Thuisopdracht 2 Gewone Differentiaalvergelijkingen (2015-2016)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: donderdag 24 september 2015.
Inleveren uitwerkingen: voor het college van donderdag 8 oktober, 11.15 u.

1.) Beschouw voor $t > 0$ de lineaire differentiaalvergelijking,

$$t\ddot{y} - (2t+1)\dot{y} + 2y = 0.$$

(a) Gegeven is dat $y_1(t) = e^{\alpha t}$ een oplossing is van de vergelijking voor zekere $\alpha \in \mathbb{R}$. Bepaal deze α.

(b) Bepaal een tweede lineair onafhankelijke oplossing $y_2(t)$ van deze vergelijking.
Hint. Gebruik òf de methode van 'variatie van constanten'/'reduction of order' òf doe een 'verstandige gok'.

(c) Bepaal de oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden $y(1) = 2$, $\dot{y}(1) = 0$.

2.) Beschouw de inhomogene tweede orde vergelijking

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 3. \tag{1}$$

(a) Bepaal een expliciete uitdrukking voor de algemene oplossing $x_{alg}(t)$.

(b) Definieer $x_\gamma(t)$ als *een* oplossing van (1) waarvoor geldt dat $x_\gamma(0) = \gamma$. Beredeneer dat als $x_\gamma(0) = \gamma < 0$ er een $t_* > 0$ moet zijn waarvoor geldt dat $x_\gamma(t_*) = 0$.
Hint. Bepaal (het teken van) $\lim_{t\to\infty} x_\gamma(t)$.

(c) Zijn er oplossingen $x_{alg}(t)$ die meer dan 1 (positief) nulpunt hebben? Ofwel: zijn er oplossingen $x(t)$ van (1) waarvoor er $t_{2,*} > t_{1,*} > 0$ bestaan zo danig dat $x(t_{1,*}) = x(t_{2,*}) = 0$?

3.) A. Van de 3 functies,

$$\psi_1(t) = t^2,\ \psi_2(t) = t^2 + e^{2t},\ \psi_3(t) = t^2 + 1 + e^{2t},$$

is gegeven dat ze ieder oplossing zijn van *dezelfde* inhomogene lineaire vergelijking,

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = r(t), \tag{2}$$

met de functies $p, q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu. Bepaal $p(t)$, $q(t)$ en $r(t)$.
Hint. Aan welke vergelijking voldoen de verschillen $\psi_k(t) - \psi_\ell(t)$?

B. Beschouw nogmaals de *algemene* tweede orde lineaire inhomogene vergelijking (2) waarbij de (continue) functies p, q, r weer algemeen gekozen zijn, *ofwel: p, q, r zijn dus niet gelijk aan de in (A) gevonden expliciete uitdrukkingen.* We zijn nu geïnteresseerd in begrensde oplossingen, dat zijn oplossingen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodanig dat er een $M > 0$ bestaat met $|x(t)| < M$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

(Bi) Laat zien dat als de inhomogene vergelijking precies één begrensde oplossing heeft, dat dan de homogene vergelijking ook precies één begrensde oplossing heeft.

(Bii) Is de omkering van (Bi) ook waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Opmerking: Som 2 en som 3A kwamen voor als tentamensommen in het jaar 2014-2015.