

Semi-Riemannse variëteiten

Laat V een n -dimensionale reële vektorruimte zijn en $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ een symmetrische bilineaire form. Wij noemen g niet-ontaard of een scalair product indien er geen $0 \neq v \in V$ bestaat met $g(u, v) = 0$ voor alle $u \in V$. De index $I(g)$ van g is de maximale dimensie van een lineaire deelruimte $U \subset V$ waarop g negatief definit is. I.h.b. is een scalair product met index 0 positief definit en dus een inproduct zoals bekend van lineaire algebra.

Definition 1 1. Een n -dimensionale semi-Riemannse variëteit met index I is een n -dimensionale differentieerbare variëteit X waarbij elke raakruimte $T_p X$, $p \in X$, van een scalair product g_p met index $I(g_p) = I$ is voorzien zodat voor iedere kaart (U, h, V) met coördinaten $(x_1, \dots, x_n)$ in V alle functies

$$U \ni p \mapsto g_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right) \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n \quad ,$$

differentieerbaar zijn.

2. Een Riemannse variëteit is een semi-Riemannse variëteit met index $I = 0$, d.w.z. dat alle raakruimten van een inproduct zijn voorzien.

3. Een Lorentz-variëteit is een semi-Riemannse variëteit met index $I = 1$.

De Riemannse variëteiten zijn het onderwerp van de "gewone" differentiaalmeetkunde, ontwikkeld voor abstracte variëteiten als generalisatie van de "klassieke" differentiaalmeetkunde van krommen en oppervlakken in de euclidische ruimte. De belangstelling voor Lorentz-variëteiten komt vooral uit de natuurkunde, omdat de algemene relativiteitstheorie het heelal ziet als een 4-dimensionale Lorentz-variëteit.

Voor belangrijke aspecten van zowel de Riemannse als ook de Lorentz meetkunde bieden de semi-Riemannse variëteiten een context waarin uniforme methodes en bewijzen kunnen worden gegeven; voorbeelden zijn de existentie en uniciteit van de Levi-Civita-connectie, en de definitie van geodetische krommen en kromming. Dit zal precieser worden uitgelegd in mijn voordracht in het bachelor-seminarium.

In het project zullen de basisresultaten van de theorie worden uitgewerkt, waarbij het onderwerp op twee manieren kan worden benaderd:

- Een student die alleen een wiskunde-bachelor wil behalen zal vooral de wiskundige kant behandelen, met een enkele kanttekening betreffende natuurkunde.
- Een student voor een dubbele bachelor wiskunde/natuurkunde zal meer gaan richting algemene relativiteitstheorie. Het is de bedoeling dat in overleg met een docent natuurkunde één scriptie ontstaat die voor de dubbele bachelor voldoet.

Nodige voorkennis: het college Inleiding variëteiten of Meetkunde

Literatuur: B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press; R.K. Sachs & H. Wu, General Relativity for Mathematicians, Springer Verlag

Begeleider: M. Lübke