

# Uitwerkingen Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 4 januari 2016, 10:00 - 13:00 uur

---

1. Beschouw voor  $t > 0$  de inhomogene singuliere tweede orde vergelijking,

$$t^2 \ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = f(t), \quad (1)$$

waarin  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continu differentieerbaar is *op heel*  $\mathbb{R}$  – in het bijzonder is  $f(t)$  dus ook glad rond  $t = 0$  en bestaat  $f(0)$ .

(a) Beschouw eerst het homogene probleem  $f(t) \equiv 0$ . Bepaal de algemene oplossing  $x_h(t) = x_h(t; A, B)$  van (1), waarbij  $A, B \in \mathbb{R}$  de vrij te kiezen parameters zijn.

**Uitwerking:** Dit is Euler's vergelijking: we proberen  $x(t) = t^r, r \in \mathbb{C}$ . Dit leidt tot de vergelijking  $r^2 + 3r + 2 = 0$  met wortels  $r = -1$  en  $r = -2$ . We concluderen dat  $x_1(t) = t^{-1}$  en  $x_2(t) = t^{-2}$  lineair onafhankelijke oplossingen zijn van (1) voor  $t > 0$ . Er volgt

$$x_h(t; A, B) = At^{-1} + Bt^{-2}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) Neem nog steeds  $f(t) \equiv 0$ . Bepaal de unieke waarden  $A^*$  en  $B^*$  van de vrije parameters uit onderdeel (a) zodanig dat de limiet  $\lim_{t \downarrow 0} x_h(t; A^*, B^*)$  bestaat. Geef de expliciete – enigszins triviale – uitdrukking voor  $x_h^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_h(t; A^*, B^*)$ .

**Uitwerking:** De limiet  $\lim_{t \downarrow 0} At^{-1} + Bt^{-2}$  bestaat alleen als  $A = B = 0$ . Daarom geldt  $A^* = B^* = 0$  en volgt  $x_h^*(t) = 0$ .

(c) Beschouw nu het inhomogene probleem en bepaal wederom een expliciete uitdrukking voor de algemene oplossing  $x_{in}(t) = x_{in}(t; C, D)$  van (1), waarbij nu  $C, D \in \mathbb{R}$  de vrije parameters zijn.

**Uitwerking:** We gebruiken de methode van variatie van constanten. We proberen de oplossing  $\psi(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ , waarvoor geldt

$$0 \equiv \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = t^{-1} \dot{c}_1 + t^{-2} \dot{c}_2. \quad (2)$$

Invullen van  $\psi(t)$  in (1) geeft

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 \ddot{\psi} + 4t\dot{\psi} + 2\psi \\ &= c_1(t^2 \ddot{x}_1 + 4t\dot{x}_1 + 2x_1) + c_2(t^2 \ddot{x}_2 + 4t\dot{x}_2 + 2x_2) + t^2(\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2) \\ &= t^2(\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2) = -\dot{c}_1 - 2t^{-1} \dot{c}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Oplossen van het stelsel (2)-(3) voor  $\dot{c}_1$  en  $\dot{c}_2$  leidt tot de vergelijkingen

$$\dot{c}_1 = f(t), \quad \dot{c}_2 = -tf(t).$$

Omdat  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continu is, voldoen

$$c_1(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad c_2(t) = \int_0^t \tau f(\tau) d\tau.$$

Daarvoor is een particuliere oplossing van (1)

$$\psi(t) = t^{-1} \int_0^t f(\tau) d\tau - t^{-2} \int_0^t \tau f(\tau) d\tau.$$

Dus er volgt

$$x_{\text{in}}(t; C, D) = t^{-1} \left( C + \int_0^t f(\tau) d\tau \right) + t^{-2} \left( D - \int_0^t \tau f(\tau) d\tau \right).$$

- (d) Bepaal ook in dit geval  $C^*$  en  $D^*$  zodanig dat  $\lim_{t \downarrow 0} x_{\text{in}}(t; C^*, D^*)$  bestaat – met  $x_{\text{in}}(t)$  zoals gevonden in (c).

**Uitwerking:** Definieer de afbeeldingen  $g_{1,2}, h_{1,2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  door  $g_1(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ ,  $g_2(t) = \int_0^t \tau f(\tau) d\tau$ ,  $h_1(t) = t$  en  $h_2(t) = t^2$ . Merk op dat  $g_{1,2}$  continu differentieerbaar zijn (fundamentele stelling van de analyse) met afgeleiden  $g'_1(t) = f(t)$  en  $g'_2(t) = tf(t)$ . Er geldt  $g_{1,2}(0), h_{1,2}(0) = 0$  en de limieten

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{g'_{1,2}(t)}{h'_{1,2}(t)}, \quad (4)$$

bestaan. De stelling van l'Hôpital geeft dat de limieten

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{g_{1,2}(t)}{h_{1,2}(t)},$$

daarom ook bestaan en gelijk zijn aan (4). Er volgt dat de limiet  $\lim_{t \downarrow 0} x_{\text{in}}(t; C, D)$  bestaat dan en slechts dan als de limiet  $\lim_{t \downarrow 0} Ct^{-1} + Dt^{-2}$  bestaat. Dit laatste is precies het geval als  $C = D = 0$ . Er volgt  $C^* = D^* = 0$ .

- (e) Geef een uitdrukking voor  $x_{\text{in}}^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_{\text{in}}(t; C^*, D^*)$  en bepaal  $x_{\text{in}}^*(0) (= \lim_{t \downarrow 0} x_{\text{in}}^*(t))$ .

**Uitwerking:** Er geldt

$$x_{\text{in}}^*(t) = x_{\text{in}}(t; 0, 0) = t^{-1} \int_0^t f(\tau) d\tau - t^{-2} \int_0^t \tau f(\tau) d\tau.$$

De stelling van l'Hôpital geeft (zie uitwerking vorige deelvraag)

$$\lim_{t \downarrow 0} x_{\text{in}}^*(t) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g_1(t)}{h_1(t)} - \lim_{t \downarrow 0} \frac{g_2(t)}{h_2(t)} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g'_1(t)}{h'_1(t)} - \lim_{t \downarrow 0} \frac{g'_2(t)}{h'_2(t)} = f(0) - \frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{2}f(0).$$

- 2.A(i).** Beschouw voor  $\rho > 1$  de 1-dimensionale vergelijking,

$$\dot{x} = x^\rho. \quad (5)$$

Bepaal de oplossing  $x_1(t)$  van (5) die voldoet aan de beginvoorwaarde  $x_1(1) = 1$ .

**Uitwerking:** We gebruiken scheiden van variabelen. Zolang  $x_1(t)$  ongelijk is aan 0, is een equivalente vergelijking

$$x_1^{-\rho} \dot{x}_1 = 1.$$

Integreren van deze vergelijking geeft

$$\frac{x_1^{1-\rho}}{1-\rho} = t + C, \quad (6)$$

voor een zekere  $C \in \mathbb{R}$ . Omdat geldt  $x_1(1) = 1$  moet gelden  $C = \frac{\rho}{1-\rho}$ . Omschrijven van (6) geeft

$$x_1(t) = ((1-\rho)t + \rho)^{1/(1-\rho)},$$

wat de oplossing van (5) geeft met  $x_1(1) = 1$ .

**A(ii).** De oplossing  $x_1(t)$  bestaat alleen voor  $t \in (-\infty, T^*(\rho))$ ,  $T^*(\rho) < \infty$  (omdat  $\rho > 1$ ): bepaal (de maximale waarde van)  $T^*(\rho)$ .

**Uitwerking:** Omdat  $\rho > 1$  heeft  $x_1(t)$  een verticale asymptoot precies als  $(1 - \rho)t + \rho = 0$  oftewel als  $t = \rho/(\rho - 1)$ . Verder is  $x_1(t)$  welgedefinieerd en een oplossing van (5) voor  $t \in (-\infty, \rho/(\rho - 1)) \ni 1$ . Dus volgt  $T^*(\rho) = \rho/(\rho - 1)$ .

**B(i).** Beschouw in  $\mathbb{R}^n$  het lineaire systeem,

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}. \quad (7)$$

Neem aan dat de coëfficiënten van de  $n \times n$  matrix  $A$  constant zijn – dus niet van  $t$  afhangen – en dat de matrix  $A$   $n$  verschillende, reële eigenwaarden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  heeft. Laat zien dat (7) geen niet-triviale oplossingen  $\vec{x}_{\text{loc}}(t)$  – dus  $\vec{x}_{\text{loc}}(t) \neq \vec{0}$  – kan hebben waarvoor geldt dat zowel  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{x}_{\text{loc}}(t) = \vec{0}$  als  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{x}_{\text{loc}}(t) = \vec{0}$ .

**Uitwerking:** Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ . Laat  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  de eigenvectoren zijn corresponderend met  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Omdat alle eigenwaarden van  $A$  verschillend zijn, weten we dat de functies  $t \mapsto \vec{v}_i e^{\lambda_i t}$ ,  $i = 1, \dots, n$  een basis vormen van de  $n$ -dimensionale oplossingsruimte van (7). Laat nu  $\vec{x}_{\text{loc}}(t)$  een niet-triviale oplossing zijn waarvoor geldt  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \vec{x}_{\text{loc}}(t) = \vec{0}$ . We schrijven

$$\vec{x}_{\text{loc}}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}, \quad (8)$$

waarbij  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  niet allen 0 zijn. Laat  $i_- = \min\{i : c_i \neq 0\}$  en  $i_+ = \max\{i : c_i \neq 0\}$ . Er volgt

$$\vec{0} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{x}_{\text{loc}}(t) = c_{i_-} \vec{v}_{i_-} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\lambda_{i_-} t},$$

omdat  $\lambda_{i_-}$  de kleinste exponent is in de sommatie (8) met niet-nul coefficient. Omdat geldt  $c_{i_-} \vec{v}_{i_-} \neq \vec{0}$ , volgt  $\lambda_{i_-} > 0$ . Analoog geldt  $\lambda_{i_+} < 0$  door naar de limiet  $t \rightarrow \infty$  te kijken. Echter er geldt  $i_- \leq i_+$  en dus  $\lambda_{i_-} \leq \lambda_{i_+}$ : TEGENSPRAAK. Dus een dergelijke oplossing  $\vec{x}_{\text{loc}}(t)$  kan niet bestaan.

**B(ii).** Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat (7) wel een niet-triviale oplossing  $\vec{x}_{\text{loc}}(t)$  met  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{x}_{\text{loc}}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{x}_{\text{loc}}(t) = \vec{0}$  kan hebben als de matrix  $A$  expliciet van de tijd  $t$  afhangt (ofwel: als  $A = A(t)$ ).

**Uitwerking:** Beschouw in  $\mathbb{R}$  het lineaire systeem

$$\dot{x} = -2tx, \quad (9)$$

dat van de vorm (7) is waarbij  $n = 1$  en  $A = A(t) = -2t$  expliciet van  $t$  afhangt. De oplossing  $x_{\text{loc}}(t) = e^{-t^2}$  van (9) voldoet aan  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_{\text{loc}}(t) = 0$ .

**3.** Beschouw de tweede orde vergelijking,

$$\ddot{x} - x + x^3 = g(x), \quad (10)$$

waarin  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een continu differentieerbare functie is met  $g(0) = 0$ .

(a) Schrijf (10) als een 2-dimensionaal systeem en laat zien dat dit systeem 3 kritieke punten  $(x_-^*, 0)$ ,  $(x_0^*, 0)$ ,  $(x_+^*, 0)$  heeft, waarbij  $x_-^* < x_0^* < x_+^*$ . Merk op dat deze niet van  $g(y)$  – met  $g(0) = 0$  – afhangen.

**Uitwerking:** We introduceren de variabele  $y = \dot{x}$ . Dit geeft het volgende 2-dimensionale systeem

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + g(y). \end{cases} \quad (11)$$

De kritieke punten van (11) vinden we door het stelsel  $y = 0, x - x^3 + g(y) = 0$  op te lossen. Er volgt  $y = 0$  en  $x - x^3 = 0$ , omdat geldt  $g(0) = 0$ . Dus  $(x_0^*, 0) := (0, 0)$  en  $(x_{\pm}^*, 0) := (\pm 1, 0)$  zijn de drie kritieke punten, die niet van de precieze vorm van  $g$  afhangen.

- (b) Neem  $g(y) \equiv 0$  en laat zien dat de banen van (10) op niveaукrommen van de uitdrukking  $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$  liggen.

**Uitwerking:** Stel  $(x(t), y(t))$  is een oplossing van (11). Introduceer de functie  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door  $h(t) = H(x(t), y(t))$ . Via de kettingregel leiden we af

$$h'(t) = y(t)\dot{y}(t) - x(t)\dot{x}(t) + x(t)^3\dot{x}(t) = 0.$$

Dus is de functie  $h(t)$  constant. Dus er bestaat een  $c \in \mathbb{R}$  zodat  $H(x(t), y(t)) = c$ . Met andere woorden de banen van (11) liggen op de niveaукrommen van  $H$ .

- (c) Neem  $g(y) \equiv 0$  en geef een schets van het faseportret – geef in deze schets de vaste punten en (minstens) een vijftal banen.

**Uitwerking:** Banen liggen op de niveaукrommen van  $H$ . Dit zijn gesloten curves. De kritieke punten liggen op de niveaукrommen  $H(x, y) = -1/4$  en  $H(x, y) = 0$ .

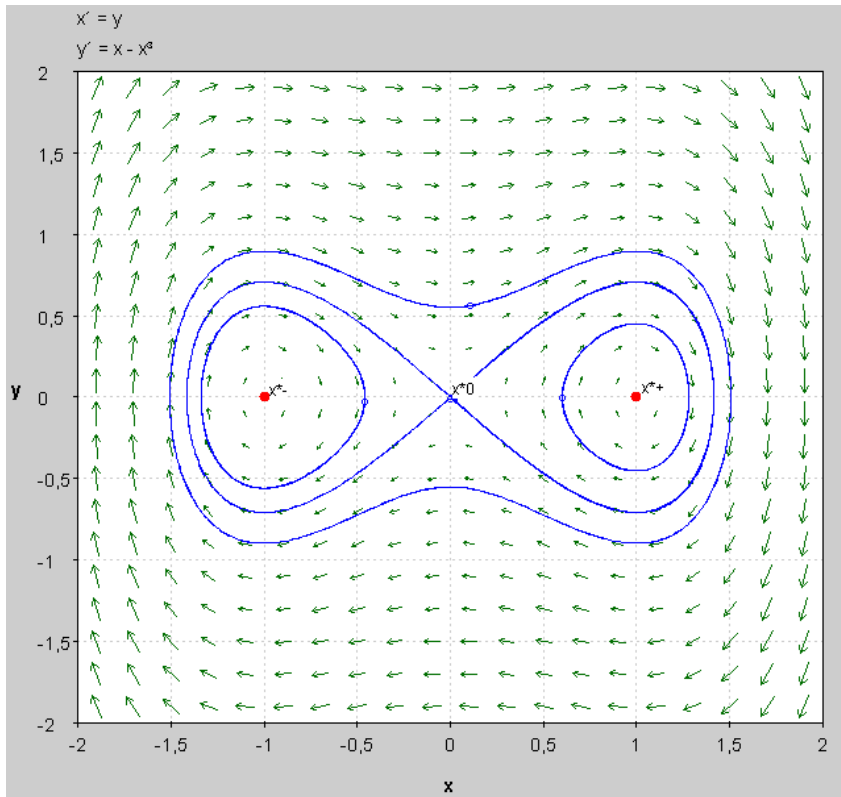


Figure 1: Plot van systeem (11) gemaakt in PPLANE.

- (d) Beschouw nu het algemene geval  $g(y) \neq 0$  (met  $g(0) = 0$ ). Laat zien dat het punt  $(x_0^*, 0)$  altijd instabiel is.

**Uitwerking:** We schrijven (11) als  $\dot{z} = \vec{f}(z)$  waarbij  $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeven is door

$$\vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 + g(y) \end{pmatrix}.$$

We bepalen de Jacobiaan van  $\vec{f}$

$$D\vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & g'(y) \end{pmatrix}.$$

Het kritieke punt  $(x_0^*, 0)$  is instabiel, want de matrix

$$D\vec{f} \begin{pmatrix} x_0^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & g'(0) \end{pmatrix},$$

heeft eigenwaarden  $\lambda_{\pm} = (g'(0) \pm \sqrt{g'(0)^2 + 4})/2$ , waarbij  $\lambda_+ > 0$  ongeacht de waarde van  $g'(0) \in \mathbb{R}$ .

- (e) Laat voor algemene  $g(y)$  (met  $g(0) = 0$ ) zien dat de punten  $(x_{\pm}^*, 0)$  beide asymptotisch stabiel zijn als  $g'(0) < 0$ .

**Uitwerking:** De matrices

$$D\vec{f} \begin{pmatrix} x_{\pm}^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & g'(0) \end{pmatrix},$$

hebben eigenwaarden  $\lambda_{\pm} = (g'(0) \pm \sqrt{g'(0)^2 - 8})/2$ . In het geval  $g'(0)^2 \leq 8$  volgt  $\operatorname{Re}(\lambda_{\pm}) = g'(0) < 0$ . In het geval  $g'(0)^2 > 8$  volgt  $g'(0) < -\sqrt{g'(0)^2 - 8} < 0$  en dus geldt wederom  $\operatorname{Re}(\lambda_{\pm}) < 0$ . Dus volgt dat de punten  $(x_{\pm}^*, 0)$  beide asymptotisch stabiel zijn als  $g'(0) < 0$ .

- (f) Beschouw nu  $g(y) = y^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Laat zien dat *als  $n$  oneven is* de punten  $(x_{\pm}^*, 0)$  beide instabiel zijn.

**Uitwerking:**<sup>1</sup> Stel  $(x(t), y(t))$  is een oplossing van (11). Beschouw weer de afbeelding  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door  $h(t) = H(x(t), y(t))$ . Er geldt

$$h'(t) = y(t)\dot{y}(t) - x(t)\dot{x}(t) + x(t)^3\dot{x}(t) = y(t)^{n+1} \geq 0, \quad (12)$$

omdat  $n$  oneven is. Stel nu dat  $(x(t), y(t))$  een niet-constante periodieke oplossing is van (11) met periode  $T$ . Dan is de samenstelling  $h$  ook  $T$ -periodiek. Er volgt

$$0 = h(T) - h(0) = \int_0^T h'(t)dt = \int_0^T y(t)^{n+1}dt.$$

Omdat  $n$  oneven is, volgt uit bovenstaande dat  $\dot{x}(t) = y(t) = 0$  voor alle  $t \in [0, T]$ . Dus  $(x(t), y(t))$  is constant: **TEGENSPRAAK**. Er volgt dat (11) geen niet-constante periodieke oplossingen heeft. Stel nu dat  $(x_{\pm}^*, 0)$  stabiel is. Er bestaat dan een

<sup>1</sup>Merk op dat in dit geval de eigenwaarden van  $D\vec{f}(x_{\pm}^*, 0)$  geen uitkomst geven over de stabiliteit, immers de eigenwaarden van  $D\vec{f}(x_{\pm}^*, 0)$  zijn puur imaginair:  $\pm\sqrt{2}i$  voor  $n > 1$ . We gebruiken daarom een alternatieve methode.

$0 < \delta < 1/2$  zodanig dat voor elke oplossing  $(x(t), y(t))$  van (11) met  $\|(x(0), y(0)) - (x_{\pm}^*, 0)\| < \delta$  geldt  $\|(x(t), y(t)) - (x_{\pm}^*, 0)\| < 1/2$  voor alle  $t \geq 0$ . Neem nu de oplossing met  $(x(0), y(0)) = (x_{\pm}^* - \delta/2, 0)$ . Omdat  $h(t)$  monotoon stijgend is (zie (12)) volgt

$$(x(t), y(t)) \in G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) \geq H(x_{\pm}^* - \delta/2, 0), \|(x, y) - (x_{\pm}^*, 0)\| \leq 1/2\},$$

voor alle  $t \geq 0$ . Merk op dat de begrensde verzameling  $G$  geen equilibria bevat, want de punten  $(x_{\pm}^*, 0)$  zijn de globale minima van  $H$  en dus volgt  $H(x_{\pm}^*, 0) < H(x_{\pm}^* - \delta/2, 0)$  voor alle  $0 < \delta < 1/2$ . Uit de stelling van Poincaré-Bendixson volgt nu dat  $(x(t), y(t))$  naar een niet-constante periodieke oplossing in  $G$  moet spiraliseren. Echter, we hebben laten zien dat systeem (11) geen niet-constante periodieke oplossingen heeft: TEGENSPRAAK. Dus de punten  $(x_{\pm}^*, 0)$  zijn instabiel.

4. Beschouw het in poolcoördinaten  $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi]$  gegeven stelsel,

$$\begin{cases} \dot{r} = 1 - r + \sigma H(r, \theta), \\ \dot{\theta} = G(r, \theta), \end{cases} \quad (13)$$

waarin  $\sigma \in \mathbb{R}$  en  $G, H : (0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  niet-triviale, continu differentieerbare functies van  $r$  en  $\theta$  zijn, die periodiek zijn als functie van  $\theta \in [0, 2\pi]$  – zie (\*) onder aan deze opgave.

- (a) Neem aan dat  $G(r, \theta) \neq 0$  voor alle  $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi]$ . Laat zien dat systeem (13) een periodieke oplossing in een omgeving van  $\{r = 1\}$  heeft als  $|\sigma|$  ‘voldoende klein’ is. Ofwel: laat zien dat er een  $\sigma_0 > 0$  bestaat zodanig dat (13) een periodieke oplossing in een omgeving van  $\{r = 1\}$  heeft voor alle  $\sigma$  waarvoor geldt dat  $|\sigma| < \sigma_0$ . *Hint.* Wat kan je zeggen over (het teken van)  $\dot{r}$  als  $r = 1 \pm \delta$ ?

**Uitwerking:** Neem  $0 < \delta < 1$  en beschouw de verzameling  $X = [1 - \delta, 1 + \delta] \times [0, 2\pi]$ . Omdat  $H$  continu is en  $X$  begrensd en gesloten volgt dat het maximum

$$M := \max_{(r, \theta) \in X} |H(r, \theta)|,$$

bestaat. Neem nu  $\sigma_0 = \delta/(M + 1)$ . Laat  $|\sigma| < \sigma_0$ . Op de cirkel  $r = 1 - \delta$  geldt

$$\dot{r} = \delta + \sigma H(1 - \delta, \theta) \geq \delta - \sigma_0 M > 0.$$

Net zo geldt op de cirkel  $r = 1 + \delta$  dat  $\dot{r} < 0$ . Er volgt dat banen in systeem (13) de annulus  $1 - \delta \leq r \leq 1 + \delta$  niet kunnen verlaten. Bovendien volgt dat deze annulus geen equilibria bevat, omdat  $G(r, \theta) \neq 0$  voor alle  $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi]$ . Uit de stelling van Poincaré-Bendixson volgt dat de annulus  $1 - \delta \leq r \leq 1 + \delta$  een niet-constante periodieke oplossing heeft.

- (b) Laat zien dat de uitspraak uit (a) ook correct is als alleen de eis  $G(1, \theta) \neq 0$  wordt opgelegd. Maak duidelijk welk extra argument er aan de redenering bij (a) moet worden toegevoegd (en onderbouw dit argument).

**Uitwerking:** Omdat  $[0, 2\pi]$  gesloten en begrensd is,  $G$  continu is en  $G(1, \theta) \neq 0$  geldt voor alle  $\theta \in [0, 2\pi]$ , bestaat er een  $\tilde{\delta} > 0$  zodanig dat  $G(r, \theta) \neq 0$  voor alle  $(r, \theta) \in [1 - \tilde{\delta}, 1 + \tilde{\delta}] \times [0, 2\pi]$ . Het bewijs gaat nu hetzelfde als in (a) als we toevoegen dat moet gelden  $0 < \delta < \tilde{\delta}$ , opdat de annulus  $1 - \delta \leq r \leq 1 + \delta$  geen equilibria bevat.

- (c) Neem nu aan dat er wel nulpunten  $\theta^*$  bestaan van de vergelijking  $G(1, \theta) = 0$ . In dit geval is het niet noodzakelijk dat (13) een (niet-constante) periodieke oplossing heeft in een omgeving van  $\{r = 1\}$  – hoe klein  $|\sigma|$  ook gekozen wordt. Leg deze uitspraak uit aan de hand van een goed gemotiveerde schets van een mogelijk faseportret van systeem (13) in een omgeving van  $\{r = 1\}$ .

**Uitwerking:** Beschouw bijvoorbeeld het geval waarin  $G(r, \theta) = \sin(\theta)$ . Merk op dat deze  $G$  niet-triviaal, continu differentieerbaar is en  $2\pi$ -periodiek is in  $\theta$ . Bovendien geldt  $G(1, 0), G(1, \pi) = 0$ . We laten zien dat voor deze keuze van  $G$  er geen niet-constante periodieke oplossingen kunnen zijn in systeem (13). In het faseportret is te zien dat de banen op de nullclines  $\theta = 0$  en  $\theta = \pi$  disjunct zijn van de andere banen in systeem (13). Dit komt omdat de hoek constant blijft ( $\dot{\theta} = 0$ ) als geldt  $\theta = 0$  of  $\theta = \pi$  en banen elkaar niet kunnen kruisen. De banen die op de nullclines  $\theta = 0$  en  $\theta = \pi$  liggen kunnen zelf geen (niet-constante) periodieke banen zijn, want dit zou betekenen dat een baan zichzelf snijdt. De nullclines  $\theta = 0$  en  $\theta = \pi$  verdelen het faseportret in twee invariante gebieden. Voor een niet-constante periodieke baan  $(r(t), \theta(t))$  in systeem (13) moet dus gelden ofwel  $\theta(t) \in (0, \pi)$  ofwel  $\theta(t) \in (\pi, 2\pi)$  voor alle  $t \geq 0$ . Dus bestaat er een  $T > 0$  zodanig dat  $0 = \dot{\theta}(T) = \sin(\theta(T))$ . Echter, uit de laatste vergelijking volgt  $\theta(T) \in \{0, \pi\}$ : TEGENSPRAAK. Dus systeem (13) heeft geen niet-constante periodieke oplossingen.

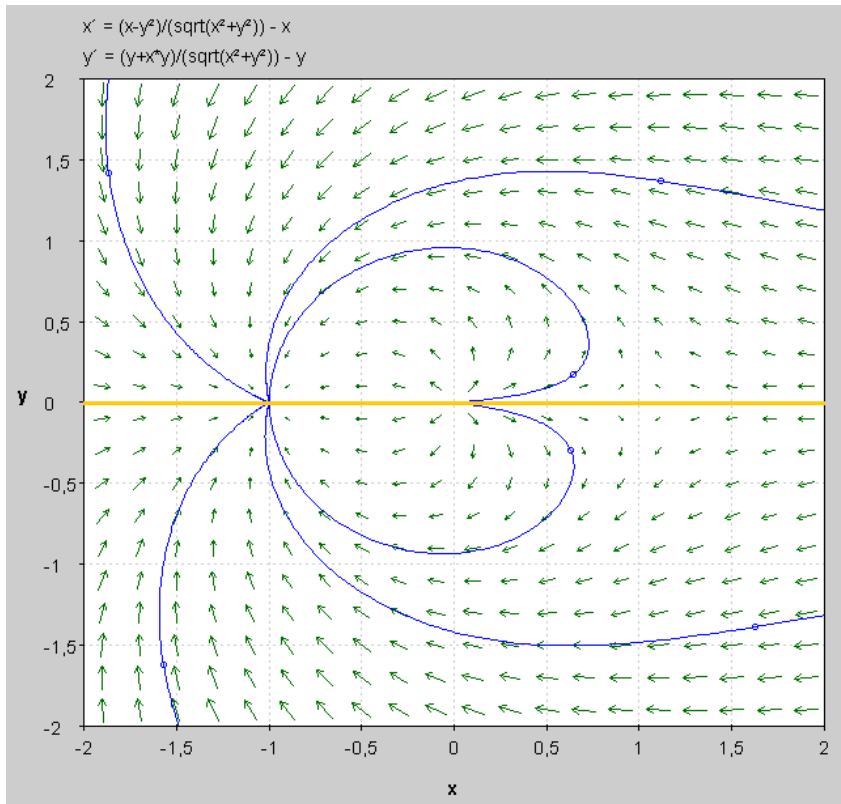


Figure 2: Een mogelijk faseportret van een systeem van de vorm (13) met  $G(r, \theta) = \sin(\theta)$  gemaakt in PPLANE. De gele lijn zijn de nullclines  $\theta = 0$  en  $\theta = \pi$ .

(\*) De continu differentieerbare functies  $G$  en  $H$  voldoen dus aan:  $G(r, \theta) \not\equiv 0$ ,  $H(r, \theta) \not\equiv 0$ ,  $G(r, 2\pi) \equiv G(r, 0)$ ,  $H(r, 2\pi) \equiv H(r, 0)$  en  $\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, 2\pi) \equiv \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, 0)$ ,  $\frac{\partial H}{\partial \theta}(r, 2\pi) \equiv \frac{\partial H}{\partial \theta}(r, 0)$ .