Opgaven week 4 (2002/10/07)

Maak de volgende vier sommen, en lever die in op maandag 10/14 (of eerder).

1. Som 1.14 uit de tekst, in de context van topologische manifolds. Dat wil zeggen, laat zien dat $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ homeomorf is met S^1, en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ met S^2. Gebruik bijvoorbeeld één-punts compacitifaties. In de volgende twee opgaven maken we in het laatste geval een mooie afbeelding (zelfs algebraïsch).

2. (Quaternionen algebra.) Laat $\mathbb{H}$ de deelverzameling van $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ bestaande uit de elementen van de vorm $\left(\begin{smallmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$.

   (a) Laat zien dat $\mathbb{H}$ een $\mathbb{R}$-deel-algebra van $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ is. Dus $\mathbb{H}$ is een associatieve $\mathbb{R}$-algebra met eenheidselement. Merk op dat $\mathbb{H}$ niet commutatief is.

   (b) Laat zien dat $h \mapsto h^* := \overline{h}^t$ (getransponeerde van de complex geconjugeerde) een involutie van $\mathbb{H}$ is (dus: $(h^*)^* = h$, $(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)^* = \lambda_1 h_1^* + \lambda_2 h_2^*$, $(h_1 h_2)^* = h_2^* h_1^*$, voor alle h, h_1, h_2 in $\mathbb{H}$, λ_1, λ_2 in $\mathbb{R}$). Voor $h \in \mathbb{H}$ definiëren we $\mathrm{tr}(h) := h + h^*$ (het spoor) en $\mathrm{N}(h) := hh^*$ (de norm). Laat zien dat dit elementen van $\mathbb{R}$ zijn, dat $h^2 - \mathrm{tr}(h)h + \mathrm{N}(h) = 0$, en dat $N(h_1 h_2) = N(h_1)N(h_2)$ voor alle h_1 en h_2 in $\mathbb{H}$.

   (c) Laat zien dat $\mathbb{H}$ een delingsalgebra is: ieder element ongelijk aan nul is inverteerbaar. Geef een formule voor de inverse van een element $h \neq 0$ in termen van h^* en $\mathrm{N}(h)$.

   (d) Laat zien dat $(1, i, j, k)$ een $\mathbb{R}$-basis van $\mathbb{H}$ is, met $1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $i = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$, $j = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $k = ij$. Ga na dat $ji = -ij$ en $i^2 = j^2 = -1$. Bereken k^2, ik, ki, jk, kj door de associativiteit in $\mathbb{H}$ te gebruiken.

3. We bekijken de actie van de vermenigvuldigingsgroep $\mathbb{H}^*$ van $\mathbb{H}$ op $\mathbb{H}$ door conjugatie: $(h, x) \mapsto hxh^{-1}$.

   (a) Laat zien dat de baan $\mathbb{H}^* \cdot i$ van i de verzameling van h is met $\mathrm{tr}(h) = 0$ en $\mathrm{N}(h) = 1$. (Hint: dit kan door lineaire algebra te gebruiken (diagonalisatie eigenschappen van unitaire matrices).) Concludeer dat $\mathbb{H}^* \cdot i$ de verzameling van $bi + cj + dk$ is met b, c, d in $\mathbb{R}$ en $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Kortom, $\mathbb{H}^* \cdot i$ is S^2, en $h \mapsto hih^{-1}$ is een afbeelding van $\mathbb{H}^*$ naar S^2. Schrijf deze afbeelding expliciet uit voor $h = a + bi + cj + dk$ met a, b, c, d in $\mathbb{R}$.

   (b) We bekijken de afbeelding $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$, $a + bi \mapsto a + bi$ (a en b in $\mathbb{R}$). Laat zien dat dit een injectief morfisme van $\mathbb{R}$-algebras is, en dat het beeld gelijk is aan de centralisator van i in $\mathbb{H}$, d.w.z., de verzameling van h zodat $hi = ih$.

   (c) De afbeelding $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$ maakt van $\mathbb{H}$ een 2-dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte, zeg met basis $(1, j)$. Concludeer dat de afbeelding $h \mapsto hih^{-1}$ van $\mathbb{H} - \{0\}$ naar S^2 een bijectie induceert van $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ naar S^2.

4. (a) Laat zien dat de bijectie $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$ van de vorige opgave een homeomorfisme is.

   (b) Laat zien dat die bijectie een isomorfisme van C^∞-manifolds is. Hint: gebruik een kaart van $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, en laat zien dat de afgeleide bijectief is. Als je weinig wilt rekenen, kun je de actie van $\mathbb{H}^*$ op $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{H}^*/\mathbb{C}^*$ via links vermenigvuldigingen gebruiken; dan is het genoeg om in één punt te laten zien dat de afgeleide bijectief is.