De Complexe Representaties $\mathbf{C}[x, y]_d$ van $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$

Ariyan Javanpeykar

15 april 2008

Zij G een groep.

Opmerking 1. We gebruiken de notatie $\mathrm{GL}(V)$ voor de verzameling inverteerbare, lineaire afbeeldingen van V naar V.

Definitie 1. Een complexe representatie van G is een paar (ρ, V) waarbij V een eindig-dimensionale, complexe vectorruimte is en $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ een groepshomomorfisme is.

We herhalen wat een Lie groep is en merken op dat $\mathrm{GL}(V)$ een Lie groep is voor alle eindig-dimensionale vectorruimtes V. Ook de groep

$$\mathrm{SL}(\mathbf{C}^2) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) = \{X \in \mathrm{GL}(\mathbf{C}^2) \mid \det(X) = 1\}$$

is een Lie groep.

We specialiseren ons tot representaties van Lie groepen: een representatie van een Lie groep G is een paar (ρ, V) waarbij V een eindig-dimensionale, complexe vectorruimte is en $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ een morfisme van Lie groepen is.

We kijken nu naar de Lie groep $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ en definiëren voor ieder positief geheel getal d een complexe representatie $(\rho_d, \mathbf{C}[x, y]_d)$. De precieze vorm van deze representatie wordt tijdens de voordracht duidelijk gemaakt. Ons doel is het bewijzen van de volgende stelling:

Stelling 1. De representatie $(\rho_d, \mathbf{C}[x, y]_d)$ is een *irreducibele* representatie van $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ voor alle positieve gehele getallen d.

Wij bewijzen deze stelling met behulp van de Lie algebra van $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Het laatste zal ook tijdens de voordracht precies worden gemaakt.