

Categorieën van verzamelingen met een groepsactie

Laat G een groep zijn. Een actie (ook wel werking geheten) van G op een verzameling X is een morfisme van groepen, $\phi: G \rightarrow S(X)$, waar $S(X)$ de permutatiegroep van X is. Het geven van zo'n actie ϕ is equivalent met het geven van de afbeelding $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto (\phi g)x$, die dan ook wel als $(g, x) \mapsto gx$ genoteerd wordt. Voor meer details zie hoofdstuk 5 van het dictaat Algebra I (op de webpagina van Reinier Bröker).

Een verzameling X met een gegeven G -actie heet een *verzameling met G -actie*, of ook wel een *G -verzameling* (*G -set* in het engels). Een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ tussen twee G -verzamelingen heet een *G -afbeelding* (of ook wel *morfisme van G -verzamelingen*, of ook wel *G -equivariant*) als voor alle g in G en alle x in X geldt dat $f(gx) = g(fx)$.

De collectie van alle G -verzamelingen met alle G -morfismen vormt de *categorie $G\text{Set}$* van G -verzamelingen. Zie bijvoorbeeld http://en.wikipedia.org/wiki/Category_theory voor de noodzakelijke definities in categorie-theorie. Een goede reden om categorieën van het type $G\text{Set}$ te bestuderen is dat ze een belangrijke rol spelen in bijvoorbeeld de theorie van topologische overdekkingen, en in Galois-theorie. We lichten dit toe.

Laat $K \rightarrow L$ een eindige Galois-uitbreiding van lichamen zijn, en laat G de bijbehorende Galois-groep zijn, d.w.z., $G = \text{Aut}_K(L)$. De klassieke Galois-theorie geeft dan een bijectie tussen de deeltuitbreidingen van $K \rightarrow L$ en de verzameling van ondergroepen van G . Maar met wat categorie-terminologie kan men veel verder gaande uitspraken doen. Het is namelijk zo dat de categorie van eindige G -sets anti-equivalent is met een bepaalde categorie van K -algebras (namelijk die van de eindige K -algebras die door $K \rightarrow L$ gespleten zijn). De anti-equivalentie wordt gegeven door aan zo'n K -algebra A de G -verzameling $\text{Hom}_K(A, L)$ toe te voegen.

Laat anderzijds X een topologische ruimte zijn. Een continue afbeelding $f: Y \rightarrow X$ heet een *overdekking* (*covering* in het Engels, *revêtement* in het Frans) als er voor iedere x in X er een open omgeving U van x is zodat $f^{-1}U$ de disjuncte vereniging is van open delen V_y (voor y in $f^{-1}\{x\}$) van Y , die door f homeomorf op U worden afgebeeld. Een morfisme van een overdekking $f: Y \rightarrow X$ naar een overdekking $g: Z \rightarrow X$ is een continue afbeelding $h: Y \rightarrow Z$ zodat $gh = f$. Dit levert ons de categorie van overdekkingen van X . Onder bepaalde voorwaarden blijkt dat deze categorie equivalent is met die van $\pi_1(X, x)$ -verzamelingen, waar x een gekozen basispunt is in X , en $\pi_1(X, x)$ de bijbehorende fundamentealgroep. In dit geval wordt de equivalentie gegeven door aan een overdekking $f: Y \rightarrow X$ de $\pi_1(X, x)$ -verzameling $f^{-1}\{x\}$ toe te voegen (hier moet dan wel eerst de actie van $\pi_1(X, x)$ gedefiniëerd worden).

Een student die in deze richting een scriptie wil schrijven moet zich eerst wat categorie-theorie aanleren, en kan daarna verschillende kanten op. Één mogelijkheid is de bovenstaande uitspraak over K -algebras precies te maken en er een bewijs voor te geven. Een andere mogelijkheid is de uitspraak over de overdekkingen van de topologische ruimte X precies te maken en te bewijzen. In beide gevallen dienen wat voorbeelden uitgewerkt te worden. Dit scriptie-onderwerp biedt ruimte aan twee studenten: één die algebra doet, en een ander die topologie doet.

Referenties: zullen in overleg worden uitgezocht.

Begeleider: Bas Edixhoven.