

Representatietheorie van compacte Liegroepen

Een Liegroep is een differentieerbare variëteit G met een groepsstructuur die gegeven wordt door een differentieerbare afbeelding $G \times G \rightarrow G$. Een Liegroep G heet compact als G compact is als topologische ruimte.

Voorbeelden van compacte Liegroepen zijn de reële orthogonale groepen $O(n)$ en $SO(n)$, de unitaire groepen $U(n)$ en $SU(n)$.

In de natuurkunde spelen de representaties van dit soort groepen (d.w.z. lineaire differentieerbare acties op eindigdimensionale vectorruimten) een belangrijke rol.

Een eerste mogelijk doel van dit onderwerp is het bestuderen van de representaties van $SU(2)$ (expliciet, “met de hand”), en vervolgens van $SO(3)$, en $SO(4)$, door middel van de $2 : 1$ overdekkingen $SU(2) \rightarrow SO(3)$ en $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$. Via de stelling van Peter-Weyl kan men vervolgens uit de kennis van de representaties van $SO(3)$ de gebruikelijke Hilbert basis van $L^2(S^2)$ terugvinden.

Een ander mogelijk doel van dit onderwerp is het in detail bestuderen van integratie op compacte Liegroepen (Haarmaten). Hiermee bewijst men dat representaties compleet reducibel zijn, d.w.z., directe sommen van irreducibele representaties zijn. Ook kan men kanstheoretische vragen beantwoorden, zoals: wat is de kans dat een random gekozen element van $SO(3)$ een draaiing over een hoek in een gegeven deelinterval van $[0, \pi]$ is?

Referenties: het diktaat (engels):

http://www.math.leidenuniv.nl/~edix/public_html_rennes/cours/dea0001.html

Het diktaat (frans):

<http://name.math.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir/2004-05/lie/>

Begeleider: Bas Edixhoven.