Opgaven voor de Olympiade

Mike Daas

Universiteit Leiden

19 april 2024

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.
- Representatief voor de stof, maar je kan ook niet alles testen.

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.
- Representatief voor de stof, maar je kan ook niet alles testen.
- Nieuw en enigszins origineel.

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.
- Representatief voor de stof, maar je kan ook niet alles testen.
- Nieuw en enigszins origineel.
- Bij de olympiade: ook nog *mooi*.

Hoe vindt men dit soort opgaven? Elke keer weer?

Het toets-dilemma

Elke toets bestaat uit opgaven.

- Niet te moeilijk; niet te makkelijk.
- Representatief voor de stof, maar je kan ook niet alles testen.
- Nieuw en enigszins origineel.
- Bij de olympiade: ook nog *mooi*.

Hoe vindt men dit soort opgaven? Elke keer weer?
Sommigen zeggen weleens dat ze nooit ideeën hebben voor opgaven.
Ik beweer dat dat niet waar is; je moet ze gewoon leren herkennen als ze op je pad komen.

Hoe het begon

- In de brugklas deed mijn school (St. Michaël College in Zaandam) niet aan de wiskundeolympiade, tot een nieuwe docent werd aangesteld: Kees van Schenk Brill.
- In de derde klas deed ik voor het eerst mee aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

Hoe het begon

- In de brugklas deed mijn school (St. Michaël College in Zaandam) niet aan de wiskundeolympiade, tot een nieuwe docent werd aangesteld: Kees van Schenk Brill.
- In de derde klas deed ik voor het eerst mee aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade.
- Daar won ik 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.

Hoe het begon

- In de brugklas deed mijn school (St. Michaël College in Zaandam) niet aan de wiskundeolympiade, tot een nieuwe docent werd aangesteld: Kees van Schenk Brill.
- In de derde klas deed ik voor het eerst mee aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade.
- Daar won ik 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.
- Op de tweede ronde behaalde ik 22 punten.

Hoe het begon

- In de brugklas deed mijn school (St. Michaël College in Zaandam) niet aan de wiskundeolympiade, tot een nieuwe docent werd aangesteld: Kees van Schenk Brill.
- In de derde klas deed ik voor het eerst mee aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade.
- Daar won ik 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.
- Op de tweede ronde behaalde ik 22 punten.
- De grens om door te gaan was 22 punten.

Hoe het begon

- In de brugklas deed mijn school (St. Michaël College in Zaandam) niet aan de wiskundeolympiade, tot een nieuwe docent werd aangesteld: Kees van Schenk Brill.
- In de derde klas deed ik voor het eerst mee aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade.
- Daar won ik 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.
- Op de tweede ronde behaalde ik 22 punten.
- De grens om door te gaan was 22 punten.
- Op de finaletraining had ik het zwaar en overwoog te stoppen; mijn docent haalde me over door te gaan.

Hoe het begon

- In de brugklas deed mijn school (St. Michaël College in Zaandam) niet aan de wiskundeolympiade, tot een nieuwe docent werd aangesteld: Kees van Schenk Brill.
- In de derde klas deed ik voor het eerst mee aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade.
- Daar won ik 50 euro door met 17 punten het hoogst te eindigen van de school.
- Op de tweede ronde behaalde ik 22 punten.
- De grens om door te gaan was 22 punten.
- Op de finaletraining had ik het zwaar en overwoog te stoppen; mijn docent haalde me over door te gaan.
- Bij de finale behaalde ik 34 punten en werd daarmee 6e van de categorie klas 4 $\implies$ trainingsgroep.

Deelname IMO 2015 in Thailand

Mijn studie

- Na mijn middelbareschooltijd koos ik ervoor de dubbele bachelorstudie in wiskunde en natuurkunde te volgen aan de UvA; dat was erg leuk.
- Toen ik net met mijn master (enkel wiskunde!) begonnen was, werd ik uitgenodigd voor de opgavencommissie.

Mijn studie

- Na mijn middelbareschooltijd koos ik ervoor de dubbele bachelorstudie in wiskunde en natuurkunde te volgen aan de UvA; dat was erg leuk.
- Toen ik net met mijn master (enkel wiskunde!) begonnen was, werd ik uitgenodigd voor de opgavencommissie.
- Aan de UvA organiseerden ze een vak: IMC Training.
- Het IMC is een wiskundeolympiade voor universitaire studenten.

Puzzels

Als ik iets zag, deed of hoorde, dan wilde ik dat altijd ook zelf maken:

- Ik speel(de) graag puzzelspellen. Meer tijd bracht ik door in de level-editor als die er was.
- Talloze levels en puzzels in verschillende spellen.

Puzzels

Als ik iets zag, deed of hoorde, dan wilde ik dat altijd ook zelf maken:

- Ik speel(de) graag puzzelspellen. Meer tijd bracht ik door in de level-editor als die er was.
- Talloze levels en puzzels in verschillende spellen.
- Uiteindelijk bracht ik zelfs een spel uit op Steam:

Wiskundepuzzels

Kan dit ook met wiskundeopgaven? Antwoord: ja!

Wiskundepuzzels

Kan dit ook met wiskundeopgaven? Antwoord: ja!

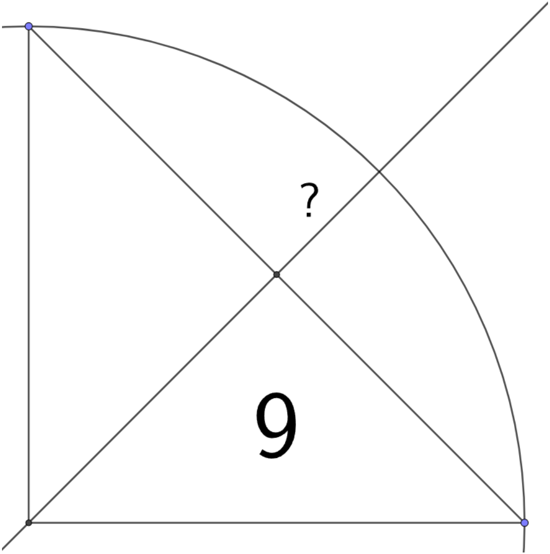
- In klas 3 begon ik met het ontwerpen van mijn eigen wiskundeopgaven.
- Altijd idealiter met een twist or gewoon iets leuks.
- Heel veel meetkundeplaatjes, dat vond ik destijds het leukst.

Wiskundepuzzels

Kan dit ook met wiskundeopgaven? Antwoord: ja!

- In klas 3 begon ik met het ontwerpen van mijn eigen wiskundeopgaven.
- Altijd idealiter met een twist or gewoon iets leuks.
- Heel veel meetkundeplaatjes, dat vond ik destijds het leukst.
- Ik noemde deze opgaven “wiskundepuzzels” en gaf ze aan mijn vrienden om op te lossen.
- Al heel gauw wilden ze er niets meer van weten...

Voorbeeld



Interessante SO's

Mijn docent had altijd de olympiade in het achterhoofd.
Zo hadden wij ooit het volgende SO:

Leermateriaal

Leer alle waardes van $a^b \leqslant 2500$ uit je hoofd, waar $a, b \geqslant 2$ gehele getallen zijn.

Interessante SO's

Mijn docent had altijd de olympiade in het achterhoofd.
Zo hadden wij ooit het volgende SO:

Leermateriaal

Leer alle waardes van $a^b \leqslant 2500$ uit je hoofd, waar $a, b \geqslant 2$ gehele getallen zijn.

In het bijzonder dus:

- n^2 voor $n \leqslant 50$;
- n^3 voor $n \leqslant 13$;
- 2^n voor $n \leqslant 11$;
- 3^n voor $n \leqslant 7$.

Interessante SO's

Mijn docent had altijd de olympiade in het achterhoofd.
Zo hadden wij ooit het volgende SO:

Leermateriaal

Leer alle waardes van $a^b \leqslant 2500$ uit je hoofd, waar $a, b \geqslant 2$ gehele getallen zijn.

In het bijzonder dus:

- n^2 voor $n \leqslant 50$;
- n^3 voor $n \leqslant 13$;
- 2^n voor $n \leqslant 11$;
- 3^n voor $n \leqslant 7$.

Dat zijn veel getallen; vooral de kwadraten. Daarom hielp het om patronen te gebruiken.

Patronen in kwadraten

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$41^2 = 1681$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$	$42^2 = 1764$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$

Idee: het ontdekken van dit patroon is leuk. Hoe zorgen we ervoor dat de leerlingen het patroon moeten ontdekken, zonder abusievelijk het antwoord weg te geven?

JWO 2019

Idee: het ontdekken van dit patroon is leuk. Hoe zorgen we ervoor dat de leerlingen het patroon moeten ontdekken, zonder abusievelijk het antwoord weg te geven?

Opgave B1

Van elk van de getallen 1 tot en met 2019 berekenen we het kwadraat. Van elk van deze kwadraten nemen we het laatste cijfer en vervolgens tellen we die 2019 cijfers bij elkaar op.
Welk getal krijgen we als uitkomst?

Idee: het ontdekken van dit patroon is leuk. Hoe zorgen we ervoor dat de leerlingen het patroon moeten ontdekken, zonder abusievelijk het antwoord weg te geven?

Opgave B1

Van elk van de getallen 1 tot en met 2019 berekenen we het kwadraat. Van elk van deze kwadraten nemen we het laatste cijfer en vervolgens tellen we die 2019 cijfers bij elkaar op.
Welk getal krijgen we als uitkomst?

Antwoord: 9090.

Profielwerkstuk

- Mijn docent had lucht gekregen van mijn enthousiasme voor opgaven.
- Hij stelde voor: organiseer een eigen wiskundeolympiade op school met enkel je eigen opgaven.

Profielwerkstuk

- Mijn docent had lucht gekregen van mijn enthousiasme voor opgaven.
- Hij stelde voor: organiseer een eigen wiskundeolympiade op school met enkel je eigen opgaven.
- Ik vond dat een geweldig idee.
- “Wiskundewedstrijd op school”

Profielwerkstuk

- Mijn docent had lucht gekregen van mijn enthousiasme voor opgaven.
- Hij stelde voor: organiseer een eigen wiskundeolympiade op school met enkel je eigen opgaven.
- Ik vond dat een geweldig idee.
- "Wiskundewedstrijd op school"
- Voor klas 1 tot en met klas 6 aparte versies met 6 zelfbedachte opgaven in 60 minuten; na afloop prijsuitreiking.

Profielwerkstuk

- Mijn docent had lucht gekregen van mijn enthousiasme voor opgaven.
- Hij stelde voor: organiseer een eigen wiskundeolympiade op school met enkel je eigen opgaven.
- Ik vond dat een geweldig idee.
- "Wiskundewedstrijd op school"
- Voor klas 1 tot en met klas 6 aparte versies met 6 zelfbedachte opgaven in 60 minuten; na afloop prijsuitreiking.
- Conclusie: mijn opgaven waren te moeilijk...

Voorbeelden

JWO-2019-A1

Op een conferentie waren mensen uit vier landen: Nederland, België, Duitsland en Frankrijk. Er waren driemaal zoveel Nederlanders als Belgen en driemaal zoveel Duitsers als Fransen. Vijf van de aanwezigen telden het aantal aanwezigen (inclusief zichzelf). Ze telden respectievelijk 367, 368, 369, 370 en 371 mensen. Slechts één van hen telde goed. Wat is het correcte aantal aanwezigen?

Voorbeelden

JWO-2019-A1

Op een conferentie waren mensen uit vier landen: Nederland, België, Duitsland en Frankrijk. Er waren driemaal zoveel Nederlanders als Belgen en driemaal zoveel Duitsers als Fransen. Vijf van de aanwezigen telden het aantal aanwezigen (inclusief zichzelf). Ze telden respectievelijk 367, 368, 369, 370 en 371 mensen. Slechts één van hen telde goed. Wat is het correcte aantal aanwezigen?

Antwoord: 368. Waarom?

Voorbeelden

JWO-2019-A1

Op een conferentie waren mensen uit vier landen: Nederland, België, Duitsland en Frankrijk. Er waren driemaal zoveel Nederlanders als Belgen en driemaal zoveel Duitsers als Fransen. Vijf van de aanwezigen telden het aantal aanwezigen (inclusief zichzelf). Ze telden respectievelijk 367, 368, 369, 370 en 371 mensen. Slechts één van hen telde goed. Wat is het correcte aantal aanwezigen?

Antwoord: 368. Waarom?
Mensen komen in groepjes van vier; namelijk 1 Belg met 3 Nederlanders of 1 Fransman met 3 Duitsers. Dus altijd een viervoud.

Voorbeelden

1R-2022-A1

Een eilandengroep bestaat uit een groot, een middelgroot en een klein eiland. De gezamenlijke oppervlakte van de drie eilanden is 23 km^2. Het verschil tussen de oppervlaktes van het grote en het middelgrote eiland blijkt precies 1 km^2 meer te zijn dan de oppervlakte van het kleine eiland. Hoeveel km^2 is de oppervlakte van het grote eiland?

Voorbeelden

1R-2022-A1

Een eilandengroep bestaat uit een groot, een middelgroot en een klein eiland. De gezamenlijke oppervlakte van de drie eilanden is 23 km^2. Het verschil tussen de oppervlaktes van het grote en het middelgrote eiland blijkt precies 1 km^2 meer te zijn dan de oppervlakte van het kleine eiland. Hoeveel km^2 is de oppervlakte van het grote eiland?

Drie variabelen: klein K, middel M, groot G. Dan staat er:

$$\begin{cases} G + M + K = 23 \\ G - M = K + 1. \end{cases}$$

Voorbeelden

1R-2022-A1

Een eilandengroep bestaat uit een groot, een middelgroot en een klein eiland. De gezamenlijke oppervlakte van de drie eilanden is 23 km^2. Het verschil tussen de oppervlaktes van het grote en het middelgrote eiland blijkt precies 1 km^2 meer te zijn dan de oppervlakte van het kleine eiland. Hoeveel km^2 is de oppervlakte van het grote eiland?

Drie variabelen: klein K, middel M, groot G. Dan staat er:

$$\begin{cases} G + M + K = 23 \\ G - M = K + 1. \end{cases}$$

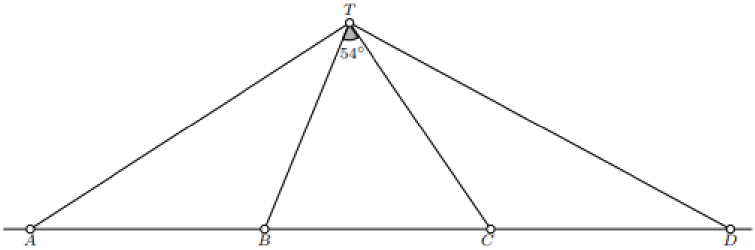
Tel deze vergelijkingen bij elkaar op:

$$2G + K = K + 24 \implies 2G = 24 \implies G = 12.$$

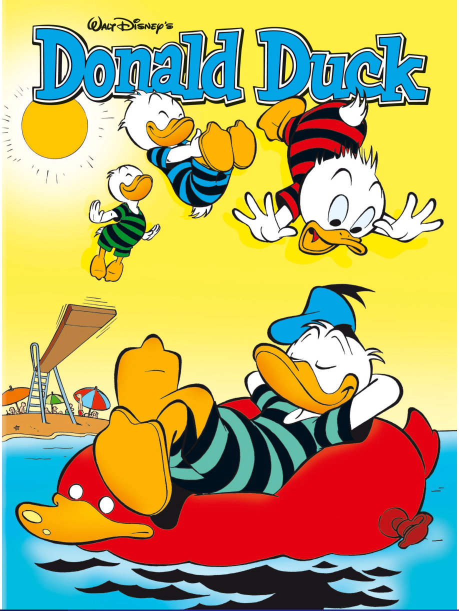
De andere eilanden kun je niet weten!

JWO-2019-B4

Op een lijn liggen (in deze volgorde) vier punten A, B, C en D. Buiten de lijn ligt een punt T zo dat $|AB| = |BT|$ en $|CD| = |CT|$. Bovendien is hoek T van driehoek BTC gelijk aan 54 graden. In de figuur zie je een schets; hoeken en afmetingen kloppen niet precies.
Bepaal hoek T van driehoek ATD.



Donald Duck



Puzzelrubriek

Artistieke Impressie Donald Duck Opgave

De tabel hieronder bevat een aantal kloppende sommen, maar de cijfers zijn vervangen door letters. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Voor welk cijfer staat de letter E?

ABC	+	ADD	=	CE6
-		/		/
ADF	-	GC	=	GD
=		=		=
6	-	C	=	4

Artistieke Impressie Donald Duck Opgave

De tabel hieronder bevat een aantal kloppende sommen, maar de cijfers zijn vervangen door letters. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Voor welk cijfer staat de letter E?

ABC	+	ADD	=	CE6
-		/		/
ADF	-	GC	=	GD
=		=		=
6	-	C	=	4

Vraag: kan het ook zonder hulpcijfers?

Opgaven

1R-2020-A6

De tabel hieronder bevat een aantal kloppende sommen, maar de cijfers zijn vervangen door letters. Verschillende letters staan voor verschillende cijfers. Voor welk cijfer staat de letter E?

ABC	+	ADD	=	CEF
-		/		/
ADF	-	GC	=	GD
=		=		=
F	-	C	=	D

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Meest gegeven antwoord destijds: 1.

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Meest gegeven antwoord destijds: 1. Andere gok:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9 \cdot 10 = 3628800.$$

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Meest gegeven antwoord destijds: 1. Andere gok:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9 \cdot 10 = 3628800.$$

Correcte antwoord:

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520.$$

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Meest gegeven antwoord destijds: 1. Andere gok:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9 \cdot 10 = 3628800.$$

Correcte antwoord:

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520.$$

Idee voorgelegd aan opgavencommissie; te weinig creativiteit vereist, terug naar de tekentafel.

Ideeën verfijnen

Destijds in 2014 had ik de volgende opgave gebruikt voor mijn eigen olympiade op de middelbare school:

Opgave.

Wat is het kleinste positieve gehele getal dat deelbaar is door de getallen 1 tot en met 10?

Meest gegeven antwoord destijds: 1. Andere gok:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9 \cdot 10 = 3628800.$$

Correcte antwoord:

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520.$$

Idee voorgelegd aan opgavencommissie; te weinig creativiteit vereist, terug naar de tekentafel.
Lang nagedacht over hoe je de leerlingen kan laten spelen met priemen en kleine getallen, zonder het antwoord weg te geven.

Eindresultaat

2R-2023-B1

Een lerares maakt van de getallen 1 tot en met 12 een grote breuk. Ze schrijft een deel van de getallen in de teller en zet $\times$-tekens tussen die getallen. De overige getallen zet ze in de noemer, weer met $\times$-tekens tussen die getallen. Zowel in de teller als in de noemer staat minstens één getal. Ze doet dit op zo'n manier dat de breuk gelijk is aan een zo klein mogelijk *geheel* getal. Wat is dit getal?

Schrijf uit: $1 \times 2 \times \ldots \times 12 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$.

Eindresultaat

2R-2023-B1

Een lerares maakt van de getallen 1 tot en met 12 een grote breuk. Ze schrijft een deel van de getallen in de teller en zet $\times$-tekens tussen die getallen. De overige getallen zet ze in de noemer, weer met $\times$-tekens tussen die getallen. Zowel in de teller als in de noemer staat minstens één getal. Ze doet dit op zo'n manier dat de breuk gelijk is aan een zo klein mogelijk *geheel* getal. Wat is dit getal?

Schrijf uit: $1 \times 2 \times \ldots \times 12 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$.
Het antwoord is dus minstens $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$, en met proberen blijkt dit ook te kunnen:

$$\frac{4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8} = 231.$$

Collatz-vermoeden

Het volgende is een open probleem in the wiskunde: kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ 3n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Komen we voor elk startgetal ooit vast in de loop

$$1 \to 4 \to 2 \to 1 \to \ldots?$$

Collatz-vermoeden

Het volgende is een open probleem in the wiskunde: kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal} = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ 3n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Komen we voor elk startgetal ooit vast in de loop

$$1 \to 4 \to 2 \to 1 \to \dots ?$$

Beschouwd als een van de moeilijkste open problemen in de moderne wiskunde. Het gedrag is enorm onvoorspelbaar:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 13 \to 40 \to 5 \to 16 \to 1 \to \dots$$

Collatz-vermoeden

Het volgende is een open probleem in the wiskunde: kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal} = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ 3n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Komen we voor elk startgetal ooit vast in de loop

$$1 \to 4 \to 2 \to 1 \to \ldots ?$$

Beschouwd als een van de moeilijkste open problemen in de moderne wiskunde. Het gedrag is enorm onvoorspelbaar:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 13 \to 40 \to 5 \to 16 \to 1 \to \ldots$$

Interessante observatie: vermoeden houdt geen steek voor bijvoorbeeld $3n - 1$. Bijvoorbeeld,

$$5 \to 14 \to 7 \to 20 \to 5 \to \ldots$$

Kunnen we de regel veranderen en wel oplosbare varianten krijgen?

Idee 1

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Komen we voor elk startgetal ooit vast in de loop

$$1 \to 2 \to 1 \to \ldots ?$$

Idee 1

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Komen we voor elk startgetal ooit vast in de loop

$$1 \to 2 \to 1 \to \ldots?$$

Ja, want $(n+1)/2 < n$ voor $n > 1$ dus wordt een getal na twee stappen altijd kleiner. Niet interessant?

Idee 1

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Komen we voor elk startgetal ooit vast in de loop

$$1 \to 2 \to 1 \to \ldots?$$

Ja, want $(n+1)/2 < n$ voor $n > 1$ dus wordt een getal na twee stappen altijd kleiner. Niet interessant? Hoe komen we vanaf, zeg, 219 bij 1?

$$219 \to 220 \to 110 \to 55 \to 56 \to 28 \to 14 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Idee 1

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Komen we voor elk startgetal ooit vast in de loop

$$1 \to 2 \to 1 \to \dots ?$$

Ja, want $(n+1)/2 < n$ voor $n > 1$ dus wordt een getal na twee stappen altijd kleiner. Niet interessant? Hoe komen we vanaf, zeg, 219 bij 1?

$$219 \to 220 \to 110 \to 55 \to 56 \to 28 \to 14 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Dit is de snelste manier; gewoon gretig spelen. Maar wat als we het spel omdraaien? Dan is het plots niet meer zo duidelijk.

Eindversie

1R-2021-A5

Op het krijtbord staat het getal 1. Een zet bestaat eruit het getal op het bord weg te vegen en te vervangen door het dubbele van het getal of door het getal dat 1 kleiner is. Het getal 1 mag bijvoorbeeld vervangen worden door 2 (het dubbele) of 0 (één kleiner), en als het getal 5 op het bord staat, mag je dat vervangen door 10 of 4.
Wat is het minimale aantal zetten dat nodig is om het getal 2021 op het bord te schrijven?

Eindversie

1R-2021-A5

Op het krijtbord staat het getal 1. Een zet bestaat eruit het getal op het bord weg te vegen en te vervangen door het dubbele van het getal of door het getal dat 1 kleiner is. Het getal 1 mag bijvoorbeeld vervangen worden door 2 (het dubbele) of 0 (één kleiner), en als het getal 5 op het bord staat, mag je dat vervangen door 10 of 4.
Wat is het minimale aantal zetten dat nodig is om het getal 2021 op het bord te schrijven?

Oplossing: draai het probleem om en werk achteruit.
Vooruit is echt heel lastig!

Idee 2

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2 - 1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Nu verwachten we eigenlijk dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan.

Idee 2

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal} = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2 - 1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Nu verwachten we eigenlijk dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Toch gebeurt het soms nog:

$$11 \to 120 \to 15 \to 224 \to 7 \to 48 \to 3 \to 8 \to 1.$$

Blijkt: heel moeilijk!

Idee 2

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2 - 1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Nu verwachten we eigenlijk dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Toch gebeurt het soms nog:

$$11 \to 120 \to 15 \to 224 \to 7 \to 48 \to 3 \to 8 \to 1.$$

Blijkt: heel moeilijk! Ik kon het oplossen met behulp van een gepubliceerd artikel uit 2002 waarin de vergelijking

$$2^n \pm 2^m \pm 2^k = z^2$$

geheel wordt opgelost. Is dit probleem dus altijd te lastig?

Niet opgeven

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Nu verwachten we weer dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Sterker nog:

$$3 \to 10 \to 5 \to 26 \to 13 \to 170 \to 85 \to \dots$$

We delen altijd maar 1 keer door 2...

Niet opgeven

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Nu verwachten we weer dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Sterker nog:

$$3 \to 10 \to 5 \to 26 \to 13 \to 170 \to 85 \to \dots$$

We delen altijd maar 1 keer door 2... Inderdaad,
$(2k+1)^2 + 1 = 2(2k^2 + 2k + 1)$.

Niet opgeven

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Nu verwachten we weer dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Sterker nog:

$$3 \to 10 \to 5 \to 26 \to 13 \to 170 \to 85 \to \dots$$

We delen altijd maar 1 keer door 2... Inderdaad,
$(2k+1)^2+1 = 2(2k^2+2k+1)$. Wat met n^2+3?

$$5 \to 28 \to 7 \to 52 \to 13 \to 172 \to 43 \to \dots$$

We delen altijd precies 2 keer 2...

Niet opgeven

Kies een positief geheel startgetal. Pas dan de volgende regel toe:

$$\text{nieuwe getal } = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is;} \\ n^2+1 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Blijf dit het halen. Nu verwachten we weer dat de meeste getallen niet meer naar 1 gaan. Sterker nog:

$$3 \to 10 \to 5 \to 26 \to 13 \to 170 \to 85 \to \dots$$

We delen altijd maar 1 keer door 2... Inderdaad,
$(2k+1)^2+1 = 2(2k^2+2k+1)$. Wat met n^2+3?

$$5 \to 28 \to 7 \to 52 \to 13 \to 172 \to 43 \to \dots$$

We delen altijd precies 2 keer 2... Merk op $(2k+1)^2+3 = 4(k^2+k+1)$ en k^2+k+1 is altijd oneven. Dat is al best subtiel!

Finale 2023 Opgave 3

Felix kiest een positief geheel getal als startgetal en schrijft het op het bord. Hij herhaalt vervolgens telkens de volgende stap: hij vervangt het getal n op het bord door $n/2$ als n even is en door $n^2 + 3$ als n oneven is. Voor hoeveel keuzes van startgetallen onder de 2023 zal Felix nooit een getal van meer dan vier cijfers op het bord schrijven?

Eindversie

Finale 2023 Opgave 3

Felix kiest een positief geheel getal als startgetal en schrijft het op het bord. Hij herhaalt vervolgens telkens de volgende stap: hij vervangt het getal n op het bord door $n/2$ als n even is en door $n^2 + 3$ als n oneven is. Voor hoeveel keuzes van startgetallen onder de 2023 zal Felix nooit een getal van meer dan vier cijfers op het bord schrijven?

Antwoord: blijkt dat

$$1 \to 4 \to 2 \to 1 \quad \text{en} \quad 3 \to 12 \to 6 \to 3$$

de enige loops zijn, want verder geldt $n^2 + 3 > 4n$. Dus alle startgetallen zijn van de vorm 2^n of $3 \cdot 2^n$.

IMC Training

Tweemaal heb ik in Amsterdam zelf het vak gegeven. Om het UvA-team te selecteren, namen we aan het eind een toets af. Hiervoor moesten opgaven verzonnen of verzameld worden.

Tweemaal heb ik in Amsterdam zelf het vak gegeven. Om het UvA-team te selecteren, namen we aan het eind een toets af. Hiervoor moesten opgaven verzonnen of verzameld worden.
Op *Art Of Problem Solving* vond ik iets wat leek op de volgende opgave:

Opgave.

Op een $2n \times 2n$ bord zit op elk vakje een sprinkhaan. Plots springt elke sprinkhaan naar een naastgelegen vakje op het bord. Hoeveel vakjes zijn er nu maximaal leeg?

Voor $n = 1$ is het wel makkelijk, maar $n = 2$ was al best een puzzeltje!

Tweemaal heb ik in Amsterdam zelf het vak gegeven. Om het UvA-team te selecteren, namen we aan het eind een toets af. Hiervoor moesten opgaven verzonnen of verzameld worden.
Op *Art Of Problem Solving* vond ik iets wat leek op de volgende opgave:

Opgave.

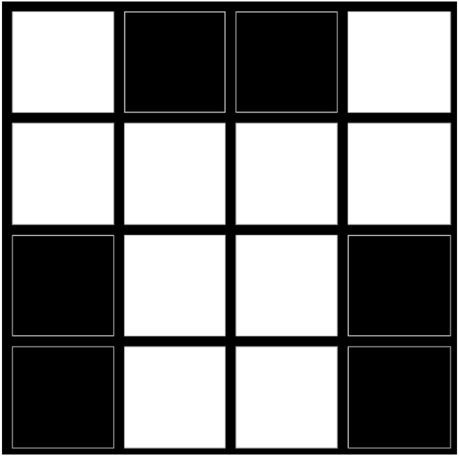
Op een $2n \times 2n$ bord zit op elk vakje een sprinkhaan. Plots springt elke sprinkhaan naar een naastgelegen vakje op het bord. Hoeveel vakjes zijn er nu maximaal leeg?

Voor $n = 1$ is het wel makkelijk, maar $n = 2$ was al best een puzzeltje!

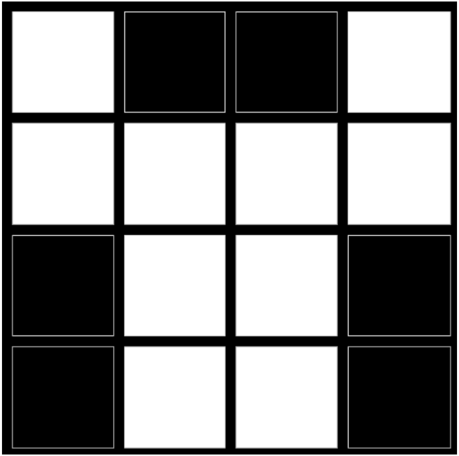
1R-2020-A5

Op een 4×4-bord zitten 16 sprinkhanen, elk op een eigen vakje. Op een bepaald moment springt elke sprinkhaan naar een aangrenzend vakje, maar niet diagonaal en niet van het bord af. Wat is het maximale aantal vakjes dat daarna leeg kan zijn?

Oplossing



Oplossing



Alle sprinkhanen kunnen eindigen op een zwart vakje, en alle sprinkhanen op zwarte vakjes moeten naar andere vakjes springen. Het antwoord is dus 6.

Mooie opgaven

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!

Mooie opgaven

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!
- Ga te werk alsof je altijd binnenkort een toets klaar moet hebben liggen. Zo kijk je automatisch anders naar veel zaken.

Mooie opgaven

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!
- Ga te werk alsof je altijd binnenkort een toets klaar moet hebben liggen. Zo kijk je automatisch anders naar veel zaken.
- Sta jezelf toe om recreatief met wiskunde bezig te zijn! Blijf spelen; dan komt er vanzelf wat uit. Zo leert mijn ervaring!

Mooie opgaven

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!
- Ga te werk alsof je altijd binnenkort een toets klaar moet hebben liggen. Zo kijk je automatisch anders naar veel zaken.
- Sta jezelf toe om recreatief met wiskunde bezig te zijn! Blijf spelen; dan komt er vanzelf wat uit. Zo leert mijn ervaring!
- Wanneer is een opgave nou mooi?

Mooie opgaven

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!
- Ga te werk alsof je altijd binnenkort een toets klaar moet hebben liggen. Zo kijk je automatisch anders naar veel zaken.
- Sta jezelf toe om recreatief met wiskunde bezig te zijn! Blijf spelen; dan komt er vanzelf wat uit. Zo leert mijn ervaring!
- Wanneer is een opgave nou mooi?
- Uiteindelijk heel subjectief. Misschien gewoon:

Mooie opgaven

- Probeer allerdaagse dingen die je tegenkomt om te vormen in vraagstukken. Kleine argumentjes zijn soms erg leuk!
- Ga te werk alsof je altijd binnenkort een toets klaar moet hebben liggen. Zo kijk je automatisch anders naar veel zaken.
- Sta jezelf toe om recreatief met wiskunde bezig te zijn! Blijf spelen; dan komt er vanzelf wat uit. Zo leert mijn ervaring!
- Wanneer is een opgave nou mooi?
- Uiteindelijk heel subjectief. Misschien gewoon:
- *Een opgave is mooi als je het leuk vond om hem op te lossen.*

Workshop

- Hierna: workshop over zelf olympiade-opgaven maken!
- Geïnspireerd door deze voorbeelden? Of heb je zelf al lang een leuk idee? Kom vooral langs!
- Wij hebben ook enkele ideeën al voor jullie voorbereid.
- Wie weet komt jouw opgave dan misschien ooit op de echte wiskunde olympiade...

Workshop

- Hierna: workshop over zelf olympiade-opgaven maken!
- Geïnspireerd door deze voorbeelden? Of heb je zelf al lang een leuk idee? Kom vooral langs!
- Wij hebben ook enkele ideeën al voor jullie voorbereid.
- Wie weet komt jouw opgave dan misschien ooit op de echte wiskunde olympiade...

Veel dank voor de aandacht!