

Thuisopdracht 7 Analyse 3 (2013-2014)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: maandag 9 december 2013.

Inleveren uitwerkingen: voor 11 uur op vrijdag 20 december, in het postvakje van Eric Siero.

1.) Bekijk het stelsel

$$\begin{aligned}x' &= -4x - y - 3xy + x(x^2 + y^2) \\ y' &= x - 4y + y(x^2 + y^2 - 3y)\end{aligned}$$

- (a) Klassificeer het vaste punt in de oorsprong. Maw geef karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en stabiliteit.
- (b) Schrijf het stelsel in poolcoördinaten r en θ .
- (c) Bewijs dat er minstens 1 periodieke oplossing bestaat.

2.) Beschouw voor $\mu \in \mathbb{R}$ het stelsel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - x - 2y + y^2 \\ \dot{y} &= (y - 1)(x - \mu).\end{aligned}\tag{1}$$

- (a) Neem $\mu = 1$. Bepaal de kritieke/vaste punten van (1) en karakteriseer deze als oplossingen van de bijbehorende gelineariseerde systemen. Geef voor elk punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel of instabiel is.
- (b) Bepaal de kritieke punten van (1) voor algemene $\mu \in \mathbb{R}$. Voor welke $\mu = \mu_*$ vindt er een bifurcatie plaats? Geef voor elke $\mu \neq \mu_*$ en voor elk kritiek punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel of instabiel is.
- (c) Neem $\mu = 1$ en definieer de lijnen $\ell_{\pm} = \{y \pm x = 1\}$. Laat zien dat beide lijnen $\ell_{\pm}$ *invariant* zijn onder (1). Ofwel, laat zien dat voor een oplossing $\phi(t; (x_0, y_0))$ van (1) met beginvoorwaarde $\phi(0; (x_0, y_0)) = (x_0, y_0) \in \ell_+$, respectievelijk $\in \ell_-$, geldt dat $\phi(t; (x_0, y_0)) \in \ell_+$, resp. $\in \ell_-$, voor alle $t \geq 0$.
Hint. Bepaal $\dot{y} \pm \dot{x}$ onder de voorwaarde dat $y \pm x = 1$. Wat betekent dit?
- (d) Neem $\mu = 1$. Bepaal de nullclines – i.e. de verzamelingen in het (x, y) -vlak waarop danwel $\dot{x} = 0$ danwel $\dot{y} = 0$ – schets deze in het (x, y) -vlak en geef (met pijltjes) het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ aan in de gebieden waarin het (x, y) -vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x}, \dot{y})$ aan op de nulclines. Teken tenslotte ook de lijnen $\ell_{\pm}$ (uit (c)) in dit plaatje en geef wederom met pijltjes aan hoe oplossingen van (1) zich gedragen op $\ell_{\pm}$.
- (e) Neem $\mu = 1$ en definieer de ‘halve kegel’ $\mathcal{K}_-$ als het wigvormige gebied ingesloten door de lijnen ℓ_+ en ℓ_- , links van de y -as; meer precies: $\mathcal{K}_- = \{x < 0, x + 1 < y < -x + 1\}$. Toon aan dat voor een oplossing $\phi(t; (x_0, y_0))$ van (1) met beginvoorwaarde $\phi(0; (x_0, y_0)) = (x_0, y_0) \in \mathcal{K}_-$ geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; (x_0, y_0)) = (0, 1)$.
- (f) Toon aan dat de uitspraak uit (e) waar is voor alle $\mu > 1$. Ofwel: laat voor alle $\mu > 1$ zien dat voor een oplossing $\phi(t; (x_0, y_0))$ van (1) met $\phi(0; (x_0, y_0)) = (x_0, y_0) \in \mathcal{K}_-$ geldt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; (x_0, y_0)) = (0, 1)$.
Opmerking/Hint. De lijnen $\ell_{\pm}$ zijn nu niet langer invariant (als in (c), (d) en (e)). Laat zien dat oplossingen van (1) het gebied $\mathcal{K}_-$ toch niet kunnen verlaten.

Opmerking. Opgave 2 is *letterlijk* opgave 3 uit het Analyse 3 tentamen van '11-'12; opgave 2 is een ‘verbouwde versie’ van opgave 4 uit hetzelfde Analyse 3 tentamen.