

Thuisopdracht 4 Analyse 3 (2013-2014)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: donderdag 17 oktober 2013.

Inleveren uitwerkingen: voor het college van donderdag 31 oktober, 11.15 u.

- 1.) Beschouw voor $\beta \in \mathbb{R}$ het 2-dimensionale stelsel,

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + \beta y, \\ \dot{y} &= x + y; \end{cases} \quad (1)$$

$\vec{\phi}_\beta(t; (x_0, y_0))$ is gedefinieerd als de oplossing van (1) met $\vec{\phi}_\beta(0; (x_0, y_0)) = (x_0, y_0)$.

- (a) Neem $\beta = 0$. Bepaal $\vec{\phi}_0(t; (1, 1))$, ofwel: de oplossing van (1) met $\beta = 0$ die op $t = 0$ de waarde $(1, 1)$ aanneemt.
 - (b) Neem $\beta = -5$. Bepaal $\vec{\phi}_{-5}(t; (-2, 1))$, ofwel: de oplossing van (1) met $\beta = -5$ die op $t = 0$ de waarde $(-2, 1)$ aanneemt.
 - (c) Neem $\beta = -5$. Laat zien dat voor alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\phi}_{-5}(t; (x_0, y_0)) = (0, 0)$.
 - (d) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\phi}_\beta(t; (x_0, y_0)) = (0, 0)$ voor alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$?
- 2.) Beschouw het 3-dimensionale stelsel,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}. \quad (2)$$

- (a) Bepaal 3 onafhankelijke oplossingen $\vec{\psi}_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, van vergelijking (2).
 - (b) Zij $\vec{\psi}(t; \vec{x}_0)$ de oplossing van (2) met $\vec{\psi}(0; \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Voor welke $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{\psi}(t; \vec{x}_0)\| = \infty$?
- 3.) Beschouw voor $n \geq 2$ de n -de orde vergelijking,

$$x^{(n)} + p_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + p_2\ddot{x} + p_1\dot{x} + p_0x = 0, \quad (3)$$

waarin $p_j \in \mathbb{R}$ constant zijn ($j = 0, \dots, n-1$). Zoals bekend heeft (3) oplossingen van de vorm $x(t) = e^{rt}$ als r een oplossing is van het *karakteristieke polynoom* $\rho_{n,eq}(r) = 0$, waarbij $\rho_{n,eq}(r)$ gegeven is door,

$$\rho_{n,eq}(r) = r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \dots + p_2r^2 + p_1r + p_0, \quad (4)$$

- (a) Schrijf vergelijking (3) als een n -dimensionaal systeem. Ofwel: definieer een vectorwaardige functie $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ en een $n \times n$ matrix $A_{n,s}$ (met constante coëfficiënten) zodanig dat (3) geschreven kan worden als $\dot{\vec{x}} = A_{n,s}\vec{x}$.

Definieer $\rho_{n,s}(\lambda)$ als het n -de orde polynoom gegeven door het eigenwaardeprobleem $\det(A_{n,s} - \lambda I) = 0$. Merk op dat $\rho_{n,s}(\lambda)$ ook *karakteristiek polynoom* genoemd wordt.

- (b) Neem eerst $n = 2$: bepaal $\rho_{2,s}(\lambda)$ en laat zien dat voor $r = \mu = \lambda$ geldt dat $\rho_{2,s}(\mu) = \rho_{2,eq}(\mu)$ (met $\rho_{2,eq}$ als in (4) met $n = 2$).
- (c) Neem $n = 3$: laat zien dat $\rho_{3,s}(\mu) = -\rho_{3,eq}(\mu)$.
- (d) Laat zien dat $\rho_{n,s}(\mu) = (-1)^n \rho_{n,eq}(\mu)$ voor alle $n \geq 2$.