Newton-iteratie in complete lichamen

Op het college Topologie is de volgende stelling van Banach behandeld: zij (K, d) een complete metrische ruimte, en zij $f : K \to K$ een contractie, d.w.z. f is continu en er is een $\theta \in [0, 1[$ zodat $d(f(x), f(y)) \leq \theta \cdot d(x, y)$ voor alle $x, y \in K$. Dan is er precies één dekpunt van f, d.w.z. er is precies één $\overline{x} \in K$ met $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Verder geldt dat voor iedere $x_0 \in K$ de rij $(x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots)$ convergent is met limiet $\overline{x}$. Als toepassing van deze stelling hebben we voor $K = \mathbb{R}$ Newton-iteratie gedaan: stel f is een C^2-functie op $\mathbb{R}$ en laat $x \in \mathbb{R}$ een nulpunt zijn van f met $f'(x) \neq 0$. Dan is er een open interval om x in $\mathbb{R}$ zodat voor iedere x_0 in dit open interval de rij (x_n) gegeven door

$$(*) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

convergeert met limiet x.

De vraag is nu, of we ook Newton-iteratie kunnen doen voor andere complete lichamen K. Met andere woorden, probeer voorwaarden op te stellen voor functies $f : K \to K$ en punten $x_0 \in K$ zodat de rij (x_n) gegeven door (*) bestaat en convergeert naar een nulpunt van f. Merk op dat het symbool f' op zijn minst een formele betekenis heeft in $K[X]$ als f een polynoom is; voor meer algemene f is het allereerst maar de vraag waar f' gedefinieerd is.

Analoga van Newton-iteratie zijn welbekend in het geval dat K de completering is van $\mathbb{Q}$ ten aanzien van een p-adische metriek, waarbij p een priemgetal is. De lichamen K die we hier krijgen zijn voorbeelden van zogenaamde p-adische lichamen, en deze zijn van groot belang voor de getaltheorie en de algebraïsche meetkunde. Diverse versies van Newton-iteratie voor f een polynoom in $K[X]$ staan bekend onder de naam 'Hensels lemma', naar Kurt Hensel, de ontdekker van de p-adische lichamen. Moeilijker wordt het als we voor f willekeurige C^n-functies toestaan. Allereerst moet precies worden nagegaan, wat hiermee precies wordt bedoeld.

Wie met deze opgave aan de slag wil, zal zich eerst terdege in de analyse op p-adische getallenlichamen moeten verdiepen. In de literatuurlijst hieronder staan twee boeken vermeld die hiervoor geschikt lijken.

Literatuur

[1] Y. Amice, *Les nombres p-adiques.* Presses Universitaires de France.
[2] W.H. Schikhof, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis.* Cambridge studies in advanced mathematics **4**, Cambridge University Press.

Begeleider: R.S. de Jong.