

# Thuisopdracht 5 Analyse 3 (2013-2014)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: donderdag 31 oktober 2013.

Inleveren uitwerkingen: voor het college van donderdag 14 november, 11.15 u.

1.) Beschouw de tweede orde vergelijking,

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0. \quad (1)$$

(a) Schrijf (1) in de vorm van een 2-dimensionaal stelsel,

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

Bepaal  $f(x, y)$  en  $g(x, y)$  en de kritieke punten  $(x_j^*, y_j^*)$ ,  $j = 1, 2, 3$  van (2).

(b) Bepaal een expliciete relatie  $\mathcal{R}(x, y; H)$  zodanig dat iedere oplossing van (1)/(2) op een niveaукromme  $\mathcal{R}(x, y; H) = 0$  ligt (voor zekere  $H \in \mathbb{R}$ ).

*Hint.* Of vermenigvuldig (1) met  $\dot{x}$  en integreer, of los  $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$  uit (2) op.

(c) Bepaal voor ieder van de kritieke punten  $(x_j^*, y_j^*)$  uit (a) de waarden  $H_j^* \in \mathbb{R}$  waarvoor  $\mathcal{R}(x_j^*, y_j^*; H_j^*) = 0$ . Geef een (duidelijke!) schets van de niveaукrommen  $\mathcal{R}(x, y; H_j^*) = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

(d) Geef een (duidelijke) schets van het volledige faseportret van (1)/(2). Geef ook de ‘stroom-richtingen’ (met pijltjes) aan.

(e) Zij  $\vec{\psi}(t; (x_0, y_0))$  de oplossing van (1)/(2) met beginvoorwaarde  $(x_0, y_0)$ . Voor welke  $(x_0, y_0)$  geldt dat  $\vec{\psi}(t; (x_0, y_0))$  begrensd is voor alle  $t \in \mathbb{R}$ ? Geef dit (duidelijk) aan in het faseportret.

(f) Voor welke  $(x_0, y_0)$  geldt dat  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\psi}(t; (x_0, y_0))$  bestaat? Wat is de bijbehorende limiet?

2.) Beschouw voor  $\alpha \in \mathbb{R}$  het 2-dimensionale stelsel,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & -2\alpha \end{pmatrix} \vec{x}. \quad (3)$$

(a) Neem  $\alpha = 5$ . Bepaal de algemene oplossing  $\vec{x}_5(t)$  van (3). Laat zien dat voor alle  $\vec{x}_5(t)$  geldt dat  $\vec{x}_5(t) \rightarrow (0, 0)$  als  $t \rightarrow \infty$ . Geef een (duidelijke) schets van het faseportret, incl. richtingspijltjes, gebruikmakend van de bij dit probleem horende eigenvectoren. Geef duidelijk aan hoe een oplossing  $\vec{x}_5(t)$   $(0, 0)$  benadert voor  $t \rightarrow \infty$ .

(b) Neem  $\alpha = 3$ . Bepaal de algemene oplossing  $\vec{x}_3(t)$  van (3). Laat zien dat voor alle  $\vec{x}_3(t)$  geldt dat  $\vec{x}_3(t) \rightarrow (0, 0)$  als  $t \rightarrow \infty$ . Geef een (duidelijke) schets van het faseportret, incl. richtingspijltjes, gebruikmakend van de bij dit probleem horende (gegeneraliseerde) eigenvectoren. Geef duidelijk aan hoe een oplossing  $\vec{x}_3(t)$   $(0, 0)$  benadert voor  $t \rightarrow \infty$ .

(c) Neem  $\alpha = 0$ . Bepaal de algemene oplossing  $\vec{x}_0(t)$  van (3). Laat zien dat, behalve het kritieke punt  $(0, 0)$  zelf, alle oplossingen  $\vec{x}_0(t)$  periodieke banen zijn die in het fasevlak op ellipsen rond  $(0, 0)$  liggen. Bepaal deze ellipsen. Geef een (duidelijke) schets van het faseportret, incl. richtingspijltjes.

(d) Voor welke  $\alpha \in \mathbb{R}$  geldt voor de algemene oplossing  $\vec{x}_\alpha(t)$  van (3) dat  $\vec{x}_\alpha(t) \rightarrow (0, 0)$  als  $t \rightarrow \infty$  (onafhankelijk van de beginvoorwaarden)?

(e) Schrijf  $\vec{x}_\alpha(t) = (x_{1,\alpha}(t), x_{2,\alpha}(t))$  en neem  $\alpha$  zoals gevonden in (d) – ofwel, kies  $\alpha$  zo dat  $(x_{2,\alpha}(t), x_{1,\alpha}(t)) \rightarrow (0, 0)$  als  $t \rightarrow \infty$ . Voor welke  $\alpha \in \mathbb{R}$  geldt dat de limiet  $x_{2,\alpha}(t)/x_{1,\alpha}(t)$  bestaat?