Opgaven week 10 (2002/12/02)

Laat $n \geq 0$, en X een Hausdorffs georiënteerd C^∞-manifold met $\dim_X = n$: voor iedere x in X hebben we een decompositie $\Omega^n_X(x) = \Omega^n_X(x)^+ \coprod \{0\} \coprod \Omega^n_X(x)^-$, die lokaal constant is. Laat nu ω een element zijn van $\Omega^{n-1}_X(X)$, met compacte support. We gaan bewijzen dat $\int_X d\omega = 0$, een speciaal geval van de stelling van Stokes.

1. Laat zien dat voor iedere x in X er een georiënteerde kaart $\phi\colon U \to X$ is met $x \in \phi(U)$, en een C^∞-functie $f\colon X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ met compacte support bevat in $\phi(U)$ en $f = 1$ in een omgeving van x. Waar heb je hierbij nodig dat X Hausdorff is? (Geef eventueel een voorbeeld van een niet Hausdorffse X en een x waarvoor niet zo'n ϕ en f bestaan.)

2. Laat $K \subset X$ een compacte deelverzameling zijn. Laat zien dat er een $r \geq 0$ bestaat, georiënteerde kaarten $\phi_i : U_i \to X$, voor $1 \leq i \leq r$, en functies p_i in $C^\infty_X(X)$ met $\mathrm{Supp}(p_i) \subset \phi_i(U_i)$ compact, en $\sum_i p_i = 1$ op K. Zie eventueel Lemma 12.4 en het bewijs daarvan in het diktaat van Looijenga.

3. Laat $K := \mathrm{Supp}(\omega)$, en laat r, ϕ_i en p_i als hierboven zijn. Dan hebben we:
$$\int_X d\omega = \int_X d(\sum_i p_i\omega) = \sum_i \int_X d(p_i\omega) = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \phi_i^* d(p_i\omega) = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} d(\phi_i^*(p_i\omega)).$$
Om te bewijzen dat $\int_X d\omega = 0$ mogen we nu dus aannemen dat $X = \mathbb{R}^n$.

4. Nu is X gelijk aan $\mathbb{R}^n$. Schrijf $\omega = \sum_i f_i \prod_{j\neq i} dx_j$, waarbij de producten in de standaard volgorde zijn genomen. We mogen dus ook aannemen, na eventuele permutatie van de coordinaten, dat $\omega = f dx_2 \cdots dx_n$. Schrijf het nu gewoon verder uit (integreer eerst naar de variabele x_1, en gebruik dat voor alle $(a_2, \ldots, a_n)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ de functie $x \mapsto f(x, a_1, \ldots, a_n)$ compacte support heeft).