Opgaven week 6 (2002/10/28)

Maak van de volgende vier sommen de eerste drie, en lever die in op maandag 11/4 (of eerder) (de vierde som wordt donderdag op college behandeld).

1. Maak de som die impliciet in het bewijs van Propositie 3.1.1 beschreven is.

2. Laat i in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, A een ring, en M een A-moduul.

   (a) Laat $n \geq 0$ en neem aan dat M vrij is van rang n. Bewijs dat de rang van het vrije A-moduul $\mathrm{S}^i(M)$ gelijk is aan $\binom{i+n-1}{n-1}$ met een combinatorisch argument (d.w.z. laat zien dat het aantal monomen van graad i in de variabelen $x_1, \ldots, x_n$ gelijk is aan het aantal keuzen van $n-1$ elementen uit een verzameling met $i+n-1$ elementen).

   (b) Laat zien dat de afbeelding $M^i \to \mathrm{S}^i(M)$, $(m_1, \ldots, m_i) \mapsto m_1 \cdots m_i$ een universele symmetrische i-lineaire afbeelding is. (Hint: gebruik dat $M^i \to \mathrm{T}^i(M)$ een universele i-lineaire afbeelding is, en laat zien dat de kern van $\mathrm{T}^i(M) \to \mathrm{S}^i(M)$ voortgebracht wordt door elementen van de vorm $u_1 \otimes \cdots \otimes u_j \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ met $j \geq 0$, $k \geq 0$, en $2 + j + k = i$.)

   (c) Laat zien dat de afbeelding $M^i \to \Lambda^i(M)$, $(m_1, \ldots, m_i) \mapsto m_1 \cdots m_i$ een universele alternerende i-lineaire afbeelding is.

3. Laat k een lichaam zijn, V een k-vectorruimte en d in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. We hebben de Grassman variëteit $\mathrm{Gr}_d(V)$ van d-dimensionale deelruimten van V gedefiniëerd, met de structuur van C^∞-manifold als k gelijk is aan $\mathbb{R}$ en V eindig dimensionaal is.

   Laat W een d-dimensionale deelruimte van V zijn, en laat $w_1, \ldots, w_d$ een basis zijn van W. Dan krijgen we een element $w_1 \cdots w_d$ van $\Lambda^d(V)$. Laat zien dat dit element ongelijk aan nul is, en dat zijn beeld in $\mathbb{P}(\Lambda^d(V))$ alleen van W afhangt. Dus we krijgen een afbeelding ϕ van $\mathrm{Gr}_d(V)$ naar $\mathbb{P}(\Lambda^d(V))$. Laat zien dat deze afbeeling injectief is. Deze afbeelding heet de Plücker inbedding.

   Laat dan zien dat, voor $k = \mathbb{R}$, ϕ een C^∞-morfisme is, met overal injectieve afgeleide. (Hier is het handig om de actie van $\mathrm{GL}(V)$ te gebruiken.)

4. Laat A een $\mathbb{Q}$-algebra zijn, M een A-moduul, en $n \geq 0$. De groep $G := \mathrm{S}_n$ van permutaties van $\{1, \ldots, n\}$ werkt (van rechts) op het A-moduul M^n door $(\sigma m)_i = m_{\sigma(i)}$, en dus (ook van rechts) op $\mathrm{T}^n(M)$: $m_1 \cdots m_n$ wordt naar $m_{\sigma(1)} \cdots m_{\sigma(n)}$ gestuurd. Laat nu p_1 en p_ε de endomorfismen van $\mathrm{T}^n(M)$ zijn gegeven door:

   $$p_1(x) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma x \cdot \sigma, \qquad p_\varepsilon(x) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) x \cdot \sigma,$$

   waarbij de sommen over alle σ in S^n zijn. Laat zien dat p_1 en p_ε orthogonale idempotenten zijn: $p_1^2 = p_1$, $p_\varepsilon^2 = p_\varepsilon$, en $p_1 p_\varepsilon = p_\varepsilon p_1 = 0$. Laat $\mathrm{S}^n(M)' := p_1 \mathrm{T}^n(M)$, en $\Lambda^n(M)' := p_\varepsilon \mathrm{T}^n(M)$. Dan heten $\mathrm{S}^n(M)'$ en $\Lambda^n(M)'$ de A-modulen van *symmetrische* en *anti-symmetrische* tensoren van graad n van M. Laat zien dat de natuurlijke afbeeldingen $\mathrm{S}^n(M)' \to \mathrm{S}^n(M)$ en $\Lambda^n(M)' \to \Lambda^n(M)$ isomorfismen zijn. (Hierbij is het handig te gebruiken dat S_n ook op $\mathrm{S}^n(M)$ en $\Lambda_n(M)$ werkt, compatibel met de actie op $\mathrm{T}^n(M)$.)