Opgaven week 5 (2002/10/14)

Maak de volgende vier sommen, en lever die in op maandag 10/21 (of eerder).

1. Laat $k \geq 1$, en $f\colon X \to Y$ een morfisme van C^k-manifolds. Dan noemen we f een submersie als voor alle x in X geldt dat $\mathrm{T}_f(x)\colon \mathrm{T}_X(x) \to \mathrm{T}_Y(fx)$ surjectief is. Laat zien dat een submersie een open afbeelding is.

   Laat nu $n \geq 2$, $G := \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Dan werkt G op $\mathbb{R}^n$, en de baan van de standaard eerste basis vector e_1 is de eenheidsbol S^{n-1}. We bekijken de afbeelding $f\colon G \to S^{n-1}$, $g \mapsto ge_1$. Dan is f een morfisme van C^∞-manifolds, compatibel met de G-actie: $f(gx) = gf(x)$ voor alle g en x in G. Laat zien dat hieruit volgt dat $\mathrm{T}_f(g)$ surjectief is voor alle g dan en slechts dan als $\mathrm{T}_f(1)$ surjectief is (maak een mooi commutatief diagram met allemaal raakafbeeldingen). Bereken $\mathrm{T}_{S^{n-1}}(e_1)$ en $\mathrm{T}_G(e_1)$ als deelruimten van $\mathbb{R}^n$ en $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (respectievelijk), en laat zien dat $\mathrm{T}_f(1)$ surjectief is.

   Laat zien dat de vezels van f allemaal isomorf zijn met $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ (gebruik weer de actie van G), en concludeer dat $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ samenhangend is.

2. Laat $k \geq 1$, en laat X en Y beide C^k-manifolds zijn. Laat x in X en y in Y. Dan hebben we een morfisme $p\colon \mathrm{T}_{X\times Y}(x,y) \to \mathrm{T}_X(x) \times \mathrm{T}_Y(y)$ geïnduceerd door de projecties $p_X\colon X \times Y \to X$ en $p_Y\colon X \times Y \to Y$. Aan de andere kant is er een morfisme $i\colon \mathrm{T}_X(x)\times\mathrm{T}_Y(y) \to \mathrm{T}_{X\times Y}(x,y)$ geïnduceerd door de injecties $i_{X,y}\colon X \to X\times Y$, $x' \mapsto (x',y)$ en $i_{Y,x}\colon Y \to X \times Y$, $y' \mapsto (x,y')$. Laat zien dat p en i inversen zijn. (Gebruik een kaart te (x,y), bijvoorbeeld.)

3. Laat $k \geq 1$. Laat G een C^k-Liegroep zijn (d.w.z., G is een C^k-manifold met compatibele groepsstructuur). Dan hebben we morfismen van C^k-manifolds $\mu\colon G\times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$, en $\iota\colon G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$. Laat zien dat $\mathrm{T}_\mu\colon \mathrm{T}_G(e) \times \mathrm{T}_G(e) = \mathrm{T}_{G\times G}(e) \to \mathrm{T}_G(e)$ simpelweg de optelling is, en dat $\mathrm{T}_\iota(e)$ vermenigvuldiging met -1 is.

4. Laat $k \geq 1$, en G een C^k-Liegroep zijn. Laat H een gesloten C^k-ondergroep van G zijn. Dan werkt H van rechts op G door translaties. We gaan het quotiënt G/H de structuur van C^k-manifold geven, en laten zien dat de quotiënt afbeelding $p\colon G \to G/H$ een vezeling is, met vezel H.

   We volgen het procédé dat we hebben gezien bij de $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{R})$. Dus G/H krijgt de quotiënt topologie (U is open dan en slechts dan als $p^{-1}U$ open is), en we definiëren voor U open dat $C^k_{G/H}(U) := C^k_G(p^{-1}U)^H$.

   Omdat p compatibel is met de linksactie van G ($p(gx) = g{\cdot}p(x)$ voor alle x en g), is het voldoende aan te tonen dat $(G/H, C^k_{G/H})$ een C^k-manifold is in een omgeving van $p(e)$. Laat zien dat er een kaart $\phi\colon U \to G$ is, met $\phi(0) = e$ en $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, zodat $\phi^{-1}H = U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ (gebruik som 4 van week 2). Laat $T \subset U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^m)$ een open omgeving van 0 zijn, en bekijk de afbeelding:

   $$f\colon T \times H \longrightarrow G, \quad (t,h) \mapsto \phi(t)h.$$

   Laat zien dat $\mathrm{T}_f(0)$ bijectief is en concludeer dat dit zo is voor alle $(t,0)$ met t in een omgeving van 0. Door T klein genoeg te nemen mogen we aannemen dat $\mathrm{T}_f(t,0)$ bijectief is voor alle t. Concludeer dat $\mathrm{T}_f(t,h)$ bijectief is voor alle (t,h), aangezien f compatibel is met de rechts-actie van H. Laat zien dat als T voldoende klein is, dat $\phi(t_1)^{-1}\phi(t_2) \in H$ impliceert dat $t_1 = t_2$. Neem aan dat T voldoende klein is, en concludeer dat f injectief is, en dus een isomorfisme naar een open deel van G, van de vorm $p^{-1}U$. Laat zien dat $\overline{f} := pf \colon T \to G/H$ een isomorfisme is van (T, C^k_T) naar $(U, C^k_{G/H}|_U)$. Dus $(G/H, C^k_{G/H})$ is een C^k-manifold.

Concludeer dat $p \colon G \to G/H$ een vezeling is met vezel H (dit volgt direct uit het voorgaande in een omgeving van $p(e)$; gebruik dan de links-G-actie).