DE APPROXIMATIESTELLING VAN KRONECKER

(Begeleider: Jan-Hendrik Evertse, evertse@math.leidenuniv.nl)

Een klassieke stelling van Dirichlet zegt het volgende:

Zij α een reëel, irrationaal getal. Dan zijn er oneindig veel getallen $p, q \in \mathbf{Z}$ zodat

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{q}, \quad q > 0.$$

Een inhomogene versie hiervan zegt het volgende.

Zij $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ en $\theta \in \mathbf{R}$. Dan zijn er oneindig veel getallen $p, q \in \mathbf{Z}$ zodat

$$|q\alpha - p - \theta| \leq \frac{3}{q}, \quad q > 0.$$

Kronecker bewees het volgende "meerdimensionale" resultaat.

Stelling 1 (Kronecker). *Zijn $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ reële getallen zodat $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ lineair onafhankelijk over $\mathbf{Q}$ zijn.*
Dan bestaan er voor elke $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbf{R}$ en elke $\varepsilon > 0$ getallen $q, p_1, \ldots, p_m \in \mathbf{Z}$ zodat

$$|q\alpha_i - p_i - \theta_i| < \varepsilon \quad \text{voor } i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Definieer de norm van $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbf{R}^m$ door $\|\mathbf{x}\| := \max_i |x_i|$. Dan kunnen we (1) herschrijven als $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| < \varepsilon$, waarbij

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & -1 & \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \end{pmatrix}.$$

De voorwaarde dat $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ lineair onafhankelijk over $\mathbf{Q}$ zijn kan worden vertaald in $\{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m : A^T\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^{m+1}\} = \{\mathbf{0}\}$. Een meer algemene versie van de stelling van Kronecker is nu als volgt.

Stelling 2 (Kronecker). *Zij A een reële $m \times n$-matrix met de eigenschap dat*

$$\{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m : A^T\mathbf{y} \in \mathbf{Z}^n\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Dan is er voor elke vector $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ en elke $\varepsilon > 0$ een vector $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n$ zodat

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| < \varepsilon\,.$$

Er zijn allerlei verschillende bewijzen van deze stelling die preciezere resultaten geven. Er is bijvoorbeeld een bewijs gebaseerd op meetkunde der getallen (studie van roosterpunten in convexe deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$)), en een bewijs gebaseerd op de theorie van gelijkverdeling van rijen. Een rij punten $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ in $[0,1)^r$ heet gelijkverdeeld als voor elk r-tal intervallen $[a_i, b_i) \subseteq [0,1)$ $(i = 1, \ldots, r)$ geldt dat

$$\frac{1}{N}\#\{1 \leq n \leq N : \mathbf{x}_n \in [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_r, b_r)\} \to \prod_{i=1}^{r}(b_i - a_i) \quad \text{voor } N \to \infty.$$

Een bachelorproject zou eruit kunnen bestaan om een of meer bewijzen van de stelling van Kronecker door te werken en zo mogelijk verfijningen van die stelling te bewijzen.