Opgaven week 11 (2002/12/09)

1. Laat zien dat S^n oriënteerbaar is voor alle $n \geq 0$. Hint: gebruik de standaardoriëntatie van $\mathbb{R}^{n+1}$ en de uitwendige genormaliseerde normaalvector.

2. Laat $n \geq 0$, en laat $\iota\colon S^n \to S^n$ de antipodale afbeelding zijn. Laat zien dat $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\langle\iota\rangle$.

3. Laat $n \geq 1$. Laat zien dat ι als in de vorige opgave de twee oriëntaties van S^n verwisselt precies dan als n even is. Concludeer dat $\iota^*\colon \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(S^n) \to \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(S^n)$ vermenigvuldiging met $(-1)^{n-1}$ is.

4. (De stelling van de kruin.) Laat $n \geq 2$ een even geheel getal zijn en D een C^∞-vectorveld op S^n zijn. Bewijs dat D een nulpunt heeft.

   Hint: stel dat D geen nulpunt heeft. Laat zien dat er dan een homotopie is tussen de identiteit op S^n en de antipodale afbeelding. Merk op dat dit in tegenspraak is met de vorige opgave.

5. Laat $n \geq 1$ een oneven geheel getal zijn. Geef een C^∞-vectorveld op S^n zonder nulpunt.