

Thuisopdracht 2 Analyse 3 (2013-2014)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: donderdag 19 september 2013.

Inleveren uitwerkingen: voor het college van donderdag 26 september, 11.15 u.

- 1.) Beschouw voor $t > 0$ de lineaire differentiaalvergelijking,

$$t\ddot{y} - (2t + 1)\dot{y} + 2y = 0.$$

- (a) Gegeven is dat $y_1(t) = e^{\alpha t}$ een oplossing is van de vergelijking voor zekere $\alpha \in \mathbb{R}$. Bepaal deze α .
 - (b) Bepaal een tweede lineair onafhankelijke oplossing $y_2(t)$ van deze vergelijking.
Hint. Gebruik òf de methode van ‘variatie van constanten’/‘reduction of order’ òf doe een ‘verstandige gok’.
 - (c) Bepaal de oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden $y(1) = 2$, $\dot{y}(1) = 0$.
- 2.) Beschouw de differentiaalvergelijking,

$$\ddot{y} - y = g(t),$$

waarbij $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voldoende glad is.

- (a) Bepaal de algemene oplossing $y_{\text{hom}}(t)$ van het homogene ($g(t) \equiv 0$) probleem.
 - (b) Laat voor $y_{\text{hom}}(t)$ als in (a) zien dat $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{hom}}(t) e^{-\mu t} = 0$ voor alle $\mu > 1$.
 - (c) Bepaal de algemene oplossing $y_{\text{in}}(t)$ van het inhomogene probleem *voor een algemene functie* $g(t)$ – dus aan de hand van integraaluitdrukkingen.
 - (d) Gegeven is dat er een $M > 0$ bestaat zodanig dat $|g(t)| < M$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Laat nu voor $y_{\text{in}}(t)$ als in (c) zien dat wederom $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{in}}(t) e^{-\mu t} = 0$ voor alle $\mu > 1$.
Hint. Toon eerst aan dat $|\int_0^t g(s)e^s ds| < M(e^t - 1)$ en $|\int_0^t g(s)e^{-s} ds| < M(1 - e^{-t})$.
- 3.) Beschouw voor $\alpha < t < \beta$ de lineaire tweede orde vergelijking,

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0,$$

waarbij $p(t)$ en $q(t)$ continue functies zijn op het interval (α, β) ; $y_1(t)$ en $y_2(t)$ zijn gegeven als twee lineair onafhankelijke oplossingen van deze vergelijking.

- (a) Stel er is een $t_1 \in (\alpha, \beta)$ zodanig dat $y_1(t_1) = 0$. Laat zien dat $y_2(t_1) \neq 0$.
Hint. Beschouw de bij $y_1(t)$ en $y_2(t)$ horende Wronskiaan $W(t)$.
- (b) Stel dat $y_1(t)$ een minimum of maximum heeft in $\hat{t}_1 \in (\alpha, \beta)$. Laat zien dat y_2 geen minimum of maximum kan aannemen in $t = \hat{t}_1$.
- (c) Stel dat $y_1(t)$ een buigpunt heeft in $\tilde{t}_1 \in (\alpha, \beta)$. Laat zien dat y_2 geen buigpunt kan hebben in $t = \tilde{t}_1$, tenzij $p(\tilde{t}_1) = q(\tilde{t}_1) = 0$.

Opmerking: Zie ook som 15 t/m 17 in paragraaf 2.1.