Opgaven week 2 (2002/09/16)

Maak tenminste vier van de volgende sommen, en lever die in op maandag 09/23 (of eerder).

1. Laat f de afbeelding van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^2$ zijn gegeven door: $f(x,y,z) = (xy, xz)$. Bepaal expliciet bij welke (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$ f een submersie is. Geef een atlas voor de $f^{-1}\{(a,b)\}$ met $(a,b) \neq (0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Is $f^{-1}\{(0,0)\}$ (met de van $\mathbb{R}^3$ geïnduceerde topologie) een topologisch manifold?

2. (Inverse functie stelling.) Laat $k \geq 1$, $n \geq 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ open, en $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ een C^k-afbeelding. Laat x in U zijn, en neem aan dat $(Df)x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijectief is. Bewijs dat er open deelverzamelingen $V \subset U$ en $W \subset \mathbb{R}^n$ zijn, en een C^k-afbeelding $g\colon W \to V$, zodat x in V is, en $f\colon V \to W$ en g inversen van elkaar zijn. Hint: pas de impliciete functie stelling toe (op de afbeelding $F\colon \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, $(b,a) \mapsto f(a) - b$).

3. (Lokaal model van submersies.) Laat $n, m \geq 0$, $k \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ open, en $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ een C^k-afbeelding. Laat x in U zijn, en neem aan dat $(Df)x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjectief is, d.w.z., f is een submersie in x.

   Laat zien dat er een C^k-isomorfisme $\phi\colon W \to V$ is met W open in $\mathbb{R}^n$ en V een open omgeving van x in U, zodat $f \circ \phi\colon W \to \mathbb{R}^m$ de projectie op de eerste m coordinaten is. (Een submersie ziet er lokaal, in geschikte coordinaten, uit als een lineaire projectie.)

   Hint: na een geschikte hernummering van de coordinaten van $\mathbb{R}^n$ is het zo dat de afbeelding $F\colon U \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto (f(y), y_{m+1,\ldots,y_n})$ bijectieve afgeleide heeft in x (gebruik lineaire algebra). Neem voor ϕ een locale inverse van F zoals gegeven door de vorige opgave.

4. (Lokaal model van immersies.) Laat $k \geq 1$, $n, m \geq 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ een C^k-afbeelding. Laat x in U zijn, en neem aan dat $(Df)x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ injectief is, d.w.z., f is een *immersie* in x. Bewijs dat er open deelverzamelingen V en W in $\mathbb{R}^m$ zijn, met $f(x) \in V$, en een C^k-isomorfisme $\phi\colon V \to W$, zodat voor alle y in $f^{-1}V$ geldt:

   $$(\phi \circ f)(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots, 0).$$

   In geschikte lokale coordinaten is een immersie dus een injectieve lineaire afbeelding.

   Hint: na een geschikte hernummering van de coordinaten van $\mathbb{R}^m$ heeft de afbeelding $F\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, $(y,z) \mapsto (f(y), z)$ bijectieve afgeleide in $(x, 0)$.

5. Laat $n, m \geq 0$. Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ open zijn, en $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ een C^1-afbeelding met $(Df)(x)$ surjectief voor alle x in U (d.w.z., f is een submersie). Laat zien dat f een *open afbeelding* is, d.w.z., dat voor alle $V \subset U$ open fV open is in $\mathbb{R}^m$.

6. Laat $f\colon X \to Y$ een surjectief open morfisme van topologische ruimten zijn, met Y samenhangend, en zodat de vezels van f, d.w.z. de $f^{-1}\{y\}$ met y in Y (met hun geïnduceerde topologie) samenhangend zijn. Bewijs dat X samenhangend is. Hint: laat U een open en gesloten deelverzameling van X zijn, bewijs dat fU en $f(X - U)$ lege doorsnede hebben.

7. Laat $k \geq 0$. Laat X een verzameling zijn met een C^k-atlas (I, n, U, ϕ). Bewijs dat de collectie deelverzamelingen V van X met de eigenschap dat, voor alle i in I, $\phi_i^{-1}V$ open in $\mathbb{R}^{n_i}$ is, een topologie is. Laat zien dat dit de fijnste topologie is waarvoor alle kaarten ϕ_i continu zijn.