

Oneven perfecte getallen

Een *perfect* (of *volkomen*) getal is een positief geheel getal dat gelijk is aan de som van zijn eigen positieve delers, het getal zelf uitgesloten. Voorbeeld: $6 = 1 + 2 + 3$ is perfect, en $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ ook. Men geeft met $\sigma(n)$ de som van *alle* positieve delers van n aan (voorbeeld: $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$), zodat n perfect is dan en slechts dan als $\sigma(n) = 2n$.

Het onderzoek naar perfecte getallen is al duizenden jaren oud, maar zelfs zeer fundamentele vragen erover blijven onbeantwoord. Wel heeft men een aantal *vermoedens* over hoe de correcte antwoorden luiden.

Er zijn goede redenen om bij het onderzoeken van perfecte getallen een onderscheid te maken tussen *even* en *oneven* perfecte getallen. Een stelling van Euclides en Euler geeft een volledige beschrijving van alle *even* perfecte getallen in termen van zogenaamde *Mersenne-priemgetallen*. Hier is buitengewoon veel aan gewerkt en over geschreven, en het onderwerp is eigenlijk te uitgekauwd om interessant te zijn als onderwerp voor een bachelor-scriptie. De stelling van Euclides en Euler beantwoordt niet de vraag of het aantal even perfecte getallen eindig of oneindig is. Het vermoeden is dat er *oneindig veel* zijn. Een preciezere versie van dit vermoeden luidt als volgt.

Vermoeden. Als $N_{\text{even}}(x)$ het aantal even perfecte getallen $\leq x$ aangeeft, dan geldt

$$N_{\text{even}}(x) \sim \frac{e^\gamma}{\log 2} \cdot \log \log x \quad \text{voor } x \rightarrow \infty.$$

Het symbool $\sim$ in dit vermoeden betekent dat de limiet van het linkerlid gedeeld door het rechterlid gelijk is aan 1. Met γ wordt de constante van Euler aangegeven: $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\log n + \sum_{i=1}^n 1/i) \doteq 0,5772156649$. Er geldt $e^\gamma / \log 2 \doteq 2,5695443449$.

Vragen: waarop is dit vermoeden gebaseerd? Is er een statistische techniek om dit vermoeden te testen aan de hand van de 43 bekende even perfecte getallen?

Oneven perfecte getallen vertonen een heel ander beeld.

Vermoeden. *Er bestaan geen oneven perfecte getallen.*

De eerste enigszins geloofwaardige onderbouwing van dit vermoeden is een paar jaar geleden gegeven door Carl Pomerance, en is nog ongepubliceerd. Op het bachelor-seminarium zal de redenering van Carl Pomerance worden geschetst. Een geschikt project bestaat eruit te onderzoeken welke onderdelen van deze redenering volledig steekhoudend zijn, en welke speculatief.

Volgens een stelling van Dickson uit 1913 is voor elk positief geheel getal k het aantal oneven perfecte getallen met precies k verschillende priemfactoren *eindig*; zeer onlangs is door Pace Nielsen bewezen dat dit aantal *nul* is voor $k \leq 8$; met andere woorden: elk oneven perfect getal heeft ten minste 9 verschillende priemfactoren. Het bewijs maakt gebruik van een computeralgoritme. Een interessante theoretische vraag is te onderzoeken, hoeveel tijd de methode van Pace Nielsen in beslag zou nemen voor grotere k .

Begeleider: H. W. Lenstra.