

Thuisopdracht 1 Analyse 3 (2013-2014)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: donderdag 12 september 2013.

Inleveren uitwerkingen: voor het college van donderdag 19 september, 11.15 u.

- 1.) Beschouw voor $t > 0$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ de differentiaalvergelijking,

$$\dot{y} - \frac{\alpha}{t} y = b(t).$$

- (a) Bepaal voor $\alpha \in \mathbb{R}$ de algemene oplossing van het homogene ($b(t) \equiv 0$) probleem.
- (b) Neem $y(1) = 1$. Geef voor algemene $b(t)$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ de oplossing van het inhomogene probleem.
- (c) Kies $b(t) = t^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ en wederom $y(1) = 1$: bepaal de oplossing $y(t; \alpha, \beta)$. Voor welke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geldt $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t; \alpha, \beta) = 0$?

- 2.) Beschouw de differentiaalvergelijking,

$$y \dot{y} + t - 2 = 0; \quad y(2) = 1.$$

- (a) Laat zien dat deze vergelijking exact is.
- (b) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem in de vorm $y(t) =$ een expliciete functie van t .
- (c) Wat is het domein van de oplossing $y(t)$? Geef een schets van $y(t)$.

- 3.) Beschouw voor $\alpha \in \mathbb{R}$ de differentiaalvergelijking,

$$\dot{y} = \sqrt{y}, \quad y(0) = \alpha.$$

- (a) Neem $\alpha = 0$. Construeer voor alle $n \geq 0$ benaderende oplossingen $y_n(t; 0)$ met behulp van Picard-iteratie (met de standaardkeuze $y_0(t; 0) \equiv y(0) = 0$). Bepaal de limietoplossing $y(t; 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t; 0)$.
- (b) Neem $\alpha \neq 0$. Neem $y_0(t; \alpha) \equiv y(0) = \alpha$ en construeer de volgende twee benaderingen $y_1(t; \alpha)$ en $y_2(t; \alpha)$ met behulp van Picard-iteratie.
- (c) Neem $\alpha \neq 0$. Bepaal *zonder verder hogere iteraties uit te rekenen* de limiet $y(t; \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t; \alpha)$. Leg uit hoe je aan je antwoord komt.
Merk op dat $\lim_{\alpha \rightarrow 0} y(t; \alpha) \neq y(t; 0)$!
- (d) Neem $\alpha = 0$. De Picard-iteratiemethode kan ook starten vanuit een andere beginkeuze. Neem als niet-standaardkeuze $\tilde{y}_0(t; 0) = t^2$. Construeer nu wederom voor alle $n \geq 0$ benaderende oplossingen $\tilde{y}_n(t; 0)$ met behulp van Picard-iteratie (nu dus met $\tilde{y}_0(t; 0) = t^2$). Bepaal de limietoplossing $\tilde{y}(t; 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}_n(t; 0)$.
Hint. Schrijf $\tilde{y}_n = 2^{\gamma_n} t^2$ en druk γ_n uit in γ_{n-1} .
- (e) Neem $\alpha \neq 0$. Stel dat we ook in dit geval het Picard-iteratieproces vanuit een andere niet-standaardkeuze $\tilde{y}_0(t; \alpha)$ beginnen ^(*). Wat kan je zeggen over de limiet $\tilde{y}(t; \alpha)$? Leg uit.

^(*) Hierbij kan je aannemen dat ook voor meer algemene $\tilde{y}_0$ het Picard-iteratieproces convergeert.