Thuisopdracht 4 Gewone Differentiaalvergelijkingen (2015-2016)

Door: Arjen Doelman, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.

Opgegeven: donderdag 29 oktober 2015.
Inleveren uitwerkingen: voor het college van donderdag 12 november, 11.15 u.

1.) Beschouw voor $\beta \in \mathbb{R}$ het 2-dimensionale stelsel,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & -3x & + & \beta y, \\ \dot{y} & = & x & + & y; \end{array} \right. \tag{1}$$

$\vec{\phi}_\beta(t; (x_0, y_0))$ is gedefinieerd als de oplossing van (1) met $\vec{\phi}_\beta(0; (x_0, y_0)) = (x_0, y_0)$.

(a) Neem $\beta = 0$. Bepaal $\vec{\phi}_0(t; (1, 1))$, ofwel: de oplossing van (1) met $\beta = 0$ die op $t = 0$ de waarde $(1, 1)$ aanneemt.

(b) Neem $\beta = -5$. Bepaal $\vec{\phi}_{-5}(t; (-2, 1))$, ofwel: de oplossing van (1) met $\beta = -5$ die op $t = 0$ de waarde $(-2, 1)$ aanneemt.

(c) Neem $\beta = -5$. Laat zien dat voor alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ geldt dat $\lim_{t\to\infty} \vec{\phi}_{-5}(t; (x_0, y_0)) = (0, 0)$.

(d) Voor welke $\beta \in \mathbb{R}$ geldt dat $\lim_{t\to\infty} \vec{\phi}_\beta(t; (x_0, y_0)) = (0, 0)$ voor alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$?

2.) Beschouw het 3-dimensionale stelsel,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}. \tag{2}$$

(a) Bepaal 3 onafhankelijke oplossingen $\vec{\psi}_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, van vergelijking (2).

(b) Zij $\vec{\psi}(t; \vec{x}_0)$ de oplossing van (2) met $\vec{\psi}(0; \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Voor welke $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ geldt dat $\lim_{t\to\infty} \|\vec{\psi}(t; \vec{x}_0)\| = \infty$?

3.) Som 17, pagina 360 in het boek.
Opmerking.
De opgave bij (c) is om te laten zien dat inderdaad geldt dat $e^{At+Bt} = e^{At}e^{Bt}$ (als $AB = BA$). De essentie van het argument wordt echter al in de opgave zelf gegeven.

4.) Som 7, pagina 366 in het boek.