Categorieën van verzamelingen met een groepsactie

Laat G een groep zijn. Een actie (ook wel werking geheten) van G op een verzameling X is een morfisme van groepen, $\phi\colon G \to S(X)$, waar $S(X)$ de permutatiegroep van X is. Het geven van zo'n actie ϕ is equivalent met het geven van de afbeelding $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto (\phi g)x$, die dan ook wel als $(g, x) \mapsto gx$ genoteerd wordt. Voor meer details zie hoofdstuk 5 van het dictaat Algebra I (op de webpagina `http://www.math.leidenuniv.nl/websites/algebra/`).

Een verzameling X met een gegeven G-actie heet een *verzameling met G-actie*, of ook wel een *G-verzameling* (*G-set* in het engels). Een afbeelding $f\colon X \to Y$ tussen twee G-verzamelingen heet een *G-afbeelding* (of ook wel *morfisme van G-verzamelingen*, of ook wel *G-equivariant*) als voor alle g in G en alle x in X geldt dat $f(gx) = g(fx)$.

De collectie van alle G-verzamelingen met alle G-morfismen vormt de *categorie* $G\mathbf{Set}$ van G-verzamelingen. Zie bijvoorbeeld `http://en.wikipedia.org/wiki/Category_theory` voor de noodzakelijke definities in categorie-theorie. Een goede reden om categorieën van het type $G\mathbf{Set}$ te bestuderen is dat ze een belangrijke rol spelen in bijvoorbeeld de theorie van topologische overdekkingen, en in Galois-theorie. We lichten dit toe.

Laat $K \to L$ een eindige Galois-uitbreiding van lichamen zijn, en laat G de bijbehorende Galois-groep zijn, d.w.z., $G = \mathrm{Aut}_K(L)$. De klassieke Galois-theorie geeft dan een bijectie tussen de deeluitbreidingen van $K \to L$ en de verzameling van ondergroepen van G. Maar met wat categorie-terminologie kan men veel verder gaande uitspraken doen. Het is namelijk zo dat de categorie van eindige G-sets anti-equivalent is met een bepaalde categorie van K-algebras (namelijk die van de eindige K-algebras die door $K \to L$ gespleten zijn). De anti-equivalentie wordt gegeven door aan zo'n K-algebra A de G-verzameling $\mathrm{Hom}_K(A, L)$ toe te voegen. Dit onderwerp is uitgewerkt in de bachelorscriptie van Arno Kret (voorjaar 2007; deze scriptie is op de betreffende website te vinden).

Laat anderzijds X een topologische ruimte zijn. Een continue afbeelding $f\colon Y \to X$ heet een *overdekking* (*covering* in het Engels, *revêtement* in het Frans) als er voor iedere x in X er een open omgeving U van x is zodat $f^{-1}U$ de disjuncte vereniging is van open delen V_y (voor y in $f^{-1}\{x\}$) van Y, die door f homeomorf op U worden afgebeeld. Een morfisme van een overdekking $f\colon Y \to X$ naar een overdekking $g\colon Z \to X$ is een continue afbeelding $h\colon Y \to Z$ zodat $gh = f$. Dit levert ons de categorie van overdekkingen van X. Onder bepaalde voorwaarden blijkt dat deze categorie equivalent is met die van $\pi_1(X, x)$-verzamelingen, waar x een gekozen basispunt is in X, en $\pi_1(X, x)$ de bijbehorende fundamentaalgroep. In dit geval wordt de equivalentie gegeven door aan een overdekking $f\colon Y \to X$ de $\pi_1(X, x)$-verzameling $f^{-1}\{x\}$ toe te voegen (hier moet dan wel eerst de actie van $\pi_1(X, x)$ gedefiniëerd worden).

Een student die in deze laatste richting een scriptie wil schrijven moet zich eerst wat categorie-theorie aanleren. Daarna is het dan de bedoeling de uitspraak over de overdekkingen van de topologische ruimte X precies te maken en te bewijzen, en wat voorbeelden uit te werken.

Referenties: zullen in overleg worden uitgezocht.

Begeleider: Bas Edixhoven.