Opgaven week 9 (2002/11/25)

Maak de volgende sommen, en lever die in op maandag 12/02 (of eerder).

1. Laat Y een gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn, en U zijn complement. Laat X het C^∞-manifold zijn gekregen door twee copiën van $\mathbb{R}$ aan elkaar te plakken via de identiteitsafbeelding van U naar zichzelf (dus X is de reële lijn met Y verdubbeld). Laat g_1 en g_2 de bijbehorende open immersies van $\mathbb{R}$ in X zijn. Laat v een volume vorm op X zijn, met quasicompacte support.

   Druk $\int_X v$ uit in de integralen over $\mathbb{R}$ en over U van g_1^*v en g_2^*v.

   Druk $\int_X v$ uit in de integralen over Y en over U van g_1^*v en g_2^*v.

   Geef een voorbeeld waar al deze deze integralen over $\mathbb{R}$, U en Y ongelijk aan nul zijn.

2. Laat $n \geq 1$ en $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Laat $x_{i,j} \colon G \to \mathbb{R}$ de functie zijn gegeven door: $g \mapsto g_{i,j}$. Bewijs dat de differentiaalvorm

   $$\frac{dx_{1,1}dx_{2,1}\cdots dx_{n,1}\cdot dx_{1,2}\cdots dx_{n,2}\cdots\cdots dx_{n,1}\cdots dx_{n,n}}{\det^n}$$

   van graad n^2 invariant is onder alle links en rechtstranslaties van G naar zichzelf. Hier is $\det\colon G \to \mathbb{R}$ de determinant-functie.

   Aanwijzing: gewoon de definities toepassen. Laat bijvoorbeeld zien dat $(g\cdot)^*x_{i,j} = \sum_k g_{i,k}x_{k,j}$ door $(gh)_{i,j} = \sum_k g_{i,j}h_{k,j}$ te gebruiken.