

Thuisopdracht 3 Analyse 3 (2013-2014)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: donderdag 26 september 2013.

Inleveren uitwerkingen: voor het college van donderdag 10 oktober, 11.15 u.

- 1.) Beschouw voor $t > 0$ de inhomogene Euler vergelijking,

$$t^2\ddot{y} + t\dot{y} - y = f(t).$$

- (a) Neem eerst $f(t) \equiv 0$: bepaal de algemene oplossing van de homogene vergelijking.
- (b) Neem nu $f(t) = t^\gamma$: bepaal voor alle $\gamma \in \mathbb{R}$ de algemene oplossing van deze inhomogene vergelijking.

- 2.) Beschouw voor $\alpha \geq 0$ de Legendre (differentiaal)vergelijking,

$$(1 - t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + \alpha(\alpha + 1)y = 0. \quad (1)$$

- (a) Bepaal door middel van reeksontwikkelingen rond $t_0 = 0$ twee onafhankelijke oplossingen $y_1(t; \alpha)$ en $y_2(t; \alpha)$ van de Legendre vergelijking.
- (b) Uit vergelijking (1) kan je – zonder deze expliciet op te lossen – direct een ondergrens voor de convergentiestraal van de oplossingen van deze vergelijking afleiden. Wat is die ondergrens? Bepaal de exacte convergentiestralen van $y_1(t; \alpha)$ en $y_2(t; \alpha)$ aan de hand van de in (a) gevonden machtreeksen.
- (c) Laat zien dat de Legendre vergelijking (1) een polynomiale oplossing van graad n heeft als $\alpha = n$.
Hint. Voor welke α kunnen de machtreeksen uit (a) afbreken/reduceren tot eindige reeksen?

- (d) Het Legendre polynoom $P_n(t)$ is gedefinieerd als de n -de graads polynoomoplossing van (1) met $\alpha = n$, zoals gevonden in (c), waarvoor geldt dat $P_n(1) = 1$. Laat zien dat $P_0(t) = 1$ en $P_1(t) = t$; bepaal $P_2(t)$ en $P_3(t)$.
- (e) Neem $\alpha = 0$. Uit (d) weten we dat $P_0(t) = 1$ een oplossing is van (1); definieer $\tilde{y}_1(t; 0) = P_0(t) = 1$. Bepaal direct uit (1), en dus zonder gebruik te maken van (a), een tweede onafhankelijke oplossing $\tilde{y}_2(t; 0)$ van (1).
- (f) Neem nog steeds $\alpha = 0$. Bepaal, *zonder gebruik te maken van (a)*, de machtreeksontwikkeling van $\tilde{y}_2(t; 0)$ uit (e). Verifieer dat deze overeenkomt met de in (a) gevonden resultaten.
Hint. Bepaal de machtreeks van $\tilde{y}_2(t; 0)$ uit die van $\dot{\tilde{y}}_2(t; 0)$.

- (g) Neem $\alpha = 1$. Uit (d) weten we dat $P_1(t) = t$ een oplossing is van (1) en we definiëren dus $\tilde{y}_1(t; 1) = P_1(t) = t$. Bepaal direct uit (1), en dus zonder gebruik te maken van (a), een tweede onafhankelijke oplossing $\tilde{y}_2(t; 1)$ van (1) – deze uitdrukking kan/mag nog één integraal bevatten.
- (h) Neem nog steeds $\alpha = 1$. Wat is de machtreeksontwikkeling van de in (g) gevonden oplossing $\tilde{y}_2(t; 1)$?
Opmerking & Waarschuwing. Hiervoor mogen nu *wel* de machtreeksontwikkelingen uit (a) worden gebruikt. Echter, a priori weten we alleen dat $\tilde{y}_2(t; 1)$ een lineaire combinatie van $y_1(t; 1)$ en $y_2(t; 1)$ uit (a) is. Hoe ziet die combinatie er uit? Waarom?

Opmerking: Zie ook som opgave 10 op p. 197 in paragraaf 2.8 van het boek.