Opgaven voor de Olympiade

Mike Daas

Universiteit Leiden

21 oktober 2023

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.
- Representatief voor de stof, maar je kan ook niet alles testen.

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.
- Representatief voor de stof, maar je kan ook niet alles testen.
- Nieuw en enigszins origineel.

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.
- Representatief voor de stof, maar je kan ook niet alles testen.
- Nieuw en enigszins origineel.
- Bij de olympiade: ook nog *mooi*.

Hoe vindt men dit soort opgaven? Elke keer weer?

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.
- Representatief voor de stof, maar je kan ook niet alles testen.
- Nieuw en enigszins origineel.
- Bij de olympiade: ook nog *mooi*.

Hoe vindt men dit soort opgaven? Elke keer weer?
Sommigen zeggen weleens dat ze nooit ideeën hebben voor opgaven.
Ik beweer dat dat niet waar is; je moet ze gewoon leren herkennen als ze op je pad komen.

Hoe het begon

- Pas toen Kees van Schenk Brill (IMO 1996) op mijn school kwam werken, begon mijn school deel te nemen aan de NWO.

Hoe het begon

- Pas toen Kees van Schenk Brill (IMO 1996) op mijn school kwam werken, begon mijn school deel te nemen aan de NWO.
- Ik zat toen in de derde klas en won 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.

Hoe het begon

- Pas toen Kees van Schenk Brill (IMO 1996) op mijn school kwam werken, begon mijn school deel te nemen aan de NWO.
- Ik zat toen in de derde klas en won 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.
- Op de tweede ronde behaalde ik 22 punten.

Hoe het begon

- Pas toen Kees van Schenk Brill (IMO 1996) op mijn school kwam werken, begon mijn school deel te nemen aan de NWO.
- Ik zat toen in de derde klas en won 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.
- Op de tweede ronde behaalde ik 22 punten.
- De censuur was 22 punten.

Hoe het begon

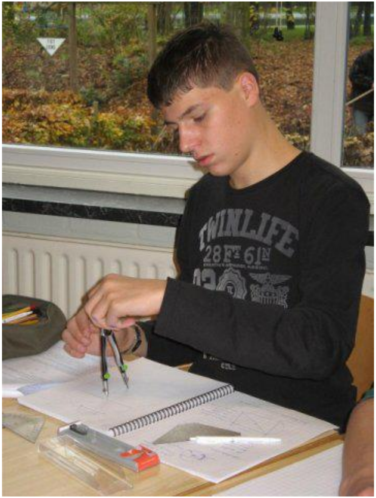
- Pas toen Kees van Schenk Brill (IMO 1996) op mijn school kwam werken, begon mijn school deel te nemen aan de NWO.
- Ik zat toen in de derde klas en won 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.
- Op de tweede ronde behaalde ik 22 punten.
- De censuur was 22 punten.
- Op de finaletraining had ik het zwaar en overwoog te stoppen; van Schenk Brill haalde me over door te gaan.

Hoe het begon

- Pas toen Kees van Schenk Brill (IMO 1996) op mijn school kwam werken, begon mijn school deel te nemen aan de NWO.
- Ik zat toen in de derde klas en won 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.
- Op de tweede ronde behaalde ik 22 punten.
- De censuur was 22 punten.
- Op de finaletraining had ik het zwaar en overwoog te stoppen; van Schenk Brill haalde me over door te gaan.
- Bij de finale behaalde ik 34 punten en werd daarmee 6e van de categorie klas 4 $\implies$ trainingsgroep.

Mijzelf

Deelname IMO-training 2012-2015



Hier was ik net 15 jaar...

Mijzelf

Deelname IMO 2015 in Thailand

Mijzelf

Waarschuwing: als een Thai je vertelt dat een maaltijd pittig is...

Speciale opgave op de IMO

Opgave 1: We noemen een eindige verzameling S van punten in het vlak *evenwichtig* als er voor elk tweetal verschillende punten A en B in S een punt C in S is zodanig dat $|AC| = |BC|$. We zeggen dat S *excentriek* is als er voor elk drietal verschillende punten A, B en C in S geen punt P in S is zodanig dat $|PA| = |PB| = |PC|$.

- Bewijs dat er voor alle gehele getallen $n \geqslant 3$ een evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.
- Bepaal alle gehele getallen $n \geqslant 3$ waarvoor er een excentrieke evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.

Speciale opgave op de IMO

Opgave 1: We noemen een eindige verzameling S van punten in het vlak *evenwichtig* als er voor elk tweetal verschillende punten A en B in S een punt C in S is zodanig dat $|AC| = |BC|$. We zeggen dat S *excentriek* is als er voor elk drietal verschillende punten A, B en C in S geen punt P in S is zodanig dat $|PA| = |PB| = |PC|$.

- Bewijs dat er voor alle gehele getallen $n \geqslant 3$ een evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.
- Bepaal alle gehele getallen $n \geqslant 3$ waarvoor er een excentrieke evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.

Opgave bedacht door een van de beste Nederlandse opgavenmakers aller tijden: **Merlijn Staps**, nu postdoc in Princeton.

Speciale opgave op de IMO

Opgave 1: We noemen een eindige verzameling S van punten in het vlak *evenwichtig* als er voor elk tweetal verschillende punten A en B in S een punt C in S is zodanig dat $|AC| = |BC|$. We zeggen dat S *excentriek* is als er voor elk drietal verschillende punten A, B en C in S geen punt P in S is zodanig dat $|PA| = |PB| = |PC|$.

- Bewijs dat er voor alle gehele getallen $n \geqslant 3$ een evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.
- Bepaal alle gehele getallen $n \geqslant 3$ waarvoor er een excentrieke evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.

Opgave bedacht door een van de beste Nederlandse opgavenmakers aller tijden: **Merlijn Staps**, nu postdoc in Princeton.
Ik had 1 punt op deze opgave...

Puzzels

Als ik iets zag, deed of hoorde, dan wilde ik dat altijd ook zelf maken:

- Ik speel(de) graag puzzelspellen. Meer tijd bracht ik door in de level-editor als die er was.
- Talloze levels en puzzels in verschillende spellen.

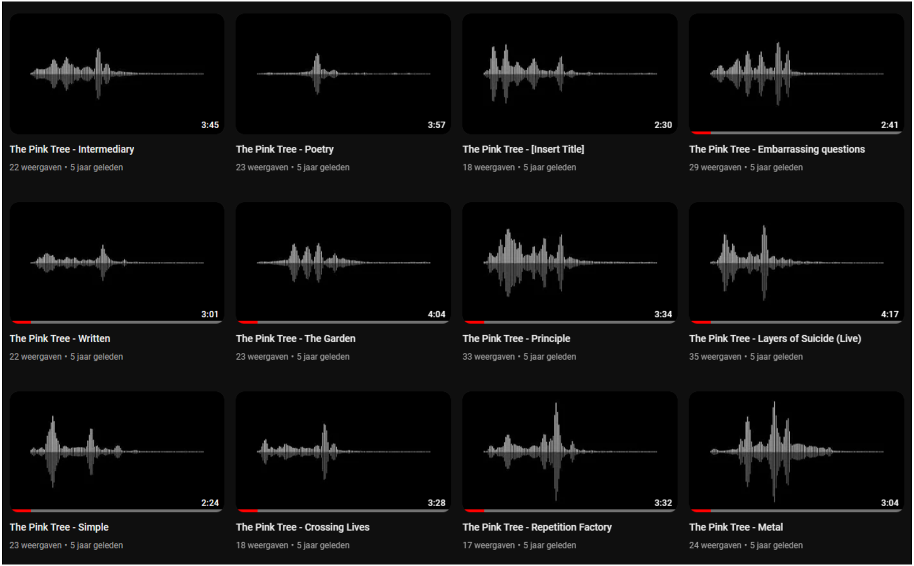
Puzzels

Als ik iets zag, deed of hoorde, dan wilde ik dat altijd ook zelf maken:

- Ik speel(de) graag puzzelspellen. Meer tijd bracht ik door in de level-editor als die er was.
- Talloze levels en puzzels in verschillende spellen.
- Uiteindelijk bracht ik zelfs een spel uit op Steam:

Muziek

Ik maak ook graag mijn eigen muziek...



Kan dit ook met wiskundeopgaven? Antwoord: ja!

Kan dit ook met wiskundeopgaven? Antwoord: ja!

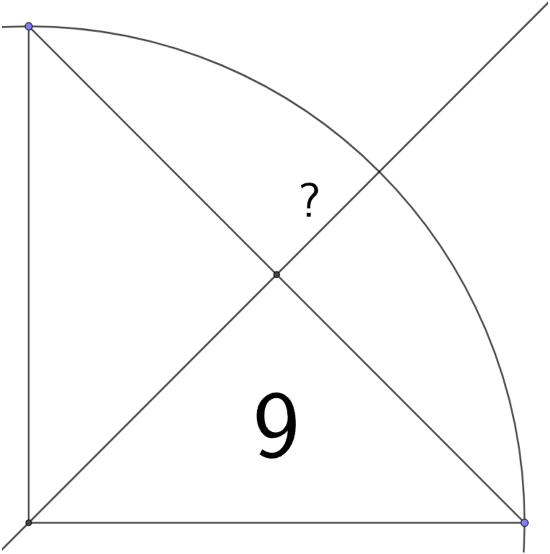
- In klas 3 begon ik met het ontwerpen van mijn eigen wiskundeopgaven.
- Altijd idealiter met een twist or gewoon iets leuks.
- Heel veel meetkundeplaatjes, dat vond ik destijds het leukst.

Wiskundepuzzels

Kan dit ook met wiskundeopgaven? Antwoord: ja!

- In klas 3 begon ik met het ontwerpen van mijn eigen wiskundeopgaven.
- Altijd idealiter met een twist or gewoon iets leuks.
- Heel veel meetkundeplaatjes, dat vond ik destijds het leukst.
- Ik noemde deze opgaven "wiskundepuzzels" en gaf ze aan mijn vrienden om op te lossen.
- Al heel gauw wilden ze er niets meer van weten...

Voorbeeld



Interessante SO's

Mijn docent Kees van Schenk Brill had altijd de olympiade in het achterhoofd. Zo hadden wij ooit het volgende SO:

Leermateriaal

Leer alle waardes van $a^b \leqslant 2500$ uit je hoofd, waar $a, b \geqslant 2$ gehele getallen zijn.

Interessante SO's

Mijn docent Kees van Schenk Brill had altijd de olympiade in het achterhoofd. Zo hadden wij ooit het volgende SO:

Leermateriaal

Leer alle waardes van $a^b \leqslant 2500$ uit je hoofd, waar $a, b \geqslant 2$ gehele getallen zijn.

In het bijzonder dus:

- n^2 voor $n \leqslant 50$;
- n^3 voor $n \leqslant 13$;
- 2^n voor $n \leqslant 11$;
- 3^n voor $n \leqslant 7$.

Interessante SO's

Mijn docent Kees van Schenk Brill had altijd de olympiade in het achterhoofd. Zo hadden wij ooit het volgende SO:

Leermateriaal

Leer alle waardes van $a^b \leqslant 2500$ uit je hoofd, waar $a, b \geqslant 2$ gehele getallen zijn.

In het bijzonder dus:

- n^2 voor $n \leqslant 50$;
- n^3 voor $n \leqslant 13$;
- 2^n voor $n \leqslant 11$;
- 3^n voor $n \leqslant 7$.

Dat zijn veel getallen; vooral de kwadraten. Daarom hielp het om patronen te gebruiken.

Patronen in kwadraten

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$41^2 = 1681$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$	$42^2 = 1764$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$

Idee: het ontdekken van dit patroon is leuk. Hoe zorgen we ervoor dat de leerlingen het patroon moeten ontdekken, zonder abusievelijk het antwoord weg te geven?

Idee: het ontdekken van dit patroon is leuk. Hoe zorgen we ervoor dat de leerlingen het patroon moeten ontdekken, zonder abusievelijk het antwoord weg te geven?

Opgave B1

Van elk van de getallen 1 tot en met 2019 berekenen we het kwadraat. Van elk van deze kwadraten nemen we het laatste cijfer en vervolgens tellen we die 2019 cijfers bij elkaar op.
Welk getal krijgen we als uitkomst?

Idee: het ontdekken van dit patroon is leuk. Hoe zorgen we ervoor dat de leerlingen het patroon moeten ontdekken, zonder abusievelijk het antwoord weg te geven?

Opgave B1

Van elk van de getallen 1 tot en met 2019 berekenen we het kwadraat. Van elk van deze kwadraten nemen we het laatste cijfer en vervolgens tellen we die 2019 cijfers bij elkaar op.
Welk getal krijgen we als uitkomst?

Antwoord: 9090.

Profielwerkstuk

- Kees van Schenk Brill had lucht gekregen van mijn enthousiasme voor opgaven.
- Hij stelde voor: organiseer een eigen wiskundeolympiade op school met enkel je eigen opgaven.

Profielwerkstuk

- Kees van Schenk Brill had lucht gekregen van mijn enthousiasme voor opgaven.
- Hij stelde voor: organiseer een eigen wiskundeolympiade op school met enkel je eigen opgaven.
- Ik vond dat een geweldig idee.
- "Wiskundewedstrijd op school"

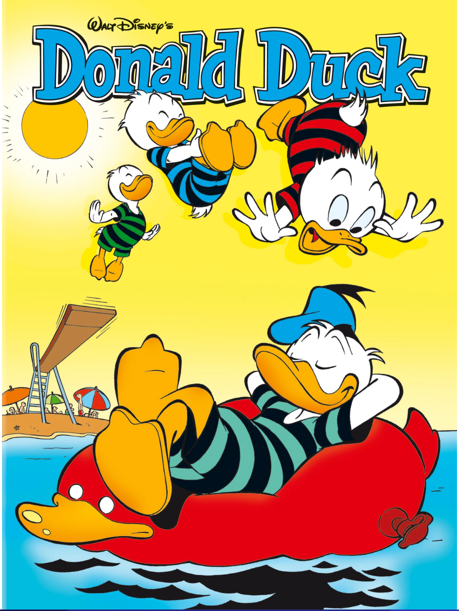
Profielwerkstuk

- Kees van Schenk Brill had lucht gekregen van mijn enthousiasme voor opgaven.
- Hij stelde voor: organiseer een eigen wiskundeolympiade op school met enkel je eigen opgaven.
- Ik vond dat een geweldig idee.
- “Wiskundewedstrijd op school”
- Voor klas 1 tot en met klas 6 aparte versies met 6 zelfbedachte opgaven in 60 minuten; na afloop prijsuitreiking

Profielwerkstuk

- Kees van Schenk Brill had lucht gekregen van mijn enthousiasme voor opgaven.
- Hij stelde voor: organiseer een eigen wiskundeolympiade op school met enkel je eigen opgaven.
- Ik vond dat een geweldig idee.
- “Wiskundewedstrijd op school”
- Voor klas 1 tot en met klas 6 aparte versies met 6 zelfbedachte opgaven in 60 minuten; na afloop prijsuitreiking
- Ofwel mijn opgaven waren te moeilijk, ofwel de leerlingen...

Donald Duck



Puzzelrubriek

Artistieke Impressie Donald Duck Opgave

De tabel hieronder bevat een aantal kloppende sommen, maar de cijfers zijn vervangen door letters. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Voor welk cijfer staat de letter E?

$$\begin{array}{ccccc}
ABC & + & ADD & = & CE6 \\
- & & / & & / \\
ADF & - & GC & = & GD \\
= & & = & & = \\
6 & - & C & = & 4
\end{array}$$

Artistieke Impressie Donald Duck Opgave

De tabel hieronder bevat een aantal kloppende sommen, maar de cijfers zijn vervangen door letters. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Voor welk cijfer staat de letter E?

ABC	+	ADD	=	CE6
-		/		/
ADF	-	GC	=	GD
=		=		=
6	-	C	=	4

Vraag: kan het ook zonder hulpcijfers?

1R-2020-A6

De tabel hieronder bevat een aantal kloppende sommen, maar de cijfers zijn vervangen door letters. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Voor welk cijfer staat de letter E?

$$
\begin{array}{ccccc}
ABC & + & ADD & = & CEF \\
- & & / & & / \\
ADF & - & GC & = & GD \\
= & & = & & = \\
F & - & C & = & D
\end{array}
$$

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Meest gegeven antwoord destijds: 1.

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Meest gegeven antwoord destijds: 1. Correcte antwoord:

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520.$$

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Meest gegeven antwoord destijds: 1. Correcte antwoord:

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520.$$

Idee voorgelegd aan opgavencommissie; te weinig creativiteit vereist, terug naar de tekentafel.

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Meest gegeven antwoord destijds: 1. Correcte antwoord:

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520.$$

Idee voorgelegd aan opgavencommissie; te weinig creativiteit vereist, terug naar de tekentafel.
Lang nagedacht over hoe je de leerlingen kan laten spelen met priemen en kleine getallen, zonder het antwoord weg te geven.

Eindresultaat

2R-2023-B1

Een lerares maakt van de getallen 1 tot en met 12 een grote breuk. Ze schrijft een deel van de getallen in de teller en zet $\times$-tekens tussen die getallen. De overige getallen zet ze in de noemer, weer met $\times$-tekens tussen die getallen. Zowel in de teller als in de noemer staat minstens één getal. Ze doet dit op zo'n manier dat de breuk gelijk is aan een zo klein mogelijk *geheel* getal. Wat is dit getal?

Schrijf uit: $12! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$.

Eindresultaat

2R-2023-B1

Een lerares maakt van de getallen 1 tot en met 12 een grote breuk. Ze schrijft een deel van de getallen in de teller en zet $\times$-tekens tussen die getallen. De overige getallen zet ze in de noemer, weer met $\times$-tekens tussen die getallen. Zowel in de teller als in de noemer staat minstens één getal. Ze doet dit op zo'n manier dat de breuk gelijk is aan een zo klein mogelijk *geheel* getal. Wat is dit getal?

Schrijf uit: $12! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$.
Het antwoord is dus minstens $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$, en met pielen blijkt dit ook te kunnen:

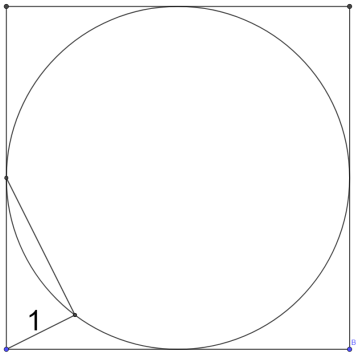
$$\frac{4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8} = 231.$$

Veel iteraties

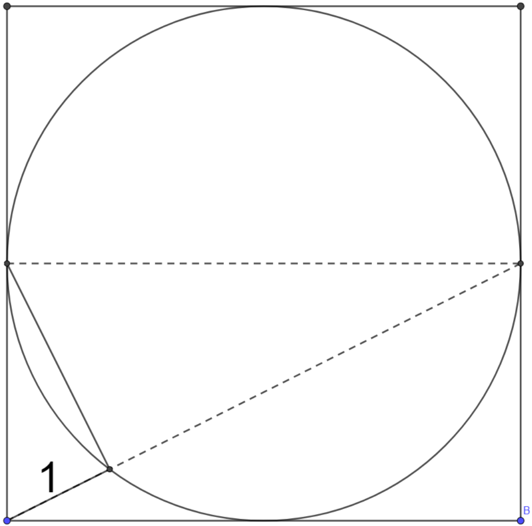
Voor mijn olympiade gebruikte ik in 2014 de volgende opgave:

Opgave.

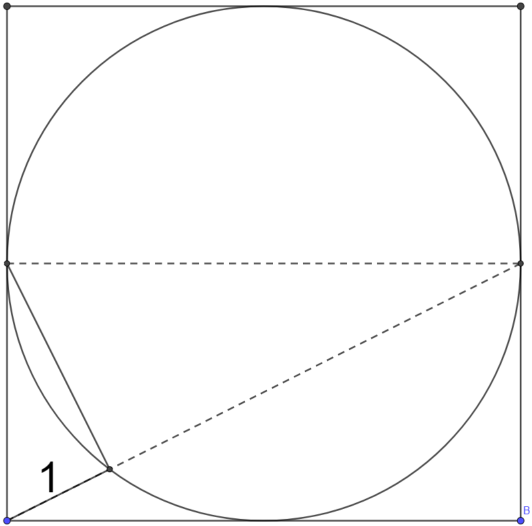
Gegeven is een lijnstuk van lengte 1 en een rechte hoek.
Bereken de oppervlakte van het vierkant.



Oplossing:



Oplossing:



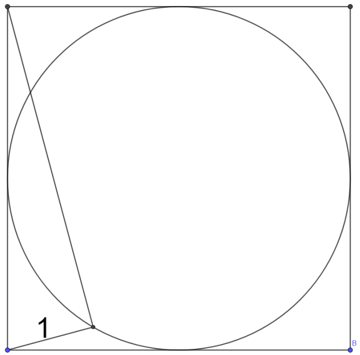
Gebruikt Thales, dus niet geschikt voor olympiade.

Veel iteraties

Ik moest op zoek naar een variatie waarvoor Thales niet nodig was.

Opgave.

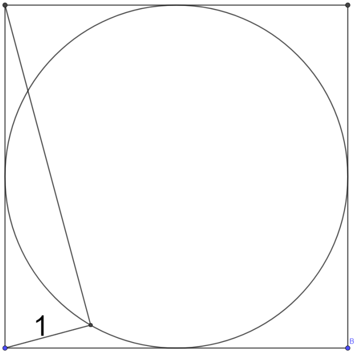
Gegeven is een lijnstuk van lengte 1 en een rechte hoek.
Bereken de oppervlakte van het vierkant.



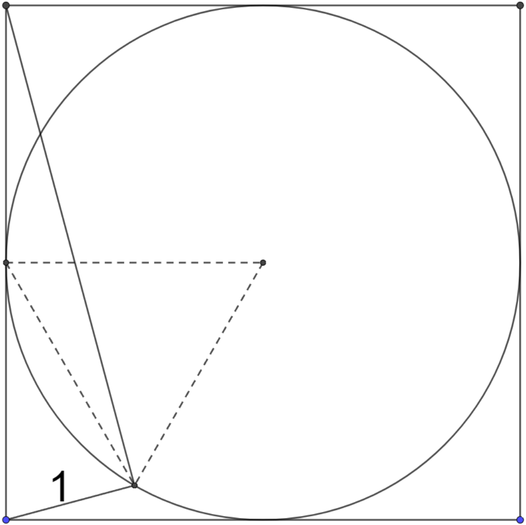
Probleem: antwoord niet bijster mooi. Beter:

Opgave.

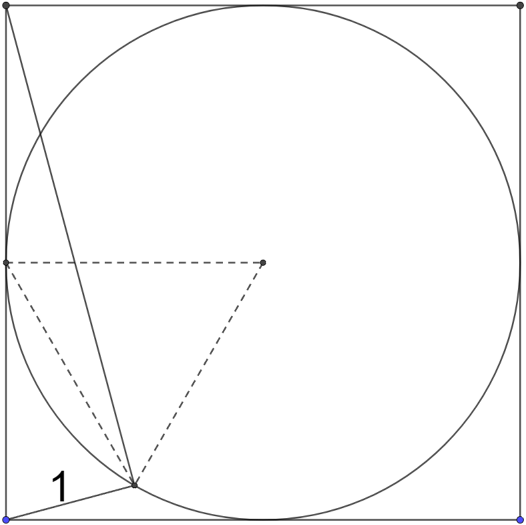
Gegeven is de volgende configuratie met een rechte hoek.
Bereken de hoek die het korte lijnstuk maakt.



Oplossing:



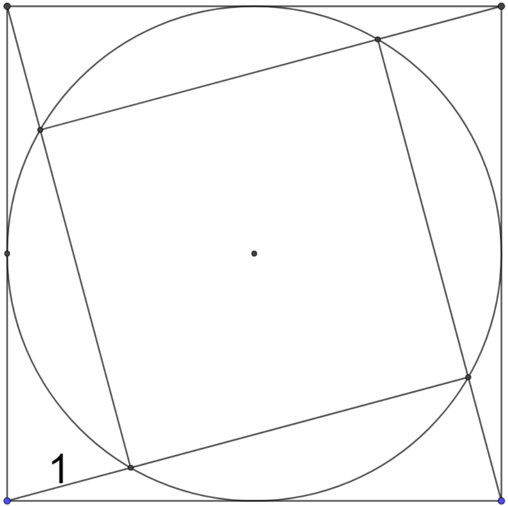
Oplossing:



Gebruikt weer Thales, dus opnieuw niet geschikt voor de olympiade.

Nog meer iteraties

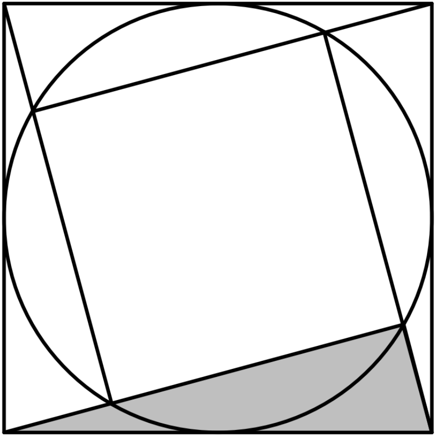
Hoe komen we toch van Thales af? Een observatie:



Eindversie

1R-2022-B2

Als het vierkant zijdelengte 6 heeft, wat is dan de oppervlakte van een klein driehoekje?



Inspiratie

Ik keek ooit op een middag vooruit naar andere trainingssetjes en vond toen tussen alle zeer moeilijk ogende opgaven, het volgende:

Opgave Trainingsprogramma

Tien echtparen zijn op een feestje. Sommige mensen schudden elkaars hand. Niemand schudt zijn eigen hand of de hand van zijn eigen echtgenoot of echtgenote; geen twee mensen schudden meer dan eens elkaars hand. Aan het eind van het feest vraagt een man aan alle anderen hoeveel handen ze geschud hebben. Hij krijgt 19 verschillende antwoorden. Hoeveel handen heeft hij zelf geschud?

Inspiratie

Ik keek ooit op een middag vooruit naar andere trainingssetjes en vond toen tussen alle zeer moeilijk ogende opgaven, het volgende:

Opgave Trainingsprogramma

Tien echtparen zijn op een feestje. Sommige mensen schudden elkaars hand. Niemand schudt zijn eigen hand of de hand van zijn eigen echtgenoot of echtgenote; geen twee mensen schudden meer dan eens elkaars hand. Aan het eind van het feest vraagt een man aan alle anderen hoeveel handen ze geschud hebben. Hij krijgt 19 verschillende antwoorden. Hoeveel handen heeft hij zelf geschud?

In abstractere termen: gegeven is een graaf op 20 knopen met gegeven graden $0, 1, \ldots, 18$. Wat is de graad van de laatste knoop?

Inspiratie

Ik keek ooit op een middag vooruit naar andere trainingssetjes en vond toen tussen alle zeer moeilijk ogende opgaven, het volgende:

Opgave Trainingsprogramma

Tien echtparen zijn op een feestje. Sommige mensen schudden elkaars hand. Niemand schudt zijn eigen hand of de hand van zijn eigen echtgenoot of echtgenote; geen twee mensen schudden meer dan eens elkaars hand. Aan het eind van het feest vraagt een man aan alle anderen hoeveel handen ze geschud hebben. Hij krijgt 19 verschillende antwoorden. Hoeveel handen heeft hij zelf geschud?

In abstractere termen: gegeven is een graaf op 20 knopen met gegeven graden $0, 1, \ldots, 18$. Wat is de graad van de laatste knoop?
Nog algemener: gegeven een n-tal getallen, wanneer bestaat er een (enkelvoudige) graaf waarvan de graden precies die getallen zijn?

Stelling van Erdös-Gallai

Stelling

Een reeks niet-negatieve getallen $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ beschijft de graden van de knopen van een eindige, enkelvoudige graaf op n knopen precies als $d_1 + \ldots + d_n$ even is en voor alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, er geldt

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k).$$

Stelling van Erdös-Gallai

Stelling

Een reeks niet-negatieve getallen $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ beschijft de graden van de knopen van een eindige, enkelvoudige graaf op n knopen precies als $d_1 + \ldots + d_n$ even is en voor alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, er geldt

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k).$$

Dus gelijkheidsgevallen zijn interessant. Zo ontstond:

Stelling van Erdös-Gallai

Stelling

Een reeks niet-negatieve getallen $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ beschijft de graden van de knopen van een eindige, enkelvoudige graaf op n knopen precies als $d_1 + \ldots + d_n$ even is en voor alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, er geldt

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k).$$

Dus gelijkheidsgevallen zijn interessant. Zo ontstond:

JWO-2022-A7

Op een feest zijn 25 gasten aanwezig, onder wie Medan. Van de andere gasten zijn er 12 die elk met precies 18 aanwezigen handen hebben geschud. De overige 12 andere gasten hebben elk met precies 6 aanwezigen handen geschud.
Met hoeveel gasten heeft Medan zelf handen geschud?

Minder abstractie

Ik bedacht ooit de volgende opgave als variatie op iets wat ik op stackexhange zag langskomen:

Opgave.

Zij $a(1), a(2), \ldots$ een rijtje van positieve gehele getallen dat voldoet aan

$$a(n) + a(a(n)) = 2n$$

voor alle gehele $n \geqslant 1$. Bewijs dat $a(n) = n$ voor alle gehele $n \geqslant 1$.

Minder abstractie

Ik bedacht ooit de volgende opgave als variatie op iets wat ik op stackexhange zag langskomen:

Opgave.

Zij $a(1), a(2), \ldots$ een rijtje van positieve gehele getallen dat voldoet aan

$$a(n) + a(a(n)) = 2n$$

voor alle gehele $n \geqslant 1$. Bewijs dat $a(n) = n$ voor alle gehele $n \geqslant 1$.

Duidelijk niet geschikt voor de olympiade. Maar stiekem toch wel:
Een functie $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stuurt elk getal naar een nieuw getal.

Minder abstractie

Ik bedacht ooit de volgende opgave als variatie op iets wat ik op stackexhange zag langskomen:

Opgave.

Zij $a(1), a(2), \ldots$ een rijtje van positieve gehele getallen dat voldoet aan

$$a(n) + a(a(n)) = 2n$$

voor alle gehele $n \geqslant 1$. Bewijs dat $a(n) = n$ voor alle gehele $n \geqslant 1$.

Duidelijk niet geschikt voor de olympiade. Maar stiekem toch wel:
Een functie $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stuurt elk getal naar een nieuw getal.
Meer visueel: voor elk natuurlijk getal hebben we een doos en in elke doos zit een briefje met een natuurlijk getal erop.
Kunnen we de opgave zo herformuleren?

Eindversie

Finale 2023 Opgave 2

In een kamer staan 2023 vazen genummerd van 1 tot en met 2023. In elke vaas willen we een briefje stoppen met daarop een positief geheel getal uit de rij $1, 2, \ldots, 2023$. De getallen op de briefjes hoeven niet verschillend te zijn. Voor elke vaas moet nu het volgende gelden. Kijk op het briefje dat in de vaas zit, zoek de (niet noodzakelijk verschillende) vaas met het nummer dat op het briefje staat, en kijk op het briefje dat in deze vaas zit. Dan moet het gemiddelde van de getallen op de twee briefjes precies gelijk zijn aan het nummer van de eerst gekozen vaas. Bijvoorbeeld, als we in vaas 13 een briefje met het getal 5 stoppen, dan moet in vaas 5 een briefje komen met het getal 21 erop: immers, het gemiddelde van 5 en 21 is 13. Bepaal alle mogelijke manieren om iedere vaas van een briefje te voorzien.

Collatz-vermoeden

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ 3n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Komt voor elk startgetal n de rij $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ uit bij de loop

$$1 \to 4 \to 2 \to 1 \to \ldots?$$

Collatz-vermoeden

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ 3n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Komt voor elk startgetal n de rij $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ uit bij de loop

$$1 \to 4 \to 2 \to 1 \to \ldots?$$

Beschouwd als een van de moeilijkste open problemen in de moderne wiskunde. Het gedrag is enorm onvoorspelbaar:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 13 \to 40 \to 5 \to 16 \to 1 \to \ldots$$

Collatz-vermoeden

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ 3n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Komt voor elk startgetal n de rij $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ uit bij de loop

$$1 \to 4 \to 2 \to 1 \to \ldots ?$$

Beschouwd als een van de moeilijkste open problemen in de moderne wiskunde. Het gedrag is enorm onvoorspelbaar:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 13 \to 40 \to 5 \to 16 \to 1 \to \ldots$$

Interessante observatie: vermoeden houdt geen steek voor bijvoorbeeld $3n - 1$. Bijvoorbeeld,

$$5 \to 14 \to 7 \to 20 \to 5 \to \ldots$$

Kunnen we f veranderen en wel oplosbare varianten krijgen?

Idee 1

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Komt voor elk startgetal n de rij $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ uit bij de loop

$$1 \to 2 \to 1 \to \ldots?$$

Idee 1

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Komt voor elk startgetal n de rij $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ uit bij de loop

$$1 \to 2 \to 1 \to \ldots ?$$

Ja, want $(n+1)/2 < n$ voor $n > 1$ dus wordt een getal na twee stappen altijd kleiner. Niet interessant?

Idee 1

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Komt voor elk startgetal n de rij $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ uit bij de loop

$$1 \to 2 \to 1 \to \ldots?$$

Ja, want $(n+1)/2 < n$ voor $n > 1$ dus wordt een getal na twee stappen altijd kleiner. Niet interessant? Hoe komen we vanaf, zeg, 219 bij 1?

$$219 \to 220 \to 110 \to 55 \to 56 \to 28 \to 14 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Idee 1

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Komt voor elk startgetal n de rij $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ uit bij de loop

$$1 \to 2 \to 1 \to \ldots?$$

Ja, want $(n+1)/2 < n$ voor $n > 1$ dus wordt een getal na twee stappen altijd kleiner. Niet interessant? Hoe komen we vanaf, zeg, 219 bij 1?

$$219 \to 220 \to 110 \to 55 \to 56 \to 28 \to 14 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Dit is de snelste manier; gewoon gretig spelen. Maar wat als we het spel omdraaien? Dan is het plots niet meer zo duidelijk.

Eindversie

1R-2021-A5

Op het krijtbord staat het getal 1. Een zet bestaat eruit het getal op het bord weg te vegen en te vervangen door het dubbele van het getal of door het getal dat 1 kleiner is. Het getal 1 mag bijvoorbeeld vervangen worden door 2 (het dubbele) of 0 (één kleiner), en als het getal 5 op het bord staat, mag je dat vervangen door 10 of 4.
Wat is het minimale aantal zetten dat nodig is om het getal 2021 op het bord te schrijven?

Eindversie

1R-2021-A5

Op het krijtbord staat het getal 1. Een zet bestaat eruit het getal op het bord weg te vegen en te vervangen door het dubbele van het getal of door het getal dat 1 kleiner is. Het getal 1 mag bijvoorbeeld vervangen worden door 2 (het dubbele) of 0 (één kleiner), en als het getal 5 op het bord staat, mag je dat vervangen door 10 of 4.
Wat is het minimale aantal zetten dat nodig is om het getal 2021 op het bord te schrijven?

Oplossing: draai het probleem om en werk achteruit.
Vooruit is echt heel lastig!

Idee 2

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2 - 1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Nu verwachten we eigenlijk dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan.

Idee 2

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2 - 1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Nu verwachten we eigenlijk dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Toch gebeurt het soms nog:

$$11 \to 120 \to 15 \to 224 \to 7 \to 48 \to 3 \to 8 \to 1.$$

Blijkt: heel moeilijk!

Idee 2

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2 - 1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Nu verwachten we eigenlijk dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Toch gebeurt het soms nog:

$$11 \to 120 \to 15 \to 224 \to 7 \to 48 \to 3 \to 8 \to 1.$$

Blijkt: heel moeilijk! Ik kon het oplossen met behulp van een paper uit 2002 waarin de Diophantische vergelijkingen

$$2^n \pm 2^m \pm 2^k = z^2$$

geheel worden opgelost. Is dit probleem dus altijd te lastig?

Niet opgeven

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2 + 1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Nu verwachten we weer dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Sterker nog:

$$3 \to 10 \to 5 \to 26 \to 13 \to 170 \to 85 \to \dots$$

We delen altijd maar 1 keer door 2...

Niet opgeven

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2 + 1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Nu verwachten we weer dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Sterker nog:

$$3 \to 10 \to 5 \to 26 \to 13 \to 170 \to 85 \to \dots$$

We delen altijd maar 1 keer door 2... Inderdaad, $(\text{oneven})^2 \equiv 1 \mod 4$.

Niet opgeven

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2 + 1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Nu verwachten we weer dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Sterker nog:

$$3 \to 10 \to 5 \to 26 \to 13 \to 170 \to 85 \to \dots$$

We delen altijd maar 1 keer door 2... Inderdaad, $(\text{oneven})^2 \equiv 1 \mod 4$. Wat met $n^2 + 3$?

$$5 \to 28 \to 7 \to 52 \to 13 \to 172 \to 43 \to \dots$$

We delen altijd precies 2 keer 2...

Niet opgeven

Zij $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de functie

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Nu verwachten we weer dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Sterker nog:

$$3 \to 10 \to 5 \to 26 \to 13 \to 170 \to 85 \to \dots$$

We delen altijd maar 1 keer door 2... Inderdaad, $(\text{oneven})^2 \equiv 1 \mod 4$. Wat met n^2+3?

$$5 \to 28 \to 7 \to 52 \to 13 \to 172 \to 43 \to \dots$$

We delen altijd precies 2 keer 2... En ja, zelfs $(\text{oneven})^2 \equiv 1 \mod 8$. Flauw voor ons, maar interessant voor leerlingen.

Eindversie

Finale 2023 Opgave 3

Felix kiest een positief geheel getal als startgetal en schrijft het op het bord. Hij herhaalt vervolgens telkens de volgende stap: hij vervangt het getal n op het bord door $n/2$ als n even is en door $n^2 + 3$ als n oneven is. Voor hoeveel keuzes van startgetallen onder de 2023 zal Felix nooit een getal van meer dan vier cijfers op het bord schrijven?

Eindversie

Finale 2023 Opgave 3

Felix kiest een positief geheel getal als startgetal en schrijft het op het bord. Hij herhaalt vervolgens telkens de volgende stap: hij vervangt het getal n op het bord door $n/2$ als n even is en door $n^2 + 3$ als n oneven is. Voor hoeveel keuzes van startgetallen onder de 2023 zal Felix nooit een getal van meer dan vier cijfers op het bord schrijven?

Antwoord: blijkt dat

$$1 \to 4 \to 2 \to 1 \quad \text{en} \quad 3 \to 12 \to 6 \to 3$$

de enige loops zijn, want verder geldt $n^2 + 3 > 4n$. Dus alle startgetallen zijn van de vorm 2^n of $3 \cdot 2^n$.

Mijn studie

- Na mijn middelbareschooltijd ging ik wiskunde en natuurkunde studeren aan de UvA.
- Toen ik net met mijn master (enkel wiskunde!) begonnen was, werd ik uitgenodigd voor de opgavencommissie.

Mijn studie

- Na mijn middelbareschooltijd ging ik wiskunde en natuurkunde studeren aan de UvA.
- Toen ik net met mijn master (enkel wiskunde!) begonnen was, werd ik uitgenodigd voor de opgavencommissie.
- Aan de UvA organiseerden ze een vak: IMC Training.
- Het IMC is een wiskundeolympiade voor universitaire studenten.

Extremal Combinatorics

In mijn tweede masterjaar volgde ik het vak Probabilistic and Extremal Combinatorics. Wij kregen de volgende huiswerkopgave.

Opgave.

Zij G een enkelvoudige graaf op n punten en laat $\overline{G}$ zijn complement zijn. Bewijs dat het aantal driehoeken in G en $\overline{G}$ samen minstens gelijk is aan

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

In mijn tweede masterjaar volgde ik het vak Probabilistic and Extremal Combinatorics. Wij kregen de volgende huiswerkopgave.

Opgave.

Zij G een enkelvoudige graaf op n punten en laat $\overline{G}$ zijn complement zijn. Bewijs dat het aantal driehoeken in G en $\overline{G}$ samen minstens gelijk is aan

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

Ik kwam er maar niet uit.

In mijn tweede masterjaar volgde ik het vak Probabilistic and Extremal Combinatorics. Wij kregen de volgende huiswerkopgave.

Opgave.

Zij G een enkelvoudige graaf op n punten en laat $\overline{G}$ zijn complement zijn. Bewijs dat het aantal driehoeken in G en $\overline{G}$ samen minstens gelijk is aan

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

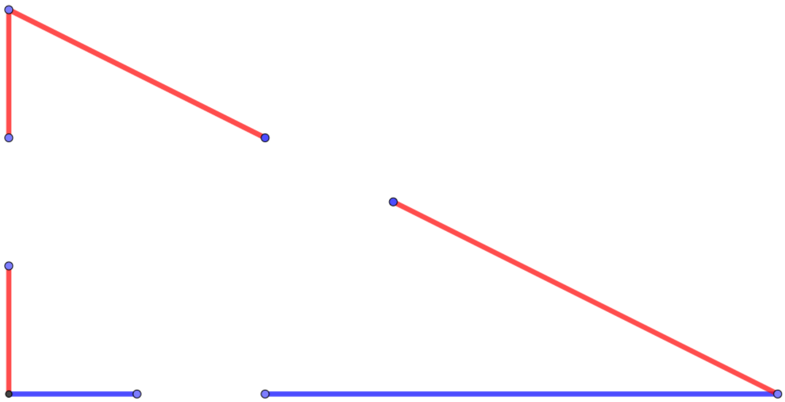
Ik kwam er maar niet uit. In pure wanhoop geprobeerd op te zoeken op het internet, en zo vond ik het artikel

"On Sets of Acquaintances and Strangers at any Party"

van A. W. Goodman uit 1959 met dit als hoofdresultaat.
Ik las zijn bewijs en leverde het in...

Goodman's bewijs

Goodman merkte op dat elke driehoek bestond uit drie *haken*:



Een volle of een lege driehoek bestaat uit 3 mono-haken; een mix-driehoek altijd uit 1 mono-haak en 2 poly-haken.

Dus

$$6 \cdot \#\text{volle of lege driehoeken} = 2 \cdot \#\text{monohaken} - \#\text{polyhaken}.$$

Dus

$$6 \cdot \#\text{volle of lege driehoeken} = 2 \cdot \#\text{monohaken} - \#\text{polyhaken}.$$

Haken kunnen we makkelijk tellen: als bij een punt r rode lijnen zitten en b blauwe, dan is

$$\#\text{monohaken} = \frac{r(r-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} \quad \text{en} \quad \#\text{polyhaken} = rb.$$

Deze grootheden minimaliseren geeft de opgave.

Opgaven

Dus

$$6 \cdot \#\text{volle of lege driehoeken} = 2 \cdot \#\text{monohaken} - \#\text{polyhaken}.$$

Haken kunnen we makkelijk tellen: als bij een punt r rode lijnen zitten en b blauwe, dan is

$$\#\text{monohaken} = \frac{r(r-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} \quad \text{en} \quad \#\text{polyhaken} = rb.$$

Deze grootheden minimaliseren geeft de opgave.
Maar we hebben nu eigenlijk iets veel sterkers opgemerkt: als we bij elk punt weten precies hoeveel rode en blauwe lijnen er samenkomen, dan weten we precies hoeveel mono-driehoeken er zijn!

Eindversie

IMC 2022 Problem 5

We colour all the sides and diagonals of a regular polygon P with 43 vertices either red or blue in such a way that every vertex is an endpoint of 20 red segments and 22 blue segments. A triangle formed by vertices of P is called monochromatic if all of its sides have the same colour. Suppose that there are 2022 blue monochromatic triangles. How many red monochromatic triangles are there?

Eindversie

IMC 2022 Problem 5

We colour all the sides and diagonals of a regular polygon P with 43 vertices either red or blue in such a way that every vertex is an endpoint of 20 red segments and 22 blue segments. A triangle formed by vertices of P is called monochromatic if all of its sides have the same colour. Suppose that there are 2022 blue monochromatic triangles. How many red monochromatic triangles are there?

Antwoord: 859. Mijn advies:

Eindversie

IMC 2022 Problem 5

We colour all the sides and diagonals of a regular polygon P with 43 vertices either red or blue in such a way that every vertex is an endpoint of 20 red segments and 22 blue segments. A triangle formed by vertices of P is called monochromatic if all of its sides have the same colour. Suppose that there are 2022 blue monochromatic triangles. How many red monochromatic triangles are there?

Antwoord: 859. Mijn advies:

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!

Eindversie

IMC 2022 Problem 5

We colour all the sides and diagonals of a regular polygon P with 43 vertices either red or blue in such a way that every vertex is an endpoint of 20 red segments and 22 blue segments. A triangle formed by vertices of P is called monochromatic if all of its sides have the same colour. Suppose that there are 2022 blue monochromatic triangles. How many red monochromatic triangles are there?

Antwoord: 859. Mijn advies:

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!
- Ga te werk alsof je altijd binnenkort een toets klaar moet hebben liggen. Zo kijk je automatisch anders naar veel zaken.

Eindversie

IMC 2022 Problem 5

We colour all the sides and diagonals of a regular polygon P with 43 vertices either red or blue in such a way that every vertex is an endpoint of 20 red segments and 22 blue segments. A triangle formed by vertices of P is called monochromatic if all of its sides have the same colour. Suppose that there are 2022 blue monochromatic triangles. How many red monochromatic triangles are there?

Antwoord: 859. Mijn advies:

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!
- Ga te werk alsof je altijd binnenkort een toets klaar moet hebben liggen. Zo kijk je automatisch anders naar veel zaken.
- Sta jezelf toe om recreatief met wiskunde bezig te zijn! Blijf spelen; dan komt er vanzelf wat uit. Zo leert mijn ervaring!

Eindversie

IMC 2022 Problem 5

We colour all the sides and diagonals of a regular polygon P with 43 vertices either red or blue in such a way that every vertex is an endpoint of 20 red segments and 22 blue segments. A triangle formed by vertices of P is called monochromatic if all of its sides have the same colour. Suppose that there are 2022 blue monochromatic triangles. How many red monochromatic triangles are there?

Antwoord: 859. Mijn advies:

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!
- Ga te werk alsof je altijd binnenkort een toets klaar moet hebben liggen. Zo kijk je automatisch anders naar veel zaken.
- Sta jezelf toe om recreatief met wiskunde bezig te zijn! Blijf spelen; dan komt er vanzelf wat uit. Zo leert mijn ervaring!
- Wees Birgit van Dalen; dat helpt...

Mooie opgaven

- Wanneer is een opgave nou mooi?

Mooie opgaven

- Wanneer is een opgave nou mooi?
- Uiteindelijk heel subjectief. Een voorzichtige poging is:

Mooie opgaven

- Wanneer is een opgave nou mooi?
- Uiteindelijk heel subjectief. Een voorzichtige poging is:
- *Als een uitwerking opmerkelijk ingewikkeld is ten opzichte van de eenvoud van de vraagstelling, dan is een opgave mooi.*

Mooie opgaven

- Wanneer is een opgave nou mooi?
- Uiteindelijk heel subjectief. Een voorzichtige poging is:
- *Als een uitwerking opmerkelijk ingewikkeld is ten opzichte van de eenvoud van de vraagstelling, dan is een opgave mooi.*
- Maar er zijn opgaven die gewoon irritant zijn om op te lossen, bijvoorbeeld door het moeten maken van allerlei afschattingen. Misschien:

Mooie opgaven

- Wanneer is een opgave nou mooi?
- Uiteindelijk heel subjectief. Een voorzichtige poging is:
- *Als een uitwerking opmerkelijk ingewikkeld is ten opzichte van de eenvoud van de vraagstelling, dan is een opgave mooi.*
- Maar er zijn opgaven die gewoon irritant zijn om op te lossen, bijvoorbeeld door het moeten maken van allerlei afschattingen. Misschien:
- *Als een uitwerking iets onverwachts bevat en verder relatief snel in zijn plaats valt, dan is een opgave mooi.*

Mooie opgaven

- Wanneer is een opgave nou mooi?
- Uiteindelijk heel subjectief. Een voorzichtige poging is:
- *Als een uitwerking opmerkelijk ingewikkeld is ten opzichte van de eenvoud van de vraagstelling, dan is een opgave mooi.*
- Maar er zijn opgaven die gewoon irritant zijn om op te lossen, bijvoorbeeld door het moeten maken van allerlei afschattingen. Misschien:
- *Als een uitwerking iets onverwachts bevat en verder relatief snel in zijn plaats valt, dan is een opgave mooi.*
- Maar ook lastige en ingewikkelde bewijzen kunnen een schoonheid bevatten. Misschien gewoon:

Mooie opgaven

- Wanneer is een opgave nou mooi?
- Uiteindelijk heel subjectief. Een voorzichtige poging is:
- *Als een uitwerking opmerkelijk ingewikkeld is ten opzichte van de eenvoud van de vraagstelling, dan is een opgave mooi.*
- Maar er zijn opgaven die gewoon irritant zijn om op te lossen, bijvoorbeeld door het moeten maken van allerlei afschattingen. Misschien:
- *Als een uitwerking iets onverwachts bevat en verder relatief snel in zijn plaats valt, dan is een opgave mooi.*
- Maar ook lastige en ingewikkelde bewijzen kunnen een schoonheid bevatten. Misschien gewoon:
- *Een opgave is mooi als je ervan moet glimlachen als je hem hebt opgelost.*
- Veel dank voor de aandacht.