implies$ (3) Neem aan dat elk filter op X ongelijk aan $\mathcal{P}(X)$ een ophopingspunt heeft. Zij $\mathcal{G}$ een collectie gesloten deelverzamelingen van X zodanig dat elke eindige deelcollectie van $\mathcal{G}$ niet-lege doorsnede heeft. Dan is de collectie

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid F \text{ bevat een eindige doorsnede van elementen van } \mathcal{G}\}$$

een filter op X met $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Per aanname heeft $\mathcal{F}$ een ophopingspunt x. Voor alle $G \in \mathcal{G}$ geldt $x \in G$, anders zou $X \setminus G$ een omgeving van x zijn die lege doorsnede had met $G \in \mathcal{F}$. We concluderen dat $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G$ niet leeg is.

(3) $\implies$ (4) Dit hebben we gezien in propositie 9.15.

(4) $\implies$ (1) Neem aan dat $(X, \mathcal{T})$ compact is, en zij $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X. Stel dat $\mathcal{F}$ niet convergeert. Dan heeft elk punt $x \in X$ een open omgeving die niet in $\mathcal{F}$ ligt. Zij $\mathcal{U}$ de collectie van alle open verzamelingen van $(X, \mathcal{T})$ die niet in $\mathcal{F}$ liggen. Dan is $\mathcal{U}$ een open overdekking van X en heeft dus een eindige deeloverdekking $\mathcal{U}'$. Wegens lemma A.7 bevat $\mathcal{F}$ de verzamelingen $X \setminus U$ met $U \in \mathcal{U}'$, dus ook de doorsnede van deze verzamelingen. Omdat $\mathcal{U}'$ een overdekking van X is, is deze doorsnede echter leeg, een tegenspraak. We concluderen dat $\mathcal{F}$ convergeert.

□

Lemma A.14 *Zij $(X_i)_{i \in I}$ een geïndexeerde collectie topologische ruimten, zij $X = \prod_{i \in I}$ de productruimte, en zij $p_i \colon X \to X_i$ voor elke $i \in I$ de projectie op de i-de coördinaat. Zij $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X.*

(a) Voor elke $i \in I$ is

$$\mathcal{F}_i = \{F \subseteq X_i \mid p_i^{-1} F \in \mathcal{F}\}.$$

een ultrafilter op X_i.

(b) Zij $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Dan is x een limiet van $\mathcal{F}$ dan en slechts dan als x_i een limiet van $\mathcal{F}_i$ is voor alle $i \in I$.

Bewijs.

(a) Dit volgt uit lemma A.7.

(b) Stel dat $\mathcal{F}$ naar x convergeert. Zij $i \in I$, en zij N een omgeving van x_i in X_i. Dan is $p_i^{-1} N$ een omgeving van x in X. Per aanname geldt $p_i^{-1} N \in \mathcal{F}$, dus $N \in \mathcal{F}_i$. Hieruit volgt dat $\mathcal{F}_i$ naar x_i convergeert.

Stel nu dat $\mathcal{F}_i$ naar x_i convergeert voor alle $i \in I$. Bekijk eerst een $i \in I$ en een open omgeving U van x_i in X_i. Omdat $\mathcal{F}_i$ naar x_i convergeert, geldt $U \in \mathcal{F}_i$, en dus $p_i^{-1} U \in \mathcal{F}$. Door eindige doorsneden te nemen, zien we dat $\mathcal{F}$ elke open omgeving van x in X bevat, en hiermee ook elke omgeving van x in X. We concluderen dat $\mathcal{F}$ naar x convergeert.

□

Stelling A.15 (Tichonov). *Elk product van compacte topologische ruimten is compact.*

Bewijs. Zij $(X_i)_{i\in I}$ een geïndexeerde collectie van compacte topologische ruimten, zij $X = \prod_{i\in I} X_i$ de productruimte. Wegens stelling A.13 convergeren alle ultrafilters op de ruimten X_i en volstaat het om te bewijzen dat elk ultrafilter op X convergeert.

Zij $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X. We bekijken de ultrafilters $\mathcal{F}_i$ op de X_i zoals in lemma A.14. Per aanname convergeren deze $\mathcal{F}_i$. Wegens het keuzeaxioma bestaat er een punt $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ zodanig dat x_i een limiet van $\mathcal{F}_i$ is voor elke $i \in I$. Uit lemma A.14 volgt nu dat x een limiet van $\mathcal{F}$ is. □

Stelling A.16 *De stelling van Tichonov is equivalent met het keuzeaxioma (in het axiomastelstel van Zermelo–Fraenkel).*

Bewijs. We hebben hierboven een bewijs gegeven van de stelling van Tichonov. We gaan nu bewijzen dat de stelling van Tichonov het keuzeaxioma impliceert.

Zij $(X_i)_{i\in I}$ een willekeurige geïndexeerde collectie niet-lege verzamelingen, en zij $X = \prod_{i\in I} X_i$ de productverzameling. We moeten bewijzen dat X niet leeg is.

Voor elke $i \in I$ definiëren we de topologische ruimte $Y_i = X_i \sqcup \{\infty\}$, waarbij X_i en $\{\infty\}$ beide de triviale topologie hebben en Y_i de topologie van de disjuncte vereniging heeft. Dan heeft elke Y_i slechts 4 open deelverzamelingen en is dus compact. Zij Y de productruimte $\prod_{i\in I} Y_i$. Voor elke $i \in I$ definiëren we een gesloten deelverzameling $F_i = p_i^{-1} X_i \subseteq Y$, waarbij $p_i \colon Y \to Y_i$ de projectieafbeelding is en we X_i zien als deelruimte van Y_i.

Wegens de stelling van Tichonov is Y compact. In het bijzonder heeft Y de eindige-doorsnijdingseigenschap. Voor alle eindige deelverzamelingen $J \subseteq I$ is de doorsnede $\bigcap_{j\in J} F_j$ niet leeg: we kunnen namelijk een element $y = (y_i)_{i\in I}$ in deze doorsnede construeren door voor elke $j \in J$ een $y_j \in X_j$ te kiezen en $y_i = \infty$ te nemen voor $i \in I \setminus J$. Uit de eindige-doorsnijdingseigenschap volgt dat de doorsnede $\bigcap_{i\in I} F_i$ niet leeg is. Tot slot merken we op dat deze doorsnede precies gelijk is aan X. □

Index

Colofon

Versie van 26 augustus 2021
Commentaar en correcties worden op prijs gesteld.
Afbeelding omslag: het oppervlak van Boy, een model (met singulariteiten) van het reële projectieve vlak; zie opgave 14.4.