Ceci est une version saisie en LaTeX2e du livre “Revêtements Étales et Groupe Fondamental”, Lecture Notes in Mathematics, 224, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

La mise en page a été faite par des volontaires, partipant à un projet dont on trouvera plus de détails à `http://maths.univ-rennes1.fr/~edix/`.

Cette version (appelons-la version -1) est faite uniquement pour une étape de correction. Dans peu de temps deux autres versions (0 et 1, disons) serons soumises au archives de Los Alamos (`http://arxiv.org/`). Version 0 doit reproduire le texte original, avec le fichier LaTeXcontenant les erreurs rapportées sous forme de commentaires. Dans la version 1 ces erreurs seront prises en compte.

L’ancienne numérotation des pages est incorporée dans la marge (le nombre n indiquant le début de la page n), ainsi que la décomposition en parts pour la saisie et la correction (“part n” indiquant le début de la part n).

This is a LaTeX2e version of the book “Revêtements Étales et Groupe Fondamental”, Lecture Notes in Mathematics, 224, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

Typesetting was done by volunteers, participating in a project on which one can find more details at `http://maths.univ-rennes1.fr/~edix/`.

This version (version -1, say) is intended for proofreading only. Soon, two other versions (0 and 1, say) will be submitted to the Los Alamos archives (`http://arxiv.org/`). Version 0 should reproduce the original text, but the LaTeX file will contain the reported errors as comments. In version 1 these reported errors will be taken into account.

The old page numbering is incorporated in the margin (the number n marking the beginning of page n), as well as the decomposition into parts for typesetting and proofreading (“part n” marking the beginning of part n).

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS MARIE

1960–61

REVETEMENTS ETALES ET GROUPE FONDAMENTAL

(SGA 1)

Un séminaire dirigé par

A. GROTHENDIECK

Augmenté de deux exposés par

Mme M. Raynaud

Introduction

Dans la première partie de cette introduction, nous donnons des précisions sur le contenu du présent volume ; dans la deuxième, sur l'ensemble du "*Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*", dont le présent volume constitue le tome premier.

1. Le présent volume présente les fondements d'une théorie du groupe fondamental en Géométrie Algébrique, dans le point de vue "kroneckerien" permettant de traiter sur le même pied le cas d'une variété algébrique au sens habituel, et celui d'un anneau des entiers d'un corps de nombres, par exemple. Ce point de vue ne s'exprime d'une façon satisfaisante que dans le langage des schémas, et nous utiliserons librement ce langage, ainsi que les résultats principaux exposés dans les trois premiers chapitres des *Eléments de Géométrie Algébrique* de J. DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK, (cité EGA dans la suite). L'étude du présent volume du "*Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*" ne demande pas d'autres connaissances de la Géométrie Algébrique, et peut donc servir d'introduction aux techniques actuelles de Géométrie Algébrique, à un lecteur désireux de se familiariser avec ces techniques.

Les exposés I à XI de ce livre sont une reproduction textuelle, pratiquement inchangée, des notes miméographiées du Séminaire oral, qui étaient distribuées par les soins de l'*Institut des Hautes Etudes Scientifiques*[1]. Nous nous sommes bornés à rajouter quelques notes de bas de page au texte primitif, de corriger quelques erreurs de frappe, et de faire un ajustage terminologique, le mot "morphisme simple" ayant notamment été remplacé entretemps par celui de "morphisme lisse", qui ne prête pas aux mêmes confusions.

Les exposés I à IV présentent les notions locales de morphisme *étale* et de morphisme *lisse* ; ils n'utilisent guère le langage des schémas, exposé dans le Chapitre I des *Eléments*[2]. L'exposé V présente la description axiomatique du groupe fondamental d'un schéma, utile même dans le cas classique où ce schéma se réduit au spectre d'un corps, où on trouve une reformulation fort commode de la théorie de Galois habituelle. Les exposés VI et VIII présentent la *théorie de la descente*, qui a pris une importance croissance en Géométrie Algébrique dans ces dernières années, et qui pourrait rendre des services analogues en Géométrie Analytique et en Topologie.

[1]Ainsi que les notes des séminaires faisant suite à celui-ci. Ce mode de distribution s'étant avéré impraticable et insuffisant à la longue, tous les "*Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*" paraîtront désormais sous forme de livre comme le présent volume.

[2]Une étude plus complète est maintenant disponible dans les *Eléments*, Chap IV, §§ 17 et 18.

Il convient de signaler que l'exposé VII n'avait pas été rédigé, et sa substance se trouve incorporé dans un travail de J. Giraud (Méthode de la Descente, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 2, 1964, viii + 150 p.). Dans l'exposé IX, on étudie plus spécifiquement la descente des morphismes étales, obtenant une approche systématique pour des théorèmes du type de VAN KAMPEN pour le groupe fondamental, qui apparaissent ici comme de simples traductions de théorèmes de descente. Il s'agit essentiellement d'un procédé de calcul du groupe fondamental d'un schéma connexe X, muni d'un morphisme surjectif et propre, disons $X' \to X$, en termes des groupes fondamentaux des composantes connexes de X' et des produits fibrés $X' \times_X X'$, $X' \times_X X' \times_X X'$, et des homomorphismes induits entre ces groupes par les morphismes simpliciaux canoniques entre les schémas précédents. L'exposé X donne la théorie de la *spécialisation du groupe fondamental*, pour un morphisme propre et lisse, dont le résultat le plus frappant consiste en la détermination (à peu de chose près) du groupe fondamental d'une courbe algébrique lisse en caractéristique $p > 0$, grâce au résultat connu par voie transcendante en caractéristique nulle. L'exposé XI donne quelques exemples et compléments, en explicitant notamment sous forme cohomologique la théorie des revêtements de *KUMMER*, et celle d'*ARTIN–SCHREIER*. Pour d'autres commentaires sur le texte, voir l'*Avertissement* à la version multigraphiée, qui fait suite à la présente Introduction.

Depuis la rédaction en 1961 du présent Séminaire a été développé, en collaboration par M. ARTIN et moi-même, le langage de la *topologie étale* et une théorie cohomologique correspondante, exposée dans la partie SGA 4 "Cohomologie étale des schémas" du *Séminaire de Géométrie Algébrique*, à paraître dans la même série que le présent volume. Ce langage, et les résultats dont il dispose dès à présent, fournissent un outil particulièrement souple pour l'étude du groupe fondamental, permettant de mieux comprendre et de dépasser certains des résultats exposés ici. Il y aurait donc lieu de reprendre entièrement la théorie du groupe fondamental de ce point de vue (tous les résultats-clefs figurant en fait dès à présent dans loc. cit.). C'est ce qui était projeté pour le chapitre des *Eléments* consacré au groupe fondamental, qui devait contenir également plusieurs autres développements qui n'ont pu trouver leur place ici (s'appuyant sur la technique de résolution des singularités) : calcul du "groupe fondamental local" d'un anneau local complet en termes d'une résolution des singularités convenable de cet anneau, formules de Künneth locales et globales pour le groupe fondamental sans hypothèse de propreté (cf. Exp. XIII), les résultats de M. ARTIN sur la comparaison des groupes fondamentaux locaux d'un anneau local hensélien excellent et de son complété (SGA 4 XIX). Signalons également la nécessité de développer une théorie du groupe fondamental d'un topos, qui englobera à la fois la théorie topologique ordinaire, sa version semi-simpliciale, la variante "profinie"développé dans l'exposé V du présent volume, et la variante pro-discrète un peu plus générale de SGA 3 X 7 (adaptée au cas de schémas non normaux et non unibranches). En attendant une refonte d'ensemble de la théorie dans cette optique, l'exposé XIII de Mme RAYNAUD, utilisant le langage et les résultats de SGA 4, est destiné à montrer le parti qu'on peut tirer dans quelques questions typiques, en généralisant notamment certains résultats de l'exposé X à des schémas relatifs non propres. On y donne en particulier la structure du groupe fondamental "premier à p" d'une courbe algébrique non complète en car. quelconque (que j'avais annoncé en 1959, mais dont une démonstration n'avait pas été publiée à ce jour).

Malgré ces nombreuses lacunes et imperfections (d'autres diront : à cause de ces lacunes et imperfections), je pense que le présent volume pourra être utile au lecteur qui désire se familiariser avec la théorie du groupe fondamental, ainsi que comme ouvrage de référence, en attendant la rédaction et la parution d'un texte échappant aux critiques que je viens d'énumérer.

2. Le présent volume constitue le tome 1 du "*Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*", dont les volumes suivants sont prévus pour paraî tre dans la même série que celui-ci. Le but que se propose le *Séminaire*, parallèlement au traité "Elements de Géométrie Algébrique" de J. DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK, est de jeter les fondements de la Géométrie Algébrique, suivant les points de vue dans ce dernier ouvrage. La référence standart pour tous les volumes du *Séminaire* est constituée par les Chapitres I, II, III des "*Eléments de Géométrie Algébrique* (cités EGA I, II, III), et on suppose le lecteur en possession du bagage d'algèbre commutative et l'algèbre homologique que ces chapitres impliquent[3]. De plus, dans chaque volume du *Séminaire* il sera référé librement, dans le mesure des besoins, à des volumes antérieurs du même *Séminaire*, ou à d'autres chapitres publiés ou sur le point de paraî tre des "Eléments".

Chaque *partie* du *Séminaire* est centrée sur un sujet principal, indiqué dans le titre du ou des volumes correspondants ; le séminaire oral porte généralement sur une année académique, parfois plus. Les exposés à l'intérieur de chaque partie du *Séminaire* sont généralement dans une dépendance logique étroite les uns par rapport aux autres ; par contre, les différentes parties du *Séminaire* sont dans une large mesure logiquement indépendants les uns par rapport aux autres. Ainsi, la partie "Schémas en Groupes"est à peu près entièrement indépendante des deux parties du *Séminaire* qui la précèdent chronologiquement ; par contre, elle fait un fréquent appel aux résultats de EGA IV. Voici la liste des parties du *Séminaire* qui doivent paraî tre prochainement (cités SGA 1 à SGA 7 dans la suite) :

SGA 1. Revêtements étales et groupe fondamental, 1960 et 1961.

SGA 2. Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, 1961/62.

SGA 3. Schémas en groupes, 1963 et 1964 (3 volumes), en coll. avec M. DEMAZURE.

SGA 4. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, 1963/64 (3 volumes), (en coll. avec M. ARTIN et J.L. VERDIER).

SGA 5. Cohomologie l-adique et fonctions L, 1964 et 1965 (2 volumes).

SGA 6. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, 1966/67 (2 volumes) (en coll. avec P. BERTHELOT et L. ILLUSIE).

SGA 7. Groupes de monodromie locale en géométrie algébrique.

Trois parmi ces *Séminaires* partiels ont étés dirigés en *collaboration* avec d'autres mathématiciens, qui figureront comme co-auteurs sur la couverture des volumes correspondants. Quant aux autres participants actifs du *Séminaire*, dont le rôle (tant au point de vue rédactionnel que de celui du travail de mise au point mathématique) est allé croissant d'année en année, le nom

[3]Voir l'Introduction à EGA I pour des précisions à ce sujet.

de chaque participant figure en tête des exposés dont il est responsable comme conférencier ou comme rédacteur, et la liste de ceux qui figurent dans un volume déterminé se trouve indiqué sur la page de garde dudit volume.

Il convient de donner quelques précisions sur les rapports entre le *Séminaire* et les *Eléments*. Ces derniers étaient destinés en principe à donner un exposé d'ensemble des notions et techniques jugées les plus fondamentales dans la Géométrie Algébrique, à mesure que ces notions et techniques elles-mêmes se dégagent, par le jeu naturel d'exigences de cohérence logique et esthétique. Dans cette optique, il était naturel de considérer le *Séminaire* comme une version préliminaire des *Eléments*, destinée à être englobée à peu près totalement, tôt ou tard, dans ces derniers. Ce processus avait déjà commencé dans une certaine mesure il y a quelques années, puisque les exposés I à IV du présent volume SGA 1 sont entièrement englobés par EGA IV, et que les exposés VI à VIII devaient l'être d'ici quelques années dans EGA VI. Cependant, à mesure que se développe le travail d'édification entrepris dans les *Eléments* et dans le *Séminaire*, et que les proportions d'ensemble se précisent, le principe initial (d'après lequel le *Séminaire* ne constituerait qu'une version préliminaire et provisoire) apparaît de moins en moins réaliste en raison (entre autres) des limites imposées par la prévoyante nature à la durée de la vie humaine. Compte tenu du soin généralement apporté dans la rédaction des différentes parties du *Séminaire*, il n'y aura lieu sans doute de reprendre une telle partie dans les *Eléments* (ou des traités qui en prendraient la relève) que lorsque des progrès ultérieurs à la rédaction permettront d'y apporter des améliorations très substantielles, aux prix de modifications assez profondes. C'est le cas dès à présent pour le présent séminaire SGA 1, comme on l'a dit plus haut, et également pour SGA 2 (grâce aux résultats récents de Mme. RAYNAUD). Par contre, rien n'indique actuellement qu'il en sera ainsi dans un proche avenir pour aucune des parties citées plus haut SGA 3 à SGA 7.

Les références à l'intérieur du "Séminaire de Géométrie Algébrique de Bois-Marie" sont données ainsi. Une *référence intérieure* à une des parties SGA 1 à SGA 7 du Séminaire est donnée dans le style III 9.7, où le chiffre III désigne le numéro de l'exposé, qui figure en haut de chaque page de l'exposé en question, et 9.7 le numéro de l'énoncé (ou de la définition, remarque, etc.) à l'intérieur de l'exposé. Le cas échéant, des nombres décimaux plus longs peuvent être utilisés, par exemple 9.7.1, 9.7.2 pour désigner par exemple les diverses étapes dans la démonstration d'une proposition 9.7. La référence III 9 désigne la paragraphe 9 de l'exposé III. Le numéro de l'exposé est omis pour les références internes à un exposé. Pour une *référence à une autre* des *parties* du *Séminaire*, on utilise les mêmes sigles, mais précédés de la mention de la partie en question des SGA, SGA 1 III 9.7. De même, la référence EGA IV 11.5.7 signifie : Eléments de Géométrie Algébrique, Chap. IV, énoncé (ou définition etc...) 11.5.7 ; ici, le premier chiffre arabe désigne encore le numéro du paragraphe. A part ces conventions en vigueur dans l'ensemble des SGA, la bibliographie relative à un exposé sera généralement rassemblée à la fin de celui-ci, et il y sera référé à l'intérieur de l'exposé par des numéros entre crochets comme [3], suivant l'usage.

Enfin, pour la commodité du lecteur, chaque fois que cela semblera nécessaire, nous joindrons à la fin des volumes des SGA un index des notations, et un index terminologique contenant s'il y a lieu une traduction anglaise des termes français utilisés.

Je tiens à joindre à cette introduction un commentaire extra-mathématique. Au mois de novembre 1969 j'ai eu connaissance du fait que l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, dont j'ai été professeur essentiellement depuis sa fondation, recevait depuis trois ans des subventions du Ministère des Armées. Déjà comme chercheur débutant j'ai trouvé extrêmement regrettable le peu de scrupules que se font la plupart des scientifiques pour accepter de collaborer sous une forme ou une autre avec les appareils militaires. Mes motivations à ce moment étaient essentiellement de nature morale, donc peu susceptibles d'êtres prises au sérieux. Aujourd'hui elles acquièrent une force et une dimension nouvelle, vu le danger de destruction de l'espèce humaine dont nous menace la prolifération des appareils militaires et des moyens de destruction massives dont ces appareils disposent. Je me suis expliqué ailleurs de façon plus détaillée sur ces questions, beaucoup plus importantes que l'avancement de n'importe quelle science (y compris la mathématique) ; on pourra par exemple consulter à ce sujet l'article de G. Edwards dans le n° 1 du journal Survivre (Août 1970), résumant un exposé plus détaillé de ces questions que j'avais fait ailleurs. Ainsi, je me suis trouvé travailler pendant trois ans dans une institution alors qu'elle à mon insu à un mode de financement que je considère comme immoral et dangereux[4]. Etant à présent seul à avoir cette opinion parmi mes collègues à l'IHES, ce qui a condamné à l'échec mes efforts pour obtenir la suppression des subventions militaires du budget de l'IHES, j'ai pris la décision qui s'imposait et quitte l'IHES le 30 septembre 1970 et suspends également toute collaboration scientifique avec cette institution, aussi longtemps qu'elle continuera à accepter de telles subventions. J'ai demandé à M. Motchane, directeur de l'IHES, que l'IHES s'abstienne à partir du 1er octobre 1970 des textes mathématiques dont je suis auteur, ou faisant partie du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie. Comme il a été dit plus haut, la diffusion de ce séminaire va être assurée par la maison Julius Springer, dans le série des Lecture Notes. Je suis heureux de remercier ici la maison Springer et Monsieur K. Peters pour l'aide efficace et courtoise qu'ils m'ont apportée pour rendre possible cette publication, en se chargeant en particulier de la frappe pour la photooffset des nouveaux exposés rajoutés aux anciens séminaires, et des exposés manquants des séminaires incomplets.

Je remercie également M. J.P. Delale, qui s'est chargé du travail ingrat de compiler l'index des notations et l'index terminologique.

Massy, août 1970.

[4]Il va de soi que l'opinion que je viens d'exprimer n'engage que ma propre responsabilité, et non pas celle de la maison d'édition Springer qui édite le présent volume.

AVERTISSEMENT

Chacun des exposés redigés donne la substance de plusieurs exposés oraux consécutifs. Il n'a pas semblé utile d'en préciser les dates.

L'exposé VII, auquel il est référé à diverses reprises au cours de l'exposé VIII, n'a pas été rédigé par le conférencier, qui dans les conférences orales s'était borné à esquisser le langage de la descente dans les catégories générales, en se plaçant à un point de vue strictement utilitaire et sans entrer dans les difficultés logiques soulevées par ce langage. Il est apparu qu'un exposé correct de ce langage sortirait des limites des présentes notes, ne serait-ce que par sa longueur. Pour un exposé en forme de la théorie de la descente, je renvoie à un article en préparation de Jean GIRAUD. En attendant sa parution[5], je pense qu'un lecteur attentif n'aura pas de peine à suppléer par ses propres moyens aux références fantômes de l'Exposé VIII.

D'autres exposés oraux, se plaçant après l'Exposé XI, et auxquels il est fait allusion à certains endroits du texte, n'ont pas non plus été rédigés, et étaient destinés à former la substance d'un Exposé XII et d'un Exposé XIII. Les premiers de ces exposés oraux reprenaient, dans le cadre des schémas et des espaces analytiques avec éléments nilpotents (tels qu'ils sont introduits dans le Séminaire Cartan 1960/61) la construction de l'espace analytique à un préschéma localement de type fini sur un corps valué complet k, les théorèmes du type GAGA dans le cas où k est le corps des complexes, et l'application à la comparaison du groupe fondamental défini par voie transcendante et le groupe fondamental étudié dans ces notes (comparer A. Grothendieck, Fondements de la Géométrie Algébrique, Séminaire Bourbaki n° 190, page 10, décembre 1959). Les derniers exposés oraux esquissaient la généralisation des méthodes développées dans le texte pour l'étude des revêtements admettant de la ramification modérée, et de la structure du groupe fondamental d'une courbe complète privée d'un nombre fini de points (comparer loc. cit., n° 182, page 27, théorème 14). Ces exposés n'introduisent aucune idée essentiellement nouvelle, c'est pourquoi il n'a pas semblé indispensable d'en donner une rédaction en forme avant la parution des chapitres correspondants des Eléments de Géométrie Algébrique[6].

Par contre, les théorèmes du type Lefschetz pour le groupe fondamental et le groupe de Picard, tant au point de vue local que global, ont fait l'objet d'un Séminaire séparé en 1962, qui a été

[5]Actuellement paru : J. GIRAUD, *Méthodes de la descente*, Mémoire n° 2 de la Société mathématiques de France, 1964.

[6]Ils sont inclus dans le présent volume dans l'Exp. XII de Mme Raynaud avec une démonstration différente de la démonstration originale exposée dans le Séminaire oral (cf. introduction).

complètement rédigé et est à la disposition des usagers[7]. Signalons que les résultats développés tant dans le présent Séminaire que dans celui de 1962 seront utilisés de façon essentielle dans la parution de plusieurs résultats clefs dans la cohomologie étale des préschémas, qui feront l'objet d'un Séminaire (conduit par M. Artin et moi-même) en 1963/64, actuellement en préparation[8].

Les exposés I à IV, de nature essentiellement locale et très élémentaire, seront absorbés entièrement par le chapitre IV des *Eléments de Géométrie Algébrique*, dont la première partie est à l'impression et qui sera sans doute publié vers fin 64. Ils pourront néanmoins être utiles à un lecteur qui désirerait se mettre au courant des propriétés essentielles des morphismes lisses, étales ou plats, avant d'entrer dans les arcanes d'un traité systématique. Quant aux autres exposés, ils seront absorbés dans le chapitre VIII[9] des "Eléments", dont la publication ne pourra guère être envisagée avant plusieurs années.

Bures, juin 1963.

[7] *Cohomologie étale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2), paru dans North Holland Pub. Cie.

[8] *Cohomologie étale des schémas* (cité SGA 4), à paraî tre dans cette même série.

[9] En fait, par suite de modification du plan initialement prévu pour les *Eléments*, l'étude du groupe fondamental y est reportée à un chapitre ultérieur à celui qu'on vient d'indiquer. Comparer l'introduction qui précède le présent "Avertissement".

Table des matières

[10] Pour d'autres résultats comme ceux traités dans les numéros 3 et 4, Cf. EGA IV 2.3, 2.6, 2.7.
[11] Cf. EGA IV 18.12 pour des généralisations à des préschémas non nécessairement localement noethériens

Exposé I

Morphismes étales

1

Pour simplifier l'exposition, on suppose que tous les préschémas envisagés sont localement noethériens, du moins après le numéro 2.

1 Notions de calcul différentiel

Soit X un préschéma sur Y, soit $\Delta_{X/Y}$ ou Δ le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$. C'est un morphisme d'immersion, donc un morphisme d'immersion fermée de X dans un ouvert V de $X \times_Y X$. Soit $\mathscr{I}_X$ l'idéal du sous-préschéma fermé correspondant à la diagonale dans V (N.B. si on veut faire les choses intrinsèquement, sans supposer X séparé sur Y – hypothèse qui serait canularesque – on devrait considérer l'image inverse ensembliste de $\mathscr{O}_{X\times X}$ dans X, et désigner par $\mathscr{I}_X$ l'idéal d'augmentation dans ce dernier...). Le faisceau $\mathscr{I}_X/\mathscr{I}_X^2$ peut être regardé comme un faisceau quasi-cohérent sur X, on le dénote par $\Omega^1_{X/Y}$. Il est de type fini si $X \to Y$ est de type fini. Il se comporte bien par rapport à extension de la base $Y' \to Y$. On introduit aussi les faisceaux $\mathscr{O}_{X\times_Y X}/\mathscr{I}_X^{n+1} = \mathscr{P}^n_{X/Y}$, ce sont des faisceaux d'*anneaux* sur X, faisant de X un préschéma qu'on peut dénoter par $\Delta^n_{X/Y}$ et appeler le n.*ème voisinage infinitésimal de* X/Y. Le sorite en est d'une trivialité totale, bien qu'il soit assez long[1] ; il serait prudent de n'en parler qu'au moment où on en dit quelque chose de serviable, avec les morphismes lisses.

2 Morphismes quasi-finis

Proposition 2.1 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local (N.B. les anneaux sont maintenant noethériens), m l'idéal maximal de A. Conditions équivalentes :*

(i) B/mB est de dimension finie sur $k = A/m$.

[1]cf. EGA IV 16.3.

(ii) mB *est un idéal de définition, et* $B/r(B) = \kappa(B)$ *est une extension de* $k = \kappa(A)$*.*

(iii) Le complété $\widehat{B}$ *est fini sur celui* $\widehat{A}$ *de* A*.*

2 On dit alors que B *est quasi-fini* sur A. Un morphisme $f\colon X \to Y$ est dit quasi-fini en x (ou le Y-preschéma f est dit quasi-fini en x) si $\mathscr{O}_x$ est quasi-fini sur $\mathscr{O}_{f(x)}$. Cela revient aussi à dire que x est *isolé dans sa fibre* $f^{-1}(x)$. Un morphisme est dit quasi-fini s'il l'est en tout point[2].

Corollaire 2.2 *Si* A *est complet, quasi-fini équivaut à fini. On pourrait donner le sorite (i) (ii) (iii) (iv) (v) habituel pour les morphismes quasi-finis, mais ce ne semble pas indispensable ici.*

3 Morphismes non ramifiés ou nets

Proposition 3.1 *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme de type fini,* $x \in X$*,* $y = f(x)$*. Conditions équivalentes :*

(i) $\mathscr{O}_x/m_y\mathscr{O}_x$ *est une extension finie séparable de* $\kappa(y)$*.*

(ii) $\Omega^1_{X/Y}$ *est nul en* x*.*

(iii) Le morphisme diagonal $\Delta_{X/Y}$ *est une immersion ouverte au voisinage de* x*.*

Pour l'implication (i)⇒(ii), on est ramené aussitôt par Nakayama au cas où $Y = \operatorname{Spec}(k)$, $X = \operatorname{Spec}(k')$, où c'est bien connu et d'ailleurs trivial sur la définition de séparable ; (ii)⇒(iii) d'après une caractérsiation agréable et facile des immersions ouvertes, utilisant Krull ; (iii)⇒(i) car on est encore ramené au cas où $Y = \operatorname{Spec}(k)$ et où le morphisme diagonal est une immersion ouverte partout. Il faut alors prouver que X est fini d'anneau séparable sur k, on est ramené pour ceci au cas où k est algébriquement clos. Mais alors tout point fermé de X est isolé (car identique à l'image inverse de la diagonale par le morphisme $X \to X \times_k X$ défini par x), d'où le fait que X est fini. On peut supposer alors X réduit à un point, d'anneau A, donc $A \otimes_k A \to A$ est un isomorphisme, d'où $A = k$ cqfd.

Définition 3.2 *a) On dit alors que* f *est* net*, ou encore* non ramifié*, en* x*, ou que* X *est net, ou encore non ramifié, en* x *sur* Y*.*

b) Soit $A \to B$ *un homomorphisme local, on dit qu'il est* net*, ou* non ramifié*, ou que* B *est une algèbre locale* nette*, ou* non ramifiée *sur* A*, si* $B/r(A)B$ *est une extension finie séparable de* $A/r(A)$ *i.e. si* $r(A)B = r(B)$ *et* $k(B)$ *est une extension séparable de* $k(A)$[3]*.* 3

Remarques. Le fait que B soit net sur A se reconnaît déjà sur les complétés de A et de B. Net implique quasi-fini.

Corollaire 3.3 *L'ensemble des points où* f *est net est ouvert.*

[2]Dans EGA II 6.2.3 on suppose de plus f de type fini.
[3]Cf. remords dans III 1.2

Corollaire 3.4 *Soient X', X deux préschémas de type fini sur Y, et $g\colon X' \to X$ un Y-morphisme. Si X est net sur Y, le morphisme graphe $\Gamma_g\colon X' \to X \times_Y X$ est une immersion ouverte.*

En effet, c'est l'image inverse du morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$ par

$$g \times_Y \mathrm{id}_{X'}\colon X' \times_Y X \to X \times_Y X.$$

On peut aussi introduire l'idéal annulateur $\mathfrak{d}_{X/Y}$ de $\Omega^1_{X/Y}$, appelé idéal différente de X/Y ; il définit un sous-préschéma fermé de X qui, ensemblistement, est l'ensemble des points où X/Y est ramifié, i.e. non net.

Proposition 3.5 *(i) Une immersion est nette.*

(ii) Le composé de deux morphismes nets l'est.

(iii) Extension de base dans un morphisme net en est un autre.

Se voit indifféremment sur (ii) ou (iii) (le deuxième me semble plus amusant). On peut bien entendu aussi préciser, en donnant des énoncés ponctuels ; ce n'est plus général qu'en apparence (sauf dans le cadre de la définition b)), et barbant. On obtient comme d'habitude des corollaires :

Corollaires 3.6 *(iv) Produit cartésien de deux morphismes nets en est un autre.*

(v) Si gf est net, f est net.

(vi) Si f est net, $f_{\text{réd}}$ est net.

Proposition 3.7 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local, on suppose l'extension résiduelle $k(B)/k(A)$ triviale ou $k(A)$ algébriquement clos. Pour que B/A soit net, il faut et il suffit que $\widehat{B}$ soit (comme $\widehat{A}$-algèbre) un quotient de $\widehat{A}$.*

Remarques.
- Dans le cas où on ne suppose pas l'extension résiduelle triviale, on peut se ramener à ce cas en faisant une extension finie plate convenable sur A qui détruise ladite extension.
- Donner l'exemple où A est l'anneau local d'un point double ordinaire d'une courbe, B
4 d'un point du normalisé : alors $A \subset B$, B est net sur A à extension résiduelle triviale, et $\widehat{A} \to \widehat{B}$ est surjectif mais *non injectif*. On va donc renforcer la notion de netteté.

4 Morphismes étales. Revêtements étales

On va admettre tout ce qui nous sera nécessaire sur les morphismes plats ; ces faits seront démontrés ultérieurement, s'il y a lieu[4].

[4]Cf. Exp. IV.

Définition 4.1 *a) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. On dit que f est* étale *en x si f est plat en x et net en x. On dit que f est étale s'il l'est en tous les points. On dit que X est étale en x sur Y, ou que c'est un Y-préschéma étale en x etc...*

b) Soit $f : A \to B$ un homomorphisme local. On dit que f est étale, ou que B est étale sur A, si B est plat et non ramifié sur A.[5]

Proposition 4.2 *Pour que B/A soit étale, il faut et il suffit que $\widehat{B}/\widehat{A}$ le soit.*

5 En effet, c'est vrai séparément pour "net" et pour "plat".

Corollaire 4.3 *Soit $f : X \to Y$ de type fini, et $x \in X$. Le fait que f soit étale en x ne dépend que de l'homomorphisme local $\mathscr{O}_{f(x)} \to \mathscr{O}_x$, et même seulement de l'homomorphisme correspondant pour les complétés.*

Corollaire 4.4 *Supposons que l'extension résiduelle $k(A) \to k(B)$ soit triviale, ou que $k(A)$ soit algébriquement clos. Alors B/A est étale sss $\widehat{A} \to \widehat{B}$ est un isomorphisme.*

On conjugue la platitude et 3.7.

Proposition 4.5 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. Alors l'ensemble des points où il est étale est ouvert.*

En effet, c'est vrai séparément pour "net" et "plat".

Cette proposition montre qu'on peut laisser tomber les énoncés "ponctuels" dans l'étude des morphismes de type fini étales quelque part.

Proposition 4.6 *(i) Une immersion ouverte est étale.*

(ii) Le composé de deux morphismes étales est étale.

(iii) Extension de la base.

En effet, (i) est trivial, et pour (ii) et (iii) il suffit de noter que c'est vrai pour "net" et pour "plat". A vrai dire, il y a aussi des énoncés correspondants pour les homomorphismes locaux (sans condition de finitude), qui en tout état de cause devront figurer au multiplodoque (à commencer par le cas : net).

Corollaire 4.7 *Un produit cartésien de deux morphismes étales est itou.*

Corollaire 4.8 *Soient X et X' de type fini sur Y, $g : X \to X'$ un Y-morphisme. Si X' est non ramifié sur Y et X étale sur Y, alors g est étale.*

[5] Cf. remords dans III 1.2.

En effet, g est le composé du morphisme graphe $\Gamma_g\colon X \to X \times_Y X'$ qui est une immersion ouverte par 3.4, et du morphisme de projection qui est étale car déduit du morphisme étale $X \to Y$ par le “changement de base” $X' \to Y$.

Définition 4.9 *On appelle revêtement étale (resp. net) de Y un Y-schéma X qui est fini sur Y et étale (resp. net) sur Y.*

La première condition signifie que X est défini par un faisceau cohérent d'algèbres $\mathscr{B}$ sur Y. La deuxième signifie alors que $\mathscr{B}$ est localement libre sur Y (resp. rien du tout), *et* que de plus, pour tout $y \in Y$, la fibre $\mathscr{B}(y) = \mathscr{B}_y \otimes_{\mathscr{O}_y} k(y)$ soit une algèbre séparable (= composé fini d'extensions finies séparables) sur $k(y)$.

Proposition 4.10 *Soit X un revêtement plat de Y de degré n (la définition de ce terme méritait de figurer dans 4.9) défini par un faisceau cohérent localement libre $\mathscr{B}$ d'algèbres. On définit de façon bien connue l'homomorphisme trace $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ (qui est un homomorphisme de $\mathscr{A}$-modules, où $\mathscr{A} = \mathscr{O}_Y$). Pour que X soit étale, il f et s que la forme bilinéaire $\operatorname{tr}_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} xy$ correspondante définisse un isomorphisme de $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}$, ou ce qui revient au même, que la* section discriminant

$$d_{X/Y} = d_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} \in \Gamma(Y, \bigwedge^n \check{\mathscr{B}} \otimes_{\mathscr{A}} \bigwedge^n \check{\mathscr{B}})$$

soit inversible, ou enfin que l'idéal discriminant défini par cette section soit l'idéal unité.

En effet, on est ramené au cas où $Y = \operatorname{Spec}(k)$, et alors c'est un critère de séparabilité bien
6 connue, et trivial par passage à la clôture algébrique de k.

Remarque. On aura un énoncé moins trivial plus bas, quand on ne suppose pas a priori que X est plat sur Y mais qu'on fait une hypothèse de normalité.

part 1

5 La propriété fondamentale des morphismes étales

Théorème 5.1 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de type fini. Pour que f soit une immersion ouverte, il f et s que ce soit un morphisme* étale et radiciel.

Rappelons que radiciel signifie : injectif, à extensions résiduelles radicielles (et en peut aussi rappeler que cela signifie que le morphisme reste injectif par toute extension de la base). La nécessité est triviale, reste la suffisance. On va donner deux démonstrations différentes, la première plus courte, la deuxième plus élémentaire.

1) Un morphisme plat est ouvert, donc on peut supposer (remplaçant Y par $f(X)$) que f est un *homéomorphisme* sûr. Par toute extension de base, il restera vrai que f' est plat, radiciel, surjectif, donc un homéomorphisme, a fortiori fermée. Donc f est *propre*. Donc f est *fini* (référence :

théorème de Chevalley) défini par un faisceau cohérent $\mathscr{B}$ d'algèbres. $\mathscr{B}$ est localement libre, de plus en vertu de l'hypothèse il est partout de rang 1, donc $X = Y$, cqfd.

2) On peut supposer Y et X *affines*. On se ramène de plus facilement à prouver ceci : si $Y = \operatorname{Spec}(A)$, A local, et si $f^{-1}(y)$ est non vide (y étant le point fermé de Y) alors $X = Y$ (en effet, cela impliquera que tout $y \in f(X)$ a un voisinage ouvert U tel que $X|U = U$). On aura $X = \operatorname{Spec}(B)$, on veut prouver $A = B$. Mais pour ceci, on est ramené à prouver l'assertion analogue en remplaçant A par $\hat{A}$, B par $B \otimes_A \hat{A}$ (compte tenu que $\hat{A}$ est fidèlement plat sur A). On peut donc supposer A *complet*. Soit x le point au-dessus de y, d'après le corollaire 2.2 $\mathscr{O}_x$ est fini sur A donc (étant plat et radiciel sur A) est identique à A. Donc on a $X = Y \amalg X'$ (somme disjointe). Comme X est radiciel sur Y, X' est vide. On a fini.

Corollaire 5.2 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'*immersion fermée *et* étale*. Si X est connexe, f est un isomorphisme de X sur une composante connexe de Y.*

7 En effet, f est aussi une immersion ouverte. On en déduit :

Corollaire 5.3 *Soit X un Y-schéma net, Y connexe. Alors toute section de X sur Y est un isomorphisme de Y sur une composante connexe de X. Il y a donc correspondance biunivoque entre l'ensemble de ces sections, et l'ensemble des composantes connexes X_i de X telles que la projection $X_i \to Y$ soit un isomorphisme, (ou, ce qui revient au même par 5.1, surjectif et radiciel). En particulier, une section est connue quand en connaît sa valeur en un point.*

Seule la première assertion demande une démonstration ; d'après 5.2 il suffit de remarquer qu'une section est une immersion fermée (car X est séparé sur Y) et étale en vertu de 4.8.

Corollaire 5.4 *Soient X et Y deux préschémas sur S, X net séparé sur S et Y connexe. Soient f, g deux S-morphismes de Y dans X, y un point de Y, on suppose $f(y) = g(y) = x$ et les homomorphismes résiduelles $k(x) \to k(y)$ définis par f et g identiques ("f et g coïncident géométriquement en y"). Alors f et g sont identiques.*

Résulte de 5.3 en se ramenant au cas où $Y = S$, en remplaçant X par $X \times_S Y$.

Voici une variante particulièrement importante de 5.3.

Théorème 5.5 *Soient S un préschéma, X et Y deux S-préschémas, S_0 un sous-préschéma fermé de S ayant même espace sous-jacent que S, $X_0 = X \times_S S_0$ et $Y_0 = Y \times_S S_0$ les "restrictions" de X et Y sur S_0. On suppose X étale sur S. Alors l'application naturelle*

$$\operatorname{Hom}_S(Y, X) \to \operatorname{Hom}_{S_0}(Y_0, X_0)$$

est bijective.

On est encore ramené au cas où $Y = S$, et alors cela résulte de la description "topologique" des sections de X/Y donnée dans 5.3.

Scholie Ce résultat comporte une assertion d'*unicité* et d'*existence* de *morphismes*. Il peut aussi s'exprimer (lorsque X et Y sont tous deux pris étales sur S) que le foncteur $X \mapsto X_0$ de la catégorie des S-schémas étales dans la catégorie des S_0-schémas étales est *pleinement fidèle*, i.e. établit une *équivalence* de la première avec une *sous-catégorie pleine* de la seconde. Nous verrons plus bas que c'est même une équivalence de la première et de la seconde (ce qui sera un théorème d'*existence de S-schémas étales*).

8 La forme suivante, plus générale en apparance, de 5.5. est souvent commode :

Corollaire 5.6 ("Théorème de prolongement des relèvements"). *Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & Y_0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ S & \longleftarrow & Y \end{array}$$

de morphismes, où $X \to S$ est étale et $Y_0 \to Y$ est une immersion fermée bijective. Alors on peut trouver un morphisme unique $Y \to X$ qui rende les deux triangles correspondants commutatifs.

En effet, remplaçant S par Y et X par $X \times_S Y$, on est ramené au cas où $Y = S$, et alors c'est le cas particulier de 5.5 pour $Y = S$.

Signalons aussi la conséquence immédiate suivant de 5.1 (que nous n'avons pas donné en corollaire 1 pour ne pas interrompre la ligne d'idées développée à la suite de 5.1) :

Proposition 5.7 *Soient X, X' deux préschémas de type finis et plats sur Y, et soit $g\colon X \to X'$ un Y-morphisme. Pour que g soit une immersion ouverte (resp. un isomorphisme) il faut et il suffit que pour tout $y \in Y$, le morphisme induit sur les fibres*

$$g \otimes_Y k(y)\colon X \otimes_Y k(y) \longrightarrow X' \otimes_Y k(y)$$

le soit.

Il suffit de prouver la suffisance ; comme c'est vrai pour la notion de surjection, on est ramené au cas d'une immersion ouverte. D'après 5.1, il faut vérifier que g est *radiciel*, ce qui est trivial, et qu'il est *étale*, ce qui résulte du corollaire 5.9 ci-dessous.

Corollaire 5.8 *(devrait passer au N° 3) Soient X et X' deux Y-préschémas, $g\colon X \to X'$ un Y-morphisme, x un point de X et y sa projection sur Y. Pour que g soit quasi-fini (resp. net) en x, il f et s qu'il en soit de même de $g \otimes_Y k(y)$.*

En effet, les deux algèbres sur $k\big(g(x)\big)$ qu'il faut regarder pour s'assurer que l'on a bien un
9 morphisme quasi-fini resp. net en x sont les mêmes pour g et $g \otimes_Y k(y)$.

Corollaire 5.9 *Avec les notations de 5.8., supposons X et X' plats et de type fini sur Y. Pour que g soit plat (resp. étale) en x, il f et s que $g \otimes_Y k(y)$ le soit.*

Pour “plat” l’énoncé n’est mis que pour mémoire, c’est un des critères fondamentaux de platitude [6]. Pour étale, cela en résulte ; compte tenu de 5.8.

6 Application aux extensions étales des anneaux locaux complets

Ce numéro est un cas particulier de résultats sur les préschémas formels, qui devront figurer dans le multiplodoque. Néanmoins, on s’en tire ici à meilleur compte, i.e. sans la détermination locale explicite des morphismes étales au N° 7 (utilisant le Main Theorem). C’est peut-être une raison suffisante de garder le présent numéro (même dans le multiplodoque) à cette place.

Théorème 6.1 *Soit A un anneau local complet (noethérien bien sûr), de corps résiduel k. Pour toute A-algèbre B, soit $R(B) = B \otimes_A k$ considéré comme k-algèbre, elle dépend donc fonctoriellement de B. Alors R définit une* équivalence *de la catégorie des A-algèbres* finies et étales sur A *avec la catégorie des algèbres* de rang fini séparables *sur k.*

Tout d’abord, le foncteur en question est pleinement fidèle, comme il résulte du fait plus général :

Corollaire 6.2 *Soient B, B' deux A-algèbres finies sur A. Si B est étale sur A, alors l’application canonique*

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, B') \to \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}\big(R(B), R(B')\big)$$

est bijective.

On est ramené au cas où A est artinien (en remplaçant A par $A/\mathfrak{m}^n$), et alors c’est un cas particulier de 5.5.

Il reste à prouver que pour toute k-algèbre finie et séparable (pourquoi ne pas dire : étale, c’est plus court) L, il existe un B étale sur A tel que $R(B)$ soit isomorphe à L. On peut supposer que L est une extension séparable de k, comme telle elle admet un générateur x, i.e. est isomorphe à une algèbre $k[t]/Fk[t]$ où $F \in k[t]$ est un polynôme unitaire. On relève F en un polynôme unitaire F_1 dans $A[t]$, et on prend $B = A[t]/F_1A[t]$.

7 Construction locale des morphismes non ramifiés et étales

10

Proposition 7.1 *Soient A un anneau noethérien, B une algèbre finie sur A, u un générateur de B sur A, $F \in A[t]$ tel que $F(u) = 0$ (on ne suppose pas F unitaire), $u' = F'(u)$ (où F' est le*

[6] Cf. IV 5.9.

polynôme dérivé), $\mathfrak{q}$ *un idéal premier de* B *ne contenant pas* u', $\mathfrak{p}$ *sa trace sur* A*. Alors* $B_{\mathfrak{q}}$ *est net sur* $A_{\mathfrak{p}}$*.*

En d'autres termes, posant $Y = \operatorname{Spec}(A)$, $X = \operatorname{Spec}(B)$, $X_{u'} = \operatorname{Spec}(B_{u'})$, $X_{u'}$ est non ramifié sur Y. L'énonce résulte du suivant, plus précis :

Corollaire 7.2 *L'idéal différente de* B/A *contient* $u'B$*, et lui est égal si l'homomorphisme naturel* $A[t]/FA[t] \to B$ *(appliquant* t *dans* u*) est un isomorphisme.*

Soit J le noyau de l'homomorphisme $C = A[t] \to B$, ce noyau contient $FA[t]$, et lui est égal dans le deuxième cas envisagé dans 7.2. Comme il est surjectif, $\Omega^1_{B/A}$ s'identifie au quotient de $\Omega^1_{C/A}$ par le sous-module engendré par $J\Omega^1_{C/A}$ et $d(J)$ (il aurait fallu expliciter au N° 1 la définition de l'homomorphisme d, et le calcul de Ω^1 pour une algèbre de polynômes). Identifiant $\Omega^1_{C/A}$ à C grâce à la base dt, on trouve $B/B\cdot J'$ donc la différente est engendrée par l'ensemble J' des images dans B des dérivés des $G \in J$, (et il suffit de prendre des G engendrant J). Comme $F \in J$, resp. F est un générateur de J, on a fini. (N.B. On devrait mettre 7.2. en prop. et 7.1. en corollaire). On trouve :

Corollaire 7.3 *Sous les conditions de 7.1., supposant* F *unitaire et que* $A[t]/FA[t] \to B$ *est un isomorphisme, pour que* $B_{\mathfrak{q}}$ *soit étale sur* $A_{\mathfrak{p}}$*, il f et s que* $\mathfrak{q}$ *ne contienne pas* u'*.*

En effet, comme B est plat sur A, étale équivaut à net, et on peut appliquer 7.2.

Corollaire 7.4 *Sous les conditions de 7.3. pour que* B *soit étale sur* A *il f et. s. que* u' *soit inversible, ou encore que l'idéal engendré par* F, F' *dans* $A[t]$ *soit l'idéal unité.*

Le dernier critère résulte du premier et de Nakayama (dans B).

11 Un polynôme unitaire $F \in A[t]$ ayant la propriété énoncée dans le corollaire 7.4 est dit *polynôme séparable* (si F n'est pas unitaire, il faudrait au moins exiger que le coefficient de son
part 2 terme dominant soit inversible ; dans le cas où A est un corps, on retrouve la définition usuelle).

Corollaire 7.5 *Soit* B *une algèbre* finie *sur l'anneau* local A*. On suppose que* $K(A)$ *est infini ou que* B *soit local. Soit* n *le rang de* $L = B \otimes_A K(A)$ *sur* $K(A) = k$*. Pour que* B *soit net (resp. étale) sur* A*, il faut et il suffit que* B *soit isomorphe à un quotient de (resp. isomorphe à)* $A[t]/FA[t]$*, où* F *est un polynôme unitaire séparable, qu'on peut supposer (resp. qui est nécessairement) de degré* n*.*

Il n'y a qu'à prouver la nécessité. Supposons B net sur A, donc L séparable sur k, il résulte alors de l'hypothèse faite que L/k admet un générateur ξ, donc les ξ^i $(0 \leq i < n)$ forment une base de L sur k. Soit $u \in B$ relevant ξ, alors par Nakayama les u^i $(0 \leq i < n)$ engendrent le A-module B (resp. en forment une base), en particulier on peut trouver un polynôme unitaire $F \in A[t]$ tel que $F(u) = 0$, et B sera isomorphe à un quotient de (resp. isomorphe à) $A[t]/FA[t]$.

Enfin, en vertu de 7.4. appliqué à L/k, F et F' engendrent $A[t]$ module $\mathfrak{m}A[t]$, donc (d'après Nakayama dans $A[t]/FA[t]$) F et F' engendrent $A[t]$, on a fini.

Théorème 7.6 *Soient A un anneau local, $A \to \mathscr{O}$ un homomorphisme local tel que $\mathscr{O}$ soit isomorphe à une algèbre localisée d'une algèbre de type fini sur A. Supposons O net sur A. Alors on peut trouver une A-algèbre B, entière sur A, un idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B, un générateur u de B sur A, un polynôme unitaire $F \in A[t]$, tels que $\mathfrak{n} \not\ni F'(u)$ et que $\mathscr{O}$ soit isomorphe (comme A-algèbre) à $B_{\mathfrak{n}}$. Si $\mathscr{O}$ est étale sur A, on peut prendre $B = A[t]/FA[t]$.*

(Bien entendu, on a là des conditions aussi suffisantes...)

Signalons d'abord les agréables corollaires :

Corollaire 7.7 *Pour que $\mathscr{O}$ soit net sur A, il f et s que $\mathscr{O}$ soit isomorphe au quotient d'une algèbre analogue et* étale *sur A.*

12 En effet, on prendra $\mathscr{O}' = B'_{\mathfrak{n}'}$, où $B' = A[t]/FA[t]$ et où $\mathfrak{n}'$ est l'image inverse de $\mathfrak{n}$ dans B'.

Corollaire 7.8 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de type fini, $x \in X$. Pour que f soit net en x, il f. et s. qu'il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f|U$ se factorise en $U \to X' \to Y$, où la première flêche est une immersion fermée et la seconde un morphisme étale.*

C'est une simple traduction de 7.7.

Montrons comment le jigon de 7.6 résulte de l'énoncé principal : en effet, il existe par 7.7 un épimorphisme $\mathscr{O}' \to \mathscr{O}$, où $\mathscr{O}$ a les propriétés voulues ; mais comme $\mathscr{O}'$ et $\mathscr{O}$ sont étales sur A, le morphisme $\mathscr{O}' \to \mathscr{O}$ est étale par 4.8 donc un isomorphisme.

Démonstration de 7.6. Elle reprend une démonstration du séminaire Chevalley. D'après le *Main Theorem* on aura $\mathscr{O} = B_{\mathfrak{n}}$, où B est une algèbre finie sur A et $\mathfrak{n}$ en est un idéal maximal. Alors $B/\mathfrak{n} = K(\mathscr{O})$ est une extension séparable donc monogène de k ; si $\mathfrak{n}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ sont les idéaux maximaux de B distincts de $\mathfrak{n}$, il existe donc un élément u de B qui appartient à tous les $\mathfrak{n}_i$, et dont l'image dans $B/\mathfrak{n}$ en est un générateur. Or $B/\mathfrak{n} = B_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{n}B_{\mathfrak{n}} = B_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}}$ (où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A). Admettons un instant le

Lemme 7.9 *Soient A un anneau local, B une algèbre finie sur A, $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de B, u un élément de B dont l'image dans $B_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}}$ l'engendre comme algèbre sur $k = A/\mathfrak{m}$, et qui se trouve dans tous les idéaux maximaux de B distincts de $\mathfrak{n}$. Soit $B' = B[u]$, $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}B'$. Alors l'homomorphisme canonique $B'_{\mathfrak{n}'} \to B_{\mathfrak{n}}$ est un isomorphisme.*

Lemme 7.10 *(aurait dû figurer en corollaire à 7.1. avant 7.5. qu'il implique). Soit B une algèbre finie sur A engendrée par un élément u, soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de B tel que $B_{\mathfrak{n}}$ soit non ramifié sur A. Alors il existe un polynôme unitaire $F \in A[t]$ tel que $F(u) = 0$ et $F'(u) \notin \mathfrak{n}$.*

Soit en effet n le rang de la k-algèbre $L = B \otimes_A k$, d'après Nakayama il existe un polynôme unitaire de degré n dans $A[t]$, tel que $F(u) = 0$. Soit f le polynôme déduit de F par réduction mod $\mathfrak{m}$, alors L est k-isomorphe à $k[t]/fk[t]$, donc par 7.3 $f'(\xi)$ n'est pas contenu dans l'idéal maximal de L qui correspond à $\mathfrak{n}$ (ξ désignant l'image de t dans L, i.e. l'image de u dans L). Comme $f'(\xi)$ est l'image de $F'(u)$, on a fini.

13 Le théorème 7.6 résulte maintenant de la conjonction de 7.9 et 7.10. Reste à prouver 7.9. Posons $S' = B' - \mathfrak{n}'$, donc $B'S'^{-1} = B'_{\mathfrak{n}'}$.

$$\begin{array}{ccccc} B & \longrightarrow & BS'^{-1} & \longrightarrow & BS^{-1} = B_{\mathfrak{n}} \\ \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \\ B' & \longrightarrow & B'S'^{-1} = B'_{\mathfrak{n}'} & & \end{array}$$

Soit de même $S = B - \mathfrak{n}$, donc $BS^{-1} = B_{\mathfrak{n}}$, on a donc un homomorphisme naturel $BS'^{-1} \to BS^{-1} = B_{\mathfrak{n}}$, prouvons que c'est un isomorphisme, i.e. que les éléments de S sont inversibles dans BS'^{-1}, i.e. que tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de ce dernier ne rencontre pas S, i.e. induit $\mathfrak{n}$ sur B. En effet, comme BS'^{-1} est fini sur $B'S'^{-1} = B'_{\mathfrak{n}'}$, $\mathfrak{p}$ induit l'unique idéal maximal $\mathfrak{n}'B_{\mathfrak{n}'}$ de $B'_{\mathfrak{n}'}$, donc induit l'idéal maximal $\mathfrak{n}'$ de B' ; comme B est fini sur B', l'idéal $\mathfrak{q}$ de B induit par $\mathfrak{p}$ étant au-dessus de $\mathfrak{n}'$, est nécessairement maximal, et ne contient pas u, donc est identique à $\mathfrak{n}$. (On vient d'utiliser que u appartient à tout idéal maximal de B distinct de $\mathfrak{n}$). Prouvons maintenant que BS'^{-1} égale $B'S'^{-1}$: comme il est fini sur ce dernier, on est ramené par Nakayama à prouver l'égalité mod $\mathfrak{n}'BS'^{-1}$ et a fortiori il suffit de prouver l'égalité mod $\mathfrak{m}BS'^{-1}$; or $BS'^{-1}/\mathfrak{m}BS'^{-1} = B_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}}$ est engendré sur k par u (on utilise ici l'autre propriété de u) donc l'image de B' (et a fortiori de $B'S'^{-1}$) dedans est tout (comme sous-anneau contenant k et l'image de u).

Remarque. On doit pouvoir énoncer le théorème 7.6 pour un anneau $\mathscr{O}$ qui est seulement semi-local, de façon à coiffer aussi 7.5 : on fera l'hypothèse que $\mathscr{O}/\mathfrak{m}\mathscr{O}$ est une k-algèbre *monogène* ; on pourra donc trouver un $u \in B$ dont l'image dans B/mB est un générateur, et appartenant à tous les idéaux maximaux de B ne provenant pas de $\mathscr{O}$. Les lemmes 7.9 et 7.10 doivent s'adapter sans difficulté. Plus généralement, ...

8 Relèvement infinitésimal des schémas étales. Application aux schémas formels

Proposition 8.1 *Soient Y un préschéma, Y_0 un sous-préschéma, X_0 un Y_0-schéma étale, x un point de X_0. Alors il existe un Y-schéma étale X, un voisinage U_0 de x dans X_0, et un Y_0-isomorphisme $U_0 \xrightarrow{\sim} X \times_Y Y_0$.*

Soit en effet y la projection de x dans Y_0, appliquant 7.6 au homomorphisme local étale
14 $A_0 \to B_0$ des anneaux locaux de y et x dans Y_0 et X_0 : on trouve un isomorphisme

$$B_0 = C_{0\mathfrak{n}_0} \qquad C_0 = A_0[t]/F_0A_0[t]$$

où F_0 est un polynôme unitaire et $\mathfrak{n}_0$ est un idéal maximal de C_0 ne contenant pas la classe de $F_0'(t)$ dans C_0. Soit A l'anneau local de y dans Y, soit F un polynôme unitaire dans $A[t]$ donnant F_0 par l'homomorphisme surjectif $A \to A_0$ (on relève les coefficients de F_0), soit enfin $\mathscr{C} = A[t]/FA[t]$ et $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de $\mathscr{C}$ image inverse de $\mathfrak{n}_0 x$ par l'épimorphisme naturel $C \to C \otimes_A A_0 = C_0$. Posons

$$B = C_{\mathfrak{n}}$$

Il est immédiat par construction et 7.1 que B est étale sur A, et qu'on a un isomorphisme $B \otimes_A A_0 = A_0$. On sait (Chap. I) qu'il existe un Y-schéma de type fini X et un point z de X au-dessus de y tel que $\mathscr{O}_z$ soit A-isomorphe à C ; comme ce dernier est étale sur $A = \mathscr{O}_y$, on peut (en prenant X assez petit) supposer que X est étale sur Y. Soit $X_0' = X \times_Y Y_0$, alors l'anneau local de z dans X_0' s'identifie à $\mathscr{O}_z \otimes_A A_0 = B \otimes_A A_0$, donc est isomorphe à B_0. Cet isomorphisme est défini pas un isomorphisme d'un voisinage U_0 de x dans X_0 sur un voisinage de z dans X_0' (loc. cité), qu'on peut supposer identique à X_0' en prenant X assez petit. On a fini.

Corollaire 8.2 *Enoncé analogue pour des* revêtements *étales, en supposant le corps résiduel $k(y)$ infini.*

La démonstration est la même, 7.5 remplaçant 7.6.

Théorème 8.3 *Le foncteur envisagé dans 5.5 est une* équivalence *de* catégories.

En vertu du théorème 5.5, il reste à montrer que tout S_0-schéma étale X_0 est isomorphe à un S_0-schéma $X \times_S S_0$, où X est un S-schéma étale. L'espace topologique sous-jacent à X devra être nécessairement identique à celui de X_0, X_0 s'identifiant de plus à un sous-préschéma fermé de X. Le problème est donc équivalent au suivant : trouver sur l'espace topologique sous-jacent $|X_0|$ à X_0 un faisceau d'algèbres $\mathscr{O}_X$ sur $f_0^*(\mathscr{O}_S)$ (où f_0 est la projection $X_0 \to S_0$, regardée ici comme application continue des espaces sous-jacents), faisant de $|X_0|$ un S-préschéma étale X, et un homomorphisme d'algèbres $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{X_0}$, compatible avec l'homomorphisme $f_0^*(\mathscr{O}_S) \to f_0^*(\mathscr{O}_{S_0})$ sur les faisceaux de scalaires, induisant un isomorphisme $\mathscr{O}_X \otimes_{f_0^*(\mathscr{O}_S)} f_0^*(\mathscr{O}_{S_0}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{X_0}$. (Alors
15 X sera un S-préschéma étale se réduisant suivant X_0, donc sera séparé sur S puisque X_0 l'est sur S_0, et X répond à la question). Si d'ailleurs (U_i) est un recouvrement de X_0 par des ouverts, et si on a trouvé une solution du problème dans chacun des U_i, il résulte du théorème d'unicité 5.5 que ces solutions se recollent (i.e. les faisceaux d'algèbres qui les définissent, munis de leurs homomorphismes d'augmentation, se recollent), et on constate aussitôt que l'espace annelé ainsi construit au-dessus de S est un S-préschéma étale X muni d'un isomorphisme $X \times_S S_0 \xleftarrow{\sim} X_0$. Il suffit donc de trouver une solution localement, ce qui est assuré par 8.1.

Corollaire 8.4 *Soient S un préschéma formel localement noethérien, muni d'un idéal de définition J, soit $S_0 = \big(|S|, \mathscr{O}_S/\mathscr{J}\big)$ le préschéma ordinaire correspondant. Alors le foncteur $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X} \times_S S_0$ de la catégorie des revêtements étales de S dans la catégorie des revêtements étales de S_0 est une équivalence de catégories.*

Bien entendu, on appelera revêtement étale d'un préschéma *formel* S un revêtement de S, i.e. un préschéma formel sur S défini à l'aide d'un faisceau cohérent d'algèbres $\mathscr{B}$, tel que $\mathscr{B}$ soit *localement libre* et que les fibres résiduelles $\mathscr{B}_s \otimes_{\mathscr{O}_s} k(s)$ de $\mathscr{B}$ soient des algèbres *séparables* sur $k(s)$. Si on désigne par S_n le préschéma ordinaire $\left(|S|\ \mathscr{O}_S/J^{n+1}\right)$, la donnée d'un faisceau cohérent d'algèbres $\mathscr{B}$ sur S équivaut à la donnée d'une suite de faisceaux cohérents d'algèbres B_n sur les X_n, munis d'un système transitif d'homomorphismes $B_m \to B_n$ $(m \geq n)$ définissant des isomorphismes $B_m \otimes_{\mathscr{O}_{S_m}} \mathscr{O}_{S_n} \xrightarrow{\sim} B_n$. Il est immédiat que $\mathscr{B}$ est localement libre si et seulement si les $\mathscr{B}_n$ sur les S_n le sont, et que la condition de séparabilité est vérifiée si et seulement si elle l'est pour $\mathscr{B}_0$, ou encore pour tous les B_n. Ainsi, $\mathscr{B}$ est étale sur S si et seulement si les B_n sur les S_n le sont. Compte tenu de cela, 8.4 résulte aussitôt de 8.3.

Remarque. Il n'était pas nécessaire dans 8.4 de se borner au cas des *revêtements*. C'est cependant le seul utilisé pour l'instant.

part 3

9 Propriétés de permanence

Soit $A \to B$ un homomorphisme local et étale, nous examinons ici quelques cas où une
16 certaine propriété pour A entraîne la même propriété pour B, ou réciproquement. Un certain nombre de telle propositions sont déjà conséquences du simple fait que B est *quasi-fini* et *plat* sur A, et nous nous bornerons à en "rappeler" quelques-unes : *A et B ont même dimension de Krull, et même profondeur* ("codimension cohomologique" de Serre, dans la terminologie encore courante). Il en résulte par example que *A est Cohen-Macaulay si et suelment si B l'est*. D'ailleurs, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B, induisant $\mathfrak{p}$ sur A, $B_{\mathfrak{q}}$ sera encore quasi-fini et plat sur $A_{\mathfrak{p}}$, pourvu qu'on suppose que B soit localisée d'une algèbre de type fini sur A (cela résulte du fait que l'ensemble des points où un morphisme de type fini est quasi-fini resp. plat est ouvert) ; et d'ailleurs *tout* idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est induit par un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B (car B est *fidèlement* plat sur A). Il en résulte par example que *$\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ ont même rang* ; et encore que *A est sans idéal premier immergé si et seulement si B l'est.*

Nous allons nous borner donc aux propositions plus spéciales au cas des morphismes étales.

Proposition 9.1 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local étale. Pour que A soit régulier, il faut et il suffit que B le soit.*

En effet, soit k le corps résiduel de A, L celui de B. Comme B est plat sur A et que $L = B \otimes_A k$ i.e. $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$ (où $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ sont les idéaux maximaux de A, B) la filtration $\mathfrak{m}$-adique sur B est indentique à sa filtration $\mathfrak{n}$-adique et on aura

$$\mathrm{gr}^*(B) = \mathrm{gr}^*(A) \otimes_k L.$$

Il s'ensuit que $\mathrm{gr}^*(B)$ est une algèbre de polynômes sur L si et seulement si $\mathrm{gr}^*(A)$ est une algèbre de polynômes sur k. cqfd. (N.B. on n'a pas utilisé le fait que L/k est séparable).

Corollaire 9.2 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme étale. Si Y est régulier, X l'est, la réciproque étant vraie si f est surjectif.*

Proposition 9.2 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme étale. Si Y est réduit, il en est de même de X, la réciproque étant vraie si f est surjective.*

Cela équivaut au

17 **Corollaire 9.3** *Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme local étale, B étant isomorphe à une A-algèbre localisée d'une A-algèbre de type fini. Pour que A soit réduit, il faut et il suffit que B le soit.*

La nécessité est triviale, puisque $A \to B$ est injectif (B étant fidèlement plat sur A). Suffisance : soient $\mathfrak{p}_i$ les idéaux premiers minimaux de A, par hypothèse l'application naturelle $A \to \prod_i A/\mathfrak{p}_i$ est injective, donc tensorisant avec le A-module plat B, on trouve que $B \to \prod_i B/\mathfrak{p}_i B$ est injective, et on est ramener à prouver que les $B/\mathfrak{p}_i B$ sont réduits. Comme $B/\mathfrak{p}_i B$ est étale sur $A/\mathfrak{p}_i$, on est ramener au cas A intègre. Soit K son corps des fractions, alors $A \to K$ étant injectif, il en est de même (B étant A-plat) de $B \to B \otimes_A K$, on est ramener à prouver que ce dernier anneau est réduit. Or, B étant localisée d'une A-algèbre de type fini sur A, est l'anneau local d'un point x d'un schéma de type fini et *étale* $X = \operatorname{Spec}(C)$ sur $Y = \operatorname{Spec}(A)$, donc $B \otimes_A K$ est un anneau localisé (par rapport à un ensemble multiplicativement stable convenable) de l'anneau $C \otimes_A K$ de $X \otimes_A K$. Comme $X \otimes_A K$ est étale sur K, son anneau est un produit fini de corps (extensions séparables de K), il en est donc de même de $B \otimes_A K$. cqfd.

Corollaire 9.4 *Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme local étale, supposons A analytiquement réduit (i.e. le complété $\hat{A}$ de A sans élément nilpotent). Alors B est analytiquement réduit, et a fortiori réduit.*

En effet, B est *fini* et étale sur $\hat{A}$, et on applique 9.3.

Théorème 9.5 *Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme local, B étant isomorphe à une A-algèbre localisée d'une A-algèbre de type fini. Alors*

(i) Si f est étale, A est normal si et seulement si B l'est.

(ii) Si A est normal, f est étale si et seulement si f est injectif et net (et alors B est normal par (i)).

Nous allons donner deux démonstrations différentes de (i), la première utilise certaines des propriétés des morphismes plats quasi-finis (rappelés au début du numéro) sans utiliser 7.6 (et par là, le Main Theorem) ; c'est l'inverse pour la deuxième démonstration. Enfin, pour (ii) il semble qu'on ait besoin du Main Theorem en tous cas.

18 **Première démonstration.** On utilise la condition nécessaire et suffisante suivante de normalité d'un anneau local noethérien A de dimension $\neq 0$.

> **Critère de Serre** : *(i) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de rang 1, $A_{\mathfrak{p}}$ est normal (ou ce qui revient au même, régulier) ; (ii) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de rang ≥ 2, on a profondeur $A_{\mathfrak{p}} \geq 2$.*[7]

Nous admettrons ici ce critère, qui est censé figurer au par. des plats. Son principal avantage est qu'il ne suppose pas a priori A réduit, ni a fortiori intègre. Ici, on peut déjà supposer $\dim A = \dim B \neq 0$.

D'apès les rappels du début du numéro, les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A qui sont de rang 1 (resp. de rang ≥ 2) sont exactement les traces sur A des idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de B qui sont de rang 1 (resp. de rang ≥ 2). Enfin, si $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ se correspondent, $B_{\mathfrak{q}}$ est étale sur $A_{\mathfrak{p}}$, donc a même profondeur que $A_{\mathfrak{p}}$, et est régulier si et seulement si $A_{\mathfrak{p}}$ l'est (9.1). Appliquant le critère de Serre, on trouve que A est normal si et suelment si B l'est.

Deuxième démonstration. Supposons B normal, soit L son corps des fractions, K celui de A (A est intègre puisque B l'est). On a vu dans la démonstration de 9.3 que $B \otimes_A K$ est un composé fini de corps, comme il est contenu dans L c'est un corps, et comme il contient B c'est L. Un élément de K entier sur A est entier sur B, donc est dans B puisque B est normal, donc dans A car $B \cap K = A$ (comme il résulte du fait que B est fidèlement plat sur A).

Supposons maintenant A normal, prouvons que B l'est. En vertu de 7.6 on aura $B = B'_{\mathfrak{n}}$, où $B' = A[t]/FA[t]$, F et $\mathfrak{n}$ étant comme dans 7.6. Donc $L = B \otimes_A K$ sera un localisé de $B' \otimes_A K = K[t]/FK[t]$, et un produit de corps ; extensions finies séparables de K ce dernier produit (comme chaque fois qu'on localise un anneau artinien, ici B'_K par rapport à un ensemble multiplicativement stable) est un facteur direct de B'_K, correspondant donc à une décomposition $F = F_1F_2$ dans $K[t]$, le générateur de L correspondant à t étant annulé déjà par F_1. Or, *A étant normal, les F_i sont dans $A[t]$* (supposant qu'ils sont unitaires). Remarquant que $B \to L = B \otimes_A K$ est injectif ($A \to K$ l'étant et B étant plat sur A) il s'ensuit qu'on aura déjà $F_1(u) = 0$. Supposant qu'on ait pris F de degré minimum, il s'ensuivra que $F_2 = 1$ (N.B. on aura $F'(u) = F'_1(u)F_2(u) + F_1(u)F'_2(u) = F'_1(u)F_2(u)$ puisque $F_1(u) = 0$, d'où $F'_1(u) \neq 0$ puisque $F'(u) \neq 0$.

19 Donc on a

$$(*) \qquad L = B \otimes_A K = K[t]/FK[t]$$

F étant par suite un polynôme séparable dans $K[t]$ (mais évidemment par nécessairement dans $A[t]$). (N.B. Pour l'instant, on a seulement montré, essentiellement, que dans 7.6 on peut choisir F et de telle façon que — avec les notations prises ici — $B' \to B'_{\mathfrak{n}} = \mathbf{B}$ soit *injectif* ; on s'est servi pour cela de la normalité de A ; je ne sais pas si cela reste vrai sans hypothèse de normalité).

[7] Cf. EGA IV 5.8.6.

Rappelons maintenant le lemme bien connu, extrait du Cours de Serre de l'an dernier :

Lemme 9.6 *Soit K un anneau, $F \in K[t]$ un polynôme unitaire séparable, $L = K[t]/FK[t]$, u la classe de t dans L (de sorte que $F'(u)$ est un élément inversible de L). Alors on a les formules (où $n = \deg F$) :*

$$\operatorname{tr}_{L/K} u^i/F'(u) = 0 \text{ si } 0 \leq i < N-1,$$
$$\operatorname{tr}_{L/K} u^{n-1}/F'(u) = 1.$$

Corollaire 9.7 *Le déterminant de la matrice $(u^j.u^i/F'(u))_{0\leq i,j\leq n-1}$ est égal à $(-1)^n$, donc inversible dans tout sous-anneau A de K.*

Corollaire 9.8 *Soit A un sous-anneau de K, V le A-module engendré par les u^i $(0 \leq i \leq n-1)$ dans L, V' le sous-A-module de L formé des $x \in L$ tels que $\operatorname{tr}_{L/K}(xy) \in A$ pour tout $y \in V$ (i.e. pour y de la forme u^i, $0 \leq i \leq n-1$). Alors V' est le A-module ayant pour base les $u^i/F'(u)$ $(0 \leq i \leq n-1)$.*

Corollaire 9.9 *Suppons que K soit le corps des fractions d'un anneau intègre normal A, F ayant ces coefficients dans A. Alors avec les notations de 9.8, V' contient la clôture normale A' de A dans L, qui est donc contenu dans $A[u]/F'(u)$ et a fortiori dans $A[u][F'(u)^{-1}]$.*

Appliquons ce dernier corollaire à la situation que nous avions obtenue dans la démonstration : comme $F'(u)$ est inversible dans B qui contient $A[u]$, B contient A'. D'après le Main Theorem, (ou à partir du fait que $B = A[u]_{\mathfrak{n}}$) B est une algèbre localisée de A'. Comme A' est normal, il en est de même de B.

20 **Démonstration de (ii).** — On procède comme dans la démonstration qui précède pour prouver qu'on peut, dans 7.6, choisir F de telle façon que l'on ait encore $(*)$. Le seul obstacle a priori est que, B n'étant plus supposé plat sur A, on ne peut plus affirmer que $B \to L$ est injectif, de sorte que le raisonnement ne s'appliquera a priori qu'à l'image B_1 de B par ledit homomorphisme. Il s'ensuit aussitôt que B_1 est plat sur A (comme localisée d'une algèbre libre sur A). En vertu de 4.8 le morphisme $B \to B_1$ est étale, donc un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

(Du point de vue rédaction, il faudrait intervertir les deux dernières démonstrations, et mettre dans un numéro à part les calculs formels du lemme et de ces corollaires).

Corollaire 9.10 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme étale. Si Y est normal, X l'est, la réciproque est vraie si f est surjective.*

Corollaire 9.11 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme dominant, Y étant normal et X connexe. Si f est net, f est étale, donc X est normal et par suite (étant connexe) irréductible.*

Soit U l'ensemble des points où f est étale, il est ouvert, et il suffit de montrer qu'il est aussi fermé et non vide. U contient l'image inverse du point générique de Y (car pour une algèbre sur un corps, non ramifié = étale) donc (X dominant Y) est non vide. Si x appartient à l'adhérence de U, alors il appartient à l'adhérence d'une composante irréductible U_i de U, donc à une composante irréductible $X_i \overset{v}{=} \bar{U}_i$ de X qui rencontre U, et par suite domine Y (car toute composante de U, plat sur Y, domine Y). Par suite, si y est la projection de x sur Y, $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x$ est *injectif* (compte tenu que $\mathscr{O}_y$ est intègre). Comme $\mathscr{O}_y$ est normal et $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x$ net, on conclut à l'aide de 9.5(ii).

Corollaire 9.12 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de type fini dominant, avec Y normal et X irréductible. Alors l'ensemble des points où f est étale est identique au complémentaire du support de $\Omega^1_{X/Y}$, i.e. au complémentaire du sous-préschéma de X défini par l'idéal différente $\mathfrak{d}_{X/Y}$.*

21 (C'est cela l'énoncé "moins trivial" auquel il était fait allusion dans la remaque du N° 4.

Remarque. On se gardera de croire qu'un revêtement étale connexe d'un schéma irréductible soit lui-même irréductible, quand on ne suppose pas la base normale. Cette question sera étudiée au N° 11.

part 4

10 Revêtements étales d'un schéma normal

Proposition 10.1 *Soit X un préschéma étale séparé sur Y normal connexe de corps K. Alors les composantes connexes de X_i de X sont intègres, leurs corps K_i sont des extensions finies séparables de K, X_i s'identifie à une partie ouverte non vide du normalisé de X dans K_i (donc X à une partie dense du normalisé de Y dans $R(X) = L = \prod K_i$).*

D'après 9.10 X est normal, a fortiori ses anneaux locaux sont intègres, donc les composantes connexes de X sont irréductibles. Comme X_i est normal, et fini et dominant au-dessus de Y, il résulte d'un cas particulier (à peu près trivial d'ailleurs) du Main Theorem que X_i est un ouvert du normalisé de X dans le corps K_i de X.

Corollaire 10.2 *Sous les conditions* 10.1*, X est fini sur Y (i.e. un revêtement étale de Y) si et seulement si X est isomorphe au normalisé Y' de Y dans $L = R(X)$ (anneaux des fonctions rationnelles sur X).*

En effet, on sait que ce normalisé est fini sur Y (Y étant normal et R/K séparable), inversement si X est fini sur Y il l'est sur Y', donc son image dans Y' est fermée, d'autre part elle est dense.

Une algèbre L de rang fini sur K sera dite *non ramifiée sur X* (ou simplement non ramifiée sur K, si X est sous-entendu) si L est une algèbre séparable sur K, i.e. composée directe d'extensions séparables K_i, et si le normalisé Y' de Y dans L (somme disjointe des normalisés de Y dans les K_i) est non ramifié (= étale par 9.11) sur Y. Donc :

Corollaire 10.3 *Pour tout X fini sur Y et dont toute composante irréductible domine Y,*
22 *soit $R(X)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur X (poduit des anneaux locaux des points génériques des composantes irréductibles de X), de sorte que $X \mapsto R(X)$ est un foncteur, à valeurs dans les algèbres de rang fini sur $K = R(Y)$. Ce foncteur établit une équivalence de la catégorie des revêtement étales connexes de Y avec la catégorie des extensions L de K non ramifiées sur Y.*

Le foncteur inverse est le foncteur normalisation.

Suppons Y affine, donc défini par un anneau normal A de corps des fractions K. Soit L une extension finie de K composé directe de corps, alors par définition la normaliée Y' de Y dans L est isomorphe à $\mathrm{Spec}(A')$, où A' est le normalisé de A dans L. Dire que L est non ramifié sur Y signifie que A' est non ramifié (ou encore : étale) sur A. si A est local, il revient au même de dire que les anneaux locaux $A'_\mathfrak{n}$ (où n parcourt l'ensemble fini des idéaux maximaux de A', i.e. de ses idéaux premiers induisant l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A) soient non ramifié (= étale) sur X l'anneau local A. Enfin, notons aussi que le critère par le discriminant (4.10) peut aussi s'appliquer dans cette situation (plus généralement, une variante dudit critère devrait s'énoncer ainsi, sans condition préliminaire de platitude lorsque X domine Y, Y étant néanmoins supposé localement intègre : $A \to B$ et $B \to B \otimes_A K = L$ sont injectifs — alors $\mathrm{tr}_{L/K}$ est définie — et $\mathrm{tr}_{L/K}(xy)$ induit une *forme bilinéaire fondamentale* $B \times B \to A$, i.e. il existe des $x_i \in B$ ($1 \leq i \leq n$, $n =$ rang de L sur K) tels que $\mathrm{tr}(x_i x_j) \in A$ pour tout i, j et $\det(\mathrm{tr}(x_i x_j))$ est inversible dans A).

Le sorite (4.6) implique aussitôt le sorite de la non ramification dans le cadre classique :

Proposition 10.4 *Soient Y un préschéma normal intègre, de corps K. (i) K est non ramifié sur Y. (ii) Si L est une extension de K non ramifiée sur Y, si Y' est un préschéma normal de corps L et dominant Y (par exemple le normalisé de Y dans L) et M une extension de L non ramifiée sur Y', alors M/K est non ramifiée sur X* (transitivité de la non ramification). *(iii) Soit Y' un préschéma normal intègre dominant Y, de corps K'/K ; si L est une extension de K non ramifiée sur Y, alors $L \otimes_K K'$ est une extension de K' non ramifiée sur Y' (*propriété de translation*).*

23 De plus :

Corollaire 10.5 *Sous les conditions de (iii), si $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $Y' = \mathrm{Spec}(A')$, alors le normalisé A' de Y' dans $L' = L \otimes_K K'$ s'identifie à $\bar{A} \otimes_A A'$, où $\bar{A}$ est le normalisé de A dans L.*

Habituellement, les gens (qui répugnent à la considération d'anneaux non intègres, fussent-ils composés directs de corps) énoncent la propriété de translation sous la forme (plus faible) suivante :

Corollaire 10.6 *Sous les conditions de (iii), soit L_1 une* extension composée *de L/K (non ramifiée sur Y) et de K'/K. Alors L_1/K' est non ramifiée sur Y'. Dans le cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$,*

$Y' = \mathrm{Spec}(A')$, *on aura de plus*

$$\overline{A'} = A[\overline{A}, A']$$

i.e. l'anneau $\overline{A'}$ *normalisé de* A' *dans* L_1 *est la* A*-algèbre engendrée par* A' *et le normalisé* $\overline{A}$ *de* A *dans* L.

Ce dernier fait est d'ailleurs faux sans hypothèse de non ramification, même dans le cas d'extensions composées de corps de nombres. . .

Pour terminer ce numéro, nous allons donner l'interprétation de la notion de revêtement étale correspondant à l'image intuitive de cette notion : il doit y avoir le "nombre maximum" de points au-dussus du point considéré $y \in Y$, et en particulier il ne doit pas y avoir "plusieurs points confondus" au-dussus de y. Pour démontrer les résultats dans ce sens avec toute la généralité désirable, nous allons admettre ici la proposition 10.7 plus bas (dont la démonstration sera dans le multiplodoque, Chap. IV, par. 15, et utilise la technique des ensembles constructibles de Chevalley, et un petit peu de théorie de descente. . .)

Un mrophisme de type fini $f\colon X \to Y$ est dit *universellement ouvert* si pour toute extension de la base $Y' \to Y$ (avec Y' localement noethérien) le morphisme $f'\colon X' = X \times_Y Y' \to Y'$ est ouvert, i.e. transforme ouverts en ouverts. On peut d'ailleurs se borner au cas où Y' est de type fini sur Y (et même où Y' est de la forme $Y[t_1, \dots, t_r]$, où les t_i sont des indéterminées). Un morphisme universellement ouvert est a fortiori ouvert (la réciproque étant fausse), d'autre part si f est ouvert, X et Y étant irréductibles, alors toutes les composantes de toute les fibres de
24 f ont même dimension (savoir la dimension de la fibre générique $f^{-1}(z)$, z le point générique de Y). Enfin si Y est normal, cette dernière condition implique déjà que f est *universellement* ouvert (théorème de Chevalley). Il s'ensuit par exemple que si $f\colon X \to Y$ est un morphisme *quasi-fini*, avec Y normal irréductible, alors f est universellement ouverte (ou encore : ouverte) si et seulement si toute composante irréductible de X domine Y. Rappelons aussi qu'un morphisme plat (de type fini) étant ouvert, est aussi universellement ouvert. Ces préliminaires posés, "rappelons" la

Proposition 10.7 *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme quasi-fini séparé universellement ouvert. Pour tout* $y \in Y$*, soit* $n(y)$ *le "nombre géométrique de points de la fibre* $f^{-1}(y)$*", égal à la somme des degrés séparables des extensions résiduelles* $K(x)/K(y)$*, pour les points* $x \in f^{-1}(y)$*. Alors la fonction* $n \mapsto n(y)$ *sur* Y *est semi-continue supérieurement. Pour qu'elle soit constante au voisinage du point* y *(i.e. pour qu'on ait* $n(y) = n(z_i)$*, où les* z_i *sont les points génériques des composantes irréductibles de* Y *qui contiennent* y*) il faut qu'il existe un voisinage* U *de* y *tel que* $X|U$ *soit fini sur U.*[8]

Corollaire 10.8 *Si* $y \mapsto n(y)$ *est constante et* Y *géométriquement unibranche*[9]*, les composantes irréductibles de* X *sont disjointes.*

[8]Cf. EGA IV 15.5.1

[9]Pour la définition, cf. ci-dessous n° 11, p. 21

Proposition 10.9 *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme* étale *séparé. Avec les notations* 10.7 *la fonction* $n \mapsto n(y)$ *est semi-continue supérieurement. Pour qu'elle soit constante au voisinage du point* y*, (i.e. pour qu'on ait* $n(y) = n(z_i)$*, où les* z_i *sont les points génériques des composantes irréductibles de* Y *qui contiennent* y*) il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de* y *tel que* $X|U$ *soit fini sur U, i.e. soit un* revêtement étale *de* U*.*

Corollaire 10.10 *Pour qu'un morphisme étale séparé* $f\colon X \to Y$*,* Y *connexe, soit fini (i.e. fasse de* X *un* revêtement étale *de* Y*) il faut et il suffit que toute les fibres de* f *aient même nombre géométrique de points.*

Dans 10.8 et son corollaire, il n'y avait pas d'hypothèse de normalité sur Y. Si on fait une telle hypothèse, on trouve l'énoncé plus fort (pris le plus souvent comme la définition de la non
25 ramification d'un revêtement) :

Théorème 10.11 *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme* quasi-fini *séparé. On suppose que* Y *est* irréductible, *que toute composante de* X *domine* Y*, que* X *soit réduit (i.e.* $\mathscr{O}_X$ *sans éléments nilpotents). Soit* n *le degré de* X *sur* Y *(somme des degrés, sur le corps* K *de* Y*, des corps* K_i *des composantes irréductibles* X_i *de* X*). Soit* y *un point normal de* Y*. Alors le nombre géométrique* $n(y)$ *de points de* X *au-dessus de* y *est* $\leq n$*, l'égalité ayant lieu si et seulement si il existe un voisinage ouvert* U *de* y *tel que* $X|U$ *soit un* revêtement étale *de* U*.*

Le "seulement si" étant trivial, provons le "si". Soit z le point générique de Y, on a $n(z) =$ (somme des degrés séparables des $K_i/K) \leq n$ et par 10.7 on a $n(y) \leq n(z) \leq n$, l'égalité impliquant que $X|U$ est *fini* sur U pour un voisinage U convenable de y. On peut donc supposer X fini sur Y et la fonction $n(y')$ sur Y constante. Enfin par 10.8 X est alors réunion disjointe de ses composantes irréductibles et pour prouver qu'il est non ramifié en y, on est ramené au cas où X est irréductible, donc intègre. Enfin on peut supposer $Y = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_y)$. Le théorème se réduit alors à l'énoncé classique suivant :

Corollaire 10.12 *Soient* A *un anneau local normal (noethérien comme toujours) de corps* K*,* L *une extension finie de* K *de degré* n*, degré séparable* n_s*,* B *un sous-anneau de* L *fini sur* A*, de corps des fractions* L*,* $\mathfrak{m}$ *l'idéale maximal de* A *et* n' *le degré séparable de* $B/\mathfrak{m}B$ *sur* $A/\mathfrak{m}A = k$ *(= somme des degrés séparables des extensions résiduelles de cet anneau). On a* $n' \leq n_s$ *et a fortiori* $n' \leq n$*. Cette dernière inégalité est une égalité si et suelment si* B *est non ramifié (= étale) sur* A*.*

Il reste seulement à montrer que $n' = n$ implique que B est étale sur A. Rappelons la démonstration quand k est infini : on doit seulement montrer que $R = B/\mathfrak{m}B$ est séparable sur k ; s'il n'en était pas ainsi il en résulterait (par un lemme connu) qu'il existe un élément a de R dont le polynôme minimal sur k est de degré $> n'$. Cet élément provient d'un élément x de B, dont le polynôme minimal sur K (en tant qu'élément de L) est de degré $\leq n$; d'autre part ce dernier a ses coefficients dans A puisque A est normal, et donne donc par réduction mod $\mathfrak{m}$ un polynôme unitaire $F \in k[t]$, de degré $\leq n = n'$, tel que $F(a) = 0$, absurde.

26 Dans le cas général (k pouvant être fini), reprenant le langage géométrique, on considère $Y' = \operatorname{Spec}(A[t])$ qui est fidèlement plat sur Y, et le point générique y' de la fibre $\operatorname{Spec}(k[t])$ de Y' sur y. Alors X est net sur Y en y si et seulement si $X' = X \times_Y Y' = \operatorname{Spec}(B[t])$ est net en y' sur Y', comme on constate aussitôt. D'autre part, d'après le choix de y', son corps résiduel est
part 5 $k(t)$ donc infini. Comme y' est un point normal de Y', on est ramené au cas précédent.

11 Quelques compléments

Nous avons déjà dit qu'un revêtement étale connexe d'un schéma intègre n'est pas nécessairement intègre. Voici deux exemples de ce fait.

a) Soit C une courbe algébrique à point double ordinaire x, C' sa normalisée, a et b les deux points de C' au-dessus de x. Soient C'_i ($i = 1, 2$) deux copies de C', a_i et b_i le point de C'_i qui correspond à a resp. b. Dans la courbe somme $C'_1 \amalg C'_2$, identifions a_1^x et b_2 d'une part, a_2 et b_1 d'autre part (on laisse au lecteur le soin de préciser le processus d'identification ; il sera expliqué au Chap. VI du multiplodoque, mais dans le cas des courbes sur un corps algébriquement clos est traité dans le livre de Serre sur les courbes algébriques). On trouve une courbe C'' *connexe* et *réductible*, qui est un revêtement étale de degré 2 de C. Le lecteur vérifiera que de façon générale, les revêtements étales connexes “galoisiens” C'' de C dont l'image inverse $C'' \times_C C'$ est un revêtement *trivial* de C' (i.e. isomorphe à la somme d'un certain nombre de copies de C') sont “cycliques” de degré n, et pour tout entier $n > 0$, on peut construire un revêtement étale connexe cyclique de degré n. Dans le langage du groupe fondamental qui sera développé plus tard, cela signifie que le quotient de $\pi_1(C)$ par le sous-groupe invariant fermé engendré par l'image de $\pi_1(C') \to \pi_1(C)$ (homomorphisme induit par la projection) est isomorphe au compactifié de $\mathbb{Z}$. De façon plus précise, on doit pouvoir montrer que le groupe fondamental de C est isomorphe au produit libre (topologique) du groupe fondamental de C par le compactifié de $\mathbb{Z}$. Notons que ce sont des questions de ce genre qui ont donné naissance à la “théorie de la descente” pour les schémas.

27 b) Soit A un anneau local complet intègre, on sait que son normalisé A' est fini sur A (Nagata), donc c'est un anneau semi-local complet, donc local puisqu'il est intègre. Supposons que l'extension résiduelle L/k qu'il définit soit non radicielle (dans le cas contraire, on dira que A est géométriquement unibranche, cf plus bas). Ce sera le cas par exemple pour l'anneau $\mathbb{R}[s,t]/(s^2 + t^2)\mathbb{R}[s,t]$, où $\mathbb{R}$ est le corps des réels. Soit alors k' une extension galoisienne finie de k telle que $L \otimes_k k'$ se décompose ; et soit B une algèbre finie étale sur A correspondant à l'extension résiduelle k' (rapellons que B est essentiellement unique). Alors $B' = A' \otimes_A B$ sur B a l'algèbre résiduelle $L \otimes_k k'$ qui n'est pas locale, donc B' n'est pas un anneau local donc (étant complet) a des diviseurs de 0. Comme il est contenu dans l'anneau total des fractions de B (car libre sur A' donc sans torsion sur A' donc sans torsion sur A, donc contenu dans $B' \otimes_A K = B'_{(K)} = A'_{(K)} \otimes_K B_{(K)} = B_{(K)}$ puisque $A'_{(K)} = K$) il s'ensuit que B n'est pas intègre. Dans le cas de l'anneau $\mathbb{R}[s,t]/(s^2 + t^2)\mathbb{R}[s,t]$, prenant $k'/k = \mathbb{C}/\mathbb{R}$, on trouve pour B l'anneau local de deux droites sécantes du plan en leur point d'intersection.

Notons d'ailleurs que s'il existe un revêtement connexe étale X de Y intègre qui ne soit pas irréductible, alors toute composante irréductible de X donne un exemple d'un revêtement non ramifié X' de Y, dominant Y, qui n'est pas étale sur Y. Dans le cas de l'exemple a), on obtient ainsi que C' est non ramifié sur C, sans être étale en les deux points a et b (comme on constate d'ailleurs directement par inspection des complétés des anneaux locaux de x et a : du point de vue "formel", C' au point a s'identifie à un sous-schéma fermé de C au point x, savoir l'une des deux "branches" de C passant par x).

Dans a) et b), on voit que la non validité des conclusions de 9.5. (i) et (ii) est liée directement au fait qu'un point de Y "éclate" en des points *distincts* du normalisé (dans b, le fait que l'extension résiduelle soit non radicielle doit être interprétée géométriquement de cette façon). De façon précise, nous dirons qu'un anneau local intègre A est *géométriquement unibranche* si son normalisé n'a qu'un seul idéal maximal, l'extension résiduelle correspondante étant radicielle ; un point y d'un préschéma intègre est dit géométriquement unibranche si son anneau local l'est. Exemples : un point normal, un point de rebroussement ordinaire d'une courbe, etc...
28 Il semble que si Y admet un point qui n'est pas unibranche, il existe toujours de revêtement étale connexe non irréductible de Y ; c'est du moins ce que nous avons montré dans le cas b), lorsque Y est le spectre d'un anneau local complet. On peut montrer par contre que *si tous les points de Y sont géométriquement unibranches, alors tout Y-préschéma non ramifié connexe dominant Y est étale* et irreductible. La démonstration reprend celle de 9.5, en utilisant la généralisation suivante du théorème 8.3, qui sera démontrée plus tard à l'aide de la technique de descente [10] :

Soit $Y' \to Y$ un morphisme fini, radiciel, surjectif (i.e. ce qu'on pourrait appeler un "homéomorphisme universel"). Considérons le foncteur $X \mapsto X \times_Y Y' = X'$ des Y-préschémas dans les Y'-préschémas. Ce foncteur induit une équivalence de la catégorie des Y-schémas étales avec la catégorie des Y'-schémas étales. On pourra appliquer par exemple ce résultat dans le cas où Y' est le normalisé de Y, Y étant supposé unibranche (et Y' fini sur Y, ce qui est vrai dans tous les cas qu'on rencontre en practique), ou au cas d'un Y'' "en sandwich" entre Y et son normalisé (qui n'a plus besoin d'être fini sur Y).

[10]Cf. IX.4.10. Pour une démonstration plus directe, cf. EGA IV 18.10.3, utilisant une variante de 9.5 pour des anneaux locaux géométriquement unibranches.

Exposé II

Morphismes lisses : généralités, propriétés différentielles

29

Les renvois à l'exposé I sont indiqués par I. On rappelle que les anneaux sont noethériens, et les préschémas localement noethériens.

1 Généralités

Soit Y un préschéma, soient $t_1, \ldots, t_n$ des indéterminées, on pose

$$Y[t_1, \ldots, t_n] = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]\,. \tag{1.1}$$

Donc $Y[t_1, \ldots, t_n]$ est un Y-schéma, affine au-dessus de Y, défini par le faisceau quasi-cohérent d'algèbres $\mathscr{O}_Y[t_1, \ldots, t_n]$. La donnée d'une section de ce préschéma au-dessus de Y équivaut donc à la donnée de n sections de $\mathscr{O}_Y$ (correspondant aux images des t_i par l'homomorphisme correspondant). Si Y' est au-dessus de Y, on a

$$Y[t_1, \ldots, t_n] \times_Y Y' = Y'[t_1, \ldots, t_n]\,, \tag{1.2}$$

(ce qui implique que la donnée d'un Y-morphisme de Y' dans $Y[t_1, \ldots, t_n]$ équivaut à la donnée de n sections de $\mathscr{O}_{Y'}$), d'autre part on a

$$\big(Y[t_1, \ldots, t_n]\big)[t_{n+1}, \ldots, t_m] = Y[t_1, \ldots, t_m]\,, \tag{1.3}$$

en vertu de de la formule analogue pour les anneaux de polynômes sur $\mathbb{Z}$. La formule (1.2) implique que $Y[t_1, \ldots, t_n]$ varie fonctoriellement avec Y.

$Y[t_1, \ldots, t_n]$ est de type fini et plat au-dessus de Y.

Définition 1.1 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme, faisant de X un Y-préschéma. On dit que f est* lisse[1] *en $x \in X$, ou que X est* lisse sur Y en x, *s'il existe un entier $n \geq 0$, un voisinage ouvert U de x, et un Y-morphisme étale de U dans $Y[t_1, \ldots, t_n]$. On dit que f* (resp. X) *est* lisse *s'il est lisse en tous les points de X. Une algèbre B sur un anneau A est dite lisse en un idéal premier*
30 *$\mathfrak{p}$ de B, si* $\operatorname{Spec}(B)$ *est lisse sur* $\operatorname{Spec}(A)$ au *point $\mathfrak{p}$; B est dite lisse sur A si elle est lisse sur A en tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de B. Enfin, un homomorphisme local $A \to B$ d'anneaux locaux est dit lisse (ou B est dite lisse sur A)* [2] *si B est localisée d'une algèbre de type fini B_1 lisse sur A.*

On note que la notion de lissité de X sur Y est locale sur X et sur Y ; si X est lisse sur Y, il est localement de type fini sur Y.

Proposition 1.1 *L'ensemble des points x de X en lesquels f est lisse est ouvert.*

C'est trivial sur la définition.

Corollaire 1.2 *Si B est lisse sur A en $\mathfrak{p}$, alors il est lisse sur A en $\mathfrak{q}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B contenu dans $\mathfrak{p}$.*

1.1 implique aussi que les deux dernières définitions 1.1 coïncident dans leur domaine commun d'existence.

Proposition 1.3 (i) *Un morphisme étale, en particulier une immersion ouverte, un morphisme identique, est lisse.* (ii) *Une extension de la base dans un morphisme lisse donne un morphisme lisse.* (iii) *Le composé de deux morphismes lisses est lisse.*

(i) est trivial sur la définition, on a plus précisément :

Corollaire 1.4 *étale $=$ quasi-fini $+$ lisse.*

(ii) résulte aussitôt du fait analogue pour les morphismes étales (I 4.6) et pour les projections $Y[t_1, \ldots, t_n] \to Y$ (cf (1.2)). Pour (iii), cela résulte formellement du fait que c'est vrai séparément pour "étale" (I 4.6) et des projections du type $Y[t_1, \ldots, t_n]$ (cf (1.3)), et des deux faits cités pour (ii) : Supposons Y lisse sur Z et X lisse sur Y, prouvons que X est lisse sur Z ; on peut supposer Y étale sur $Z[t_1, \ldots, t_n]$ et X étale sur $Y[s_1, \ldots, s_m]$, la première hypothèse implique donc que $Y[s_1, \ldots, s_m]$ est étale sur $Z[t_1, \ldots, t_n][s_1, \ldots, s_m] = Z[t_1, \ldots, s_m]$, donc X est étale sur $Z[t_1, \ldots, s_m]$, cqfd.

31 **Remarque 1.5** L'entier n qui figure dans déf. 1.1 est bien déterminé, car on constate aussitôt que c'est la dimension de l'anneau local de x dans sa fibre $f^{-1}\big(f(x)\big)$. On l'appelle "dimension relative" de X sur Y. Elle se comporte additivement pour la composition des morphismes.

part 6

[1] Ancienne terminologie : f est *simple* en x, ou x est un point *simple* pour f. Cette terminologie prêtait à confusion dans divers contextes (algèbres simples, groupes simples) et a dû être abandonnée.

[2] Il vaut mieux dire alors, comme dans EGA IV 18.6.1, que B est "*essentiellement lisse*" sur A.

2 Quelques critères de lissité d'un morphisme

Théorème 2.1 *Soit $f: X \to Y$ un morphisme localement de type fini, soit $x \in X$ et $y = f(x)$. Pour que f soit lisse en x, il faut et il suffit que (a) f soit plat en x, et (b) $f^{-1}(y)$ soit lisse sur $k(y)$ en x.*

Le composé de deux morphismes plats étant plats, et $Y[t_1, \ldots, t_n] \to Y$ étant un morphisme plat, on voit que lisse implique plat ; compte tenu de 1.3 (ii) cela prouve la nécessité. Supposons (a) et (b) vérifiées, soient V un voisinage affine de y d'anneau A, U un voisinage affine de x au-dessus de V, d'anneau B. Prenant U assez petit, on peut supposer par (b) qu'il existe un $k(y)$-morphisme *étale*

$$g: U|f^{-1}(y) \to \operatorname{Spec} k[t_1, \ldots, t_n] \quad (k = k(y))$$

d éfini par n sections g_i du faisceau structural de $U|f^{-1}(y)$. On constate facilement qu'on peut supposer que les g_i (qui a priori sont des éléments de $B \otimes_A k = BS^{-1}$, où $S = A - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A correspondant à y) proviennent de sections du faisceau structural de V, donc que g est induit par un morphisme, encore noté g

$$g: V \to Y[t_1, \ldots, t_n]$$

(quitte à multiplier les g_i par un même élément non nul de k). Or V est plat sur Y par (a), il en est de même de $Y[t_1, \ldots, t_n]$, d'autre part g induit un morphisme étale entre les fibres au-dessus de y, donc g est étale en x par (I 5.8), cqfd.

Corollaire 2.2 *Soient S un préschéma, $f: X \to Y$ un S-morphisme de type fini, Y étant de type fini et plat sur S, $x \in X$, s la projection de x sur S. Pour que f soit lisse en x, il faut et il suffit que X soit plat (ou encore : lisse) sur S en x, et que le morphisme $f_s: X_s \to Y_s$ induit sur les fibres de s soit lisse en x.*

Seule la suffisance demande une démonstration, et résulte du critère 2.1, joint au critère de platitude (I 5.9).

32 Pour énoncer le résultat suivant, "rappelons" qu'un morphisme $f: X \to Y$ localement de type fini est dit *équidimensionnel* en le point $x \in X$ si (posant $y = f(x)$) on peut trouver un voisinage ouvert U de x, dont toute composante domine une composante de Y tel que, pour tout $y' \in Y$, les composantes irréductibles de $f^{-1}(y') \cap U$ aient toutes une même dimension indépendante de y'. Il suffit d'ailleurs dans cette condition de prendre pour y' les points génériques des composantes irréductibles de Y passant par y, *et* le point y. Si par exemple X et Y sont intègres et f dominant, la condition signifie que les composantes des $f^{-1}(y)$ passant par x ont "la bonne" dimension, i.e. la dimension de la fibre générique (rappelons qu'elles sont toujours $\geq$ la dimension de la fibre générique). Si f est équidimensionnel en x, la dimension de sa fibre en x étant n, et si $g: U \to Y' = Y[t_1, \ldots, t_n]$ est un Y-morphisme d'un voisinage U de x, induisant un morphisme sur les fibres de y qui est quasi-fini en x (ou encore, ce qui revient au

même, si g est quasi-fini en x), alors on montre que toute composante irréductible de U passant par x domine une composante irréductible de Y'. D'ailleurs en vertu du "lemme de normalisation", un tel g existe toujours (et réciproquement, s'il existe un Y-morphisme quasi-fini g d'un voisinage ouvert U de x dans un Y-schéma de la forme $Y' = Y[t_1, \dots, t_n]$, tel que toute composante de U passant par x domine une composante de Y', alors f est équidimensionnel en x). Ceci posé :

Proposition 2.3 *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X, $y = f(x)$, on suppose $\mathscr{O}_y$ normal. Pour que f soit lisse en x, il faut et il suffit que f soit équidimensionnel en x, et que $f^{-1}(y)$ soit lisse sur $k(y)$ en x.*

On voit aussitôt sur la définition qu'un morphisme lisse est équidimensionnel (N.B. un morphisme plat de type fini n'est pas nécessairement équidimensionnel en x, même si sa fibre en x est irréductible). Prouvons la réciproque. Comme $f^{-1}(y)$ est lisse sur $k(y)$ en x, on peut supposer (remplaçant au besoin X par un voisinage convenable de x) qu'il existe un Y-morphisme

$$g\colon X \to Y[t_1, \dots, t_n] = Y'$$

33 induisant un morphisme étale sur les fibres de y, et a fortiori quasi-fini en x. Donc g est non ramifié, et (f étant équidimensionnel en x) les composantes irréductibles de X passant par x dominent chacun une composante de Y', a fortiori l'homomorphisme $\mathscr{O}_{y'} \to \mathscr{O}_x$ déduit de g (où $y' = g(x)$) est *injectif.* Cet homomorphisme est de plus non ramifié, et $\mathscr{O}_{y'}$ est normal puisque localisé de l'anneau $\mathscr{O}_y[t_1, \dots, t_n]$, qui est normal puisque $\mathscr{O}_y$ l'est. Donc l'homomorphisme $\mathscr{O}_{y'} \to \mathscr{O}_x$ est étale (I 9.5 (ii)).

Remarques 2.4 L'énoncé précédent vaut encore en remplaçant l'hypothèse que $\mathscr{O}_y$ est normal par l'hypothèse plus faible que Y est *géométriquement unibranche* en y, (cf.I 11)- puisque (I 9.5) vaut sous cette hypothèse. Profitons de l'occasion pour signaler en même temps que si le corps résiduel d'un anneau local intègre A est algébriquement clos, alors analytiquement intègre (i.e. $\widehat{A}$ est intègre) implique géométriquement unibranche, la réciproque étant vraie de plus dans toute catégorie de "bons anneaux", de façon précise dans une catégorie d'anneaux stable par les opérations usuelles, et où la complétion d'un anneau local normal est normale (condition remplie, en vertu du "théorème de normalité analytique" de Zariski, dans la catégorie des algèbres affines et leurs localisées)[3].

"Rappelons" enfin dans le contexte actuel le résultat suivant , dû à Hironaka[4] qui permet parfois de s'assurer que $f^{-1}(y)$ est un schéma réduit, i.e. que c'est aussi ce que de nombreux géomètres algébristes considéraient abusivement comme la fibre (sans multiplicité) de f au-dessus de x (savoir $f^{-1}(y)_{\text{réd}}$) :

Proposition 2.5 *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme dominant de type fini de préschémas réduits, y un point de Y tel que $\mathscr{O}_y$ soit régulier. On suppose que toutes les composantes de $f^{-1}(y)$ sont*

[3]Cf. EGA IV 7.8.

[4]Cf. EGA IV 5.12.10.

de multiplicités 1 *(cf définition plus bas), et que* $f^{-1}(y)_{\text{réd}}$ *est normal. Alors* $f^{-1}(y)$ *est réduit donc normal,* X *est normal en tous les points de* $f^{-1}(y)$*, enfin* X *est plat sur* Y *en tous les points de* $f^{-1}(y)$*.*

34 On dit qu'une composante Z de $f^{-1}(y)$ est de *multiplicité* 1 si, x désignant le point générique de Z, on a (i) $\dim \mathscr{O}_x = \dim \mathscr{O}_y$ (i.e. Z n'est pas "composante excédentaire", c'est-à-dire n'est pas "de dimension trop grande" ; (ii) l'idéal maximal de $\mathscr{O}_x$ est engendré par l'idéal maximal de $\mathscr{O}_y$ (qui a priori, en vertu du choix de x, engendre un idéal de définition de $\mathscr{O}_x$).

Compte tenu de 2.3 ou de 2.1 on trouve donc :

Corollaire 2.6 *Soient* $f\colon X \to Y$ *un morphisme dominant de type fini de préschémas réduits,* y *un point de* Y *tel que* $\mathscr{O}_y$ *soit régulier. Pour que* f *soit lisse aux points de* X *au-dessus de* y*, il faut et il suffit que les composantes de* $f^{-1}(y)$ *soient de multiplicités* 1*, et que* $f^{-1}(y)_{\text{réd}}$ *soit lisse sur* $k(y)$*.*

Cette situation était surtout considérée par le passé quand Y était le spectre d'un anneau de valuation discrète A, et était désignée communément sous des vocables tels que : "si la réduction de X par rapport à la valuation donnée est jolie"... De plus, X désignait alors un sous-schéma (si on peut dire) fermé d'un $\mathbb{P}^n_K$ (K étant le corps des fractions de A) et faute d'un adéquat, le rôle plus intrinsèque d'un objet "défini sur A" (et non seulement sur K) n'apparaissait guère.

3 Propriétés de permanence

Proposition 3.1 *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme, soit* $x \in X$ *et* $y = f(x)$*. Supposons* f *lisse en* x*. Pour que* $\mathscr{O}_x$ *soit réduit (resp. régulier, resp. normal) il faut et il suffit que* $\mathscr{O}_y$ *le soit.*

Cet énoncé est en effet connu quand X est de la forme $Y[t_1, \dots, t_n]$, et il est démontré dans (I,n° 9) pour un morphisme étale ; le cas général s'en déduit aussitôt grâce à la définition 1.1.

Nous ne détaillons pas ici les autres propriétés de permanence, résultant déjà de la seule platitude, ou du fait que X est localement quasi-fini et plat au-dessus d'un Y-préschéma de
35 la forme $Y[t_1, \dots, t_n]$ (ou, comme nous dirons, que X est Cohen-Macauley au-dessus de Y). Signalons seulement que de ce dernier fait résulte que

$$\dim \mathscr{O}_x = \dim \mathscr{O}_y + n - d, \quad \operatorname{prof} \mathscr{O}_x = \operatorname{prof} \mathscr{O}_y + n - d \tag{3.1}$$

où n est la dimension de la fibre de f en x, et d le degré de transcendance de $k(x)$ sur $k(y)$, d'où (posant $\operatorname{coprof} = \dim - \operatorname{prof}$)

$$\operatorname{coprof} \mathscr{O}_x = \operatorname{coprof} \mathscr{O}_y \quad ([5]) \tag{3.2}$$

[5] Pour ces formules, cf. EGA IV 6.1 et 6.3.

Il en résulte par exemple que $\mathscr{O}_x$ est Cohen-Macaulay (resp. sans composantes immergées) si et
part 7 seulement si il en est de même de $\mathscr{O}_y$.

4 Propriétés différentielles des morphismes lisses

Pour simplifier, nous nous restreindrons pour l'essentiel au calcul différentiel d'ordre 1, nous bornant à de rapides indications pour l'ordre supérieur (où les résultats sont tout aussi simples).

Pour la définition du faisceau des 1-différentielles $\Omega^1_{X/Y}$ d'un d'un Y-préschéma X, cf. (I N° 1). Supposons que X et Y soient des S-préschémas, le morphisme structural $f\colon X \to Y$ étant un S-morphisme. Alors f définit un homorphisme de Modules (compatible avec f)

(4.1) $$f^*\colon \Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S}$$

en d'autres termes, $\Omega^1_{X/S}$ est *contravariant* en le S-préschéma X. D'ailleurs (4.1) équivaut à un homorphisme de Modules sur X

(4.1bis) $$f^*\left(\Omega^1_{Y/S}\right) \to \Omega^1_{X/S}$$

également dénoté par f^* à défaut de mieux, et qui s'insère dans une suite exacte canonique d'homorphismes de Modules

(4.2) $$f^*\left(\Omega^1_{Y/S}\right) \to \Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$$

Tous ces homorphismes sont définis par la condition d'être de nature locale (ce qui ramène au cas affine) et de commuter avec les opérateurs d. L'exactitude de (4.2) est classique et triviale, et se transcrit dans le cas affine en la suite exacte (correspondant à un homorphisme $B \to C$ de A-algèbres) :

(4.2bis) $$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/B} \to 0$$

36

Lemme 4.1 *Soit $f\colon X \to X$ un morphisme de S-préschémas. Si f est non ramifié (resp. étale) alors $f^*\left(\Omega^1_{Y/S}\right) \to \Omega^1_{X/S}$ est surjectif (resp. un isomorphisme). La réciproque est vraie dans le cas "non ramifié", si f est supposé localement de type fini.*

Le cas non ramifié résulte de la suite exacte (4.2) et de (I 3.1), mais peut aussi se voir directement dans le cas étale. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_{X/Y}"] & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \times_S X \arrow[d] \\ & Y \arrow[r, "\Delta_{Y/S}"] & Y \times_S Y \end{tikzcd}$$

dans lequel $X \times_Y X$ s'identifie au produit fibré de Y et $X \times_S X$ sur $Y \times_S Y$. Comme f est non ramifié, $X \to X \times_Y X$ est une immersion ouverte, donc le faisceau "conormal" de l'immersion composée $\Delta_{X/S}$ de cette dernière avec $X \times_Y X \to X \times_S X$ est isomorphe à l'image inverse sur X du faisceau conormal pour l'immersion $X \times_Y X \to X \times_S X$. D'autre part, $X \to Y$ étant étale donc plat, $X \times_S X \to Y \times_S Y$ est plat, donc le faisceau conormal pour l'immersion $X \times_Y X \to X \times_S X$ est isomorphe à l'image inverse du faisceau conormal pour l'immersion $Y \to Y \times_S Y$, i.e. l'image inverse de $\Omega^1_{Y/S}$. La conclusion en résulte.

Lemme 4.2 *Soit $X = Y[t_1, \dots, t_n]$, Y étant un S-préschéma. Alors la suite d'homorphismes canoniques*

$$0 \to f^*\left(\Omega^1_{Y/S}\right) \to \Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$$

est exacte et $\Omega^1_{X/Y}$ est libre de base les $\mathrm{d}_{X/Y} t_i$.

La vérification (purement affine) est immédiate. (N.B. on connaît déjà l'exactitude de (4.2)).

Combinant ces deux énoncés et définition 1.1, on trouve

Théorème 4.3 *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme lisse de S-préschémas, alors :*

(i) La suite d'homorphismes canoniques

$$0 \to f^*\left(\Omega^1_{Y/S}\right) \to \Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$$

est exacte.

37 *(ii) $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre, son rang n en x est égal à la dimension relative de f en x.*

Corollaire 4.4 *L'homorphisme $f^*\left(\Omega^1_{Y/S}\right) \to \Omega^1_{X/S}$ est injectif, son image dans $\Omega^1_{X/S}$ est localement facteur direct.*

Soit $u\colon F \to G$ un homorphisme de Modules sur le préschéma X, on dit qu'il est *universellement injectif* en $x \in X$, si l'homorphisme $F_x \to G_x$ de $\mathscr{O}_x$-modules est injectif, et reste tel par tensorisation avec toute $\mathscr{O}_x$-algèbre (ou, ce qui revient au même d'ailleurs, avec tout $\mathscr{O}_x$-module). Il suffit par exemple qu'il existe un voisinage ouvert U de x tel que u induise un isomorphisme de $F|U$ sur un facteur direct de $G|U$, cette condition est aussi nécessaire lorsque F et G sont libres (et de type fini) dans un voisinage de x, de façon précise dans ce cas les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est injectif en x et $\operatorname{Coker} u$ libre en x ;

(ii) Il existe un voisinage ouvert U de x tel que u induise un isomorphisme de $F|U$ sur un facteur direct de $G|U$;

(iii) u est universellement injectif en x ;

(iv) l'homorphisme $\mathscr{F}_x \otimes k(x) \to \mathscr{G}_x \otimes k(x)$ sur les "fibres" restreintes induit par u est injectif ;

(v) L'homorphisme transposé $\check{G} \to \check{F}$ est surjectif au point x (ou, encore, ce qui revient au même, au voisinage de x).

(Démonstration circulaire, (iv)⇒(v) résulte de Nakayama, d'autre part (v)⇒(i) puisque un faisceau quotient localement libre est nécessairement facteur direct). Géométriquement, la situation envisagée signifie que u correspond à un isomorphisme du fibré vectoriel dont le faisceau des sections est $\mathscr{F}$, sur un sous-fibré du fibré vectoriel analogue défini par G. Bien entendu, il ne suffit pas pour cela que $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ soit injectif.

Corollaire 4.5 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de S-préschémas, localement de type fini, $x \in X$, $y = f(x)$, s la projection de x et y sur S. On suppose Y lisse en y sur S. Conditions équivalentes :*

(i) f est lisse en x.

(ii) X est lisse sur Y en x, et $f^*\left(\Omega^1_{Y/S}\right) \to \Omega^1_{X/S}$ est universellement injectif en x, i.e. c'est un homorphisme injectif en x et son conoyau $\Omega^1_{X/Y}$ est libre en x).

La nécessité résulte de 1.3 (iii) et de 4.3 (i) (ii), prouvons la suffisance. Comme les $\mathrm{d}g$
38 ($g \in \mathscr{O}_x$) engendrent le module $\Omega^1_{X/Y}$ en x, on peut trouver des g_i ($1 \leq i \leq n$) tels que les images des $\mathrm{d}g_i$ dans $\left(\Omega^1_{X/Y}\right)_x$ forment une base de ce module. Prenant X assez petit, on peut supposer que les g_i proviennent de sections de $\mathscr{O}_X$, et définissent donc un Y-morphisme $g\colon X \to Y' = Y[t_1, \ldots, t_n]$. Utilisant l'hypothèse et lemme 4.2, on voit facilement que l'homorphisme correspondant $g^*\left(\Omega^1_{Y'/S}\right) \to \Omega^1_{X/S}$ est bijectif en x, ce qui nous ramène à prouver le

Corollaire 4.6 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de S-préschémas lisses. Pour que f soit étale en $x \in X$, il faut et il suffit que $f^*\left(\Omega^1_{Y/S}\right) \to \Omega^1_{X/S}$ soit un isomorphisme en x.*

On sait que c'est nécessaire par 4.1, et cette condition implique que f est non ramifié en x par le même lemme. En vertu de 2.2, on est ramené au cas où $S = \mathrm{Spec}(k)$. Comme Y est lisse sur k, il est régulier, donc a fortiori normal, et en vertu de (I 9.5 (ii)) on est ramené à prouver que $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x$ est injectif, ou encore que $\mathscr{O}_y$ et $\mathscr{O}_x$ ont même dimension. Or ces dimensions sont respectivement les rangs de $\Omega^1_{Y/k}$ et $\Omega^1_{X/k}$ en y resp. x, donc égaux en vertu de l'hypothèse.

Remarques 4.7 X et Y étant supposés lisses sur S, le critère 4.5 (ii) de lissité de $f\colon X \to Y$ peut encore s'énoncer en disant que pour tout $x \in X$, l'application *tangente* (relativement à la base S) de f en x, i.e. le transposée de l'homorphisme des $k(x)$ espaces vectoriels de dimension finie, fibres restreintes de $f^*\left(\Omega^1_{Y/S}\right)$ et $\Omega^1_{X/S}$ en x, est *surjective*. C'est là une hypothèse bien familière en particulier parmi les gens travaillant avec les espaces analytiques. L'hypothèse de non singularité qu'ils font d'ordinaire (qui signifie que X et Y sont "lisses sur $\mathscr{C}$", cf N° 5) ne semble due qu'à la peur qu'inspirent encore à bien des géomètres les points singuliers des variétés algébriques ou espaces analytiques.

Signalons le cas particulier suivant de 4.6 :

Corollaire 4.8 *Soient X un S-préschéma, $g\colon X \to S[t_1, \ldots, t_n]$ un S-morphisme, défini par les sections g_i $(1 \leq i \leq n)$ de $\mathscr{O}_X$, x un point de X tel que X soit lisse sur S en x. Pour que g soit*
39 *étale en x, il faut et il suffit que les $\mathrm{d}g_i$ $(1 \leq i \leq n)$ forment une base de $\Omega^1_{X/S}$ en x (ou, ce qui revient au même, que leurs images dans $\Omega^1_{X/S}(x) = \left(\Omega^1_{X/S}\right)_x \otimes_{\mathscr{O}_x} k(x)$ forment une base de cet espace vectoriel sur $k(x)$).*

Soient X un préschéma, Y un sous-préschéma fermé de X défini par un faisceau cohérent $\mathscr{J}$ d'idéaux. Donc $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ peut être considéré comme un faisceau cohérent sur Y (le *faisceau conormal* de Y dans X). Si maintenant X est un S-préschéma, on a une suite exacte canonique de faisceaux quasi-cohérents sur Y

$$\mathscr{J}/\mathscr{J}^2 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \to \Omega^1_{Y/S} \to 0 \tag{4.3}$$

dont la partie de droite n'est autre que (4.2) (avec le rôle de X et Y interchangés, compte tenu que $\Omega^1_{Y/X} = 0$), tandis que l'homomorphisme $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2 \to \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ est déduit de l'homomorphisme (en général non linéaire) $g \to \mathrm{d}g$ par passage aux quotients. L'exactitude de (4.3) est classique et d'ailleurs triviale, et s'interprète dans le cas affine par la suite exacte suivante (correspondante à un homomorphisme surjectif $B \to C$ de A-algèbres, de noyau J) :

$$J/J^2 \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{C/A} \to 0 \qquad (C = B/J) \tag{4.3bis}$$

part 8 (suite exacte qui avait déjà été utilisée implicitement dans la démonstration de (I 7.2) !).

Proposition 4.9 *Soient X un S-préschéma, Y un sous-préschéma fermé de X défini par un faisceau cohérent $\mathscr{J}$ d'idéaux sur X, x un point de X, g_i $(1 \leq i \leq n)$ des sections de $\mathscr{O}_X$, définissant un S-morphisme*

$$g\colon X \to S[t_1, \ldots, t_n] = X'$$

enfin p un entier, $0 \leq p \leq n$. On suppose X lisse sur S en x. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un voisinage ouvert X_1 de x dans X tel que $g|X_1$ soit étale *et que $Y_1 = Y \cap X_1$ (trace de Y sur X_1) soit* l'image inverse *du sous-préschéma fermé $Y' = S[t_{p+1}, \ldots, t_n]$* de *$X' = S[t_1, \ldots, t_n]$ (i.e. les g_i $(1 \leq i \leq p)$ engendrent $\mathscr{J}|X_1$) :*

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d, "\text{étale}"] \\ Y' = S[t_{p+1}, \ldots, t_n] \arrow[r] & X' = S[t_1, \ldots, t_n] \end{tikzcd}$$

40

(ii) Y est lisse sur *S* en *x, les g_i $(1 \leq i \leq p)$ définissent des* éléments de *$\mathscr{J}_x$, les $dg_i(x)$ $(1 \leq i \leq n)$ forment une* base de *$\Omega^1_{X/S}(x)$ sur $k(x)$, les $dg'_i(x)$ $(p+1 \leq i \leq n)$ forment une* base de *$\Omega^1_{Y/S}(x)$ sur $k(x)$ (où les g'_i désignent les restrictions des g_i* à *Y ; les différentielles sont prises par rapport à S).*

(iii) Les g_i $(1 \leq i \leq p)$ définissent un système de générateurs *de $\mathscr{J}_x$, et les $dg_i(x)$ $(1 \leq i \leq n)$ forment une* base de *$\Omega^1_{X/S}(x)$ sur $k(x)$.*

(iv) Y est lisse sur *S en x, les g_i forment un* système minimal de générateurs de *$\mathscr{J}_x$, les $dg'_i(x)$ $(p+1 \leq i \leq n)$ forment une* base de *$\Omega^1_{Y/S}(x)$ sur $k(x)$.*

De plus, sous ces conditions, $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est un Module libre sur Y en x, admettant comme base en *x les classes des g_i $(1 \leq i \leq p)$,* et l'homomorphisme *canonique $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2 \to \Omega^1_{X/S} \otimes \mathscr{O}_Y$ est* universellement injectif en x.

Remarque. Cela implique que p est bien déterminé par les autres conditions, soit comme *rang* du Module libre $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$, sur Y en x, ou encore le *nombre minimum de générateurs* de $\mathscr{J}_x$ sur X, ou enfin par le fait que la dimension relative de Y rel. S en x est $n-p$.

Démonstration. Supposont d'abord (i) vérifié. Alors par (I 4.6 (iii)) Y_1 est étale sur Y', donc par définition il est lisse sur S en x (de dimension relative $n-p$), il en est donc de même de Y. Il résulte alors de (4.8) que les dg_i $(1 \leq i \leq n)$ forment une base de $\Omega^1_{X/S}$ en x, et que les dg'_i $(p+1 \leq i \leq n)$ une base de $\Omega^1_{Y/S}$ en x, d'où il résulte par la suite exacte (4.3) que les g_i $(1 \leq i \leq p)$ sont linéairement indépendants dans $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ (considéré comme Module sur Y) en x ; comme les g_i $(1 \leq i \leq p)$ engendrent $\mathscr{J}_x$, il s'ensuit que les $g_i \mod \mathscr{J}_x^2$ forment une *base de* $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ en x. Cela implique d'une part que les g_i $(1 \leq i \leq p)$ forment un système *minimal* de générateurs de $\mathscr{J}_x$, d'autre part que l'homomorphisme $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2 \to \Omega^1_{X/S} \otimes \mathscr{O}_Y$ de (4.3) est universellement injectif en x (car applique une base d'un Module libre en x sur une partie d'une base d'un Module libre en x - N.B. il s'agit de Y-Modules). Cela prouve que (i) implique (ii), (iii), (iv), ainsi que les dernières assertions de proposition 4.9.

(iii) implique (i) en vertu de corollaire 4.8.

41 (ii) implique (i). En effet, la première hypothèse dans (ii) signifie que (quitte à remplacer X par un voisinage ouvert de x dans X) g induit un morphisme $h\colon Y \to Y'$. D'après 4.8, les deux autres hypothèses de (ii) signifient que g est étale en x, et h étale en x. Soit alors Y'' l'image inverse de Y' par g. Donc Y est un sous-préschéma fermé de Y'', qui est étale sur Y' en x par (I 4.6 (iii)) puisque g est étale en x. Donc le morphisme d'immersion $Y \to Y''$ est lui-même étale (I 4.8) donc une immersion ouverte (I 5.8 ou I 5.2), donc remplaçant encore X par un voisinage ouvert convenable X_1 de x, on obtient (i).

Ce qui précède établit l'équivalence des conditions (i) (ii) (iii), et le fait qu'elles impliquent (iv), il reste à prouver que (iv)⇒(ii), ce qui est immédiat (compte tenu que $\Omega^1_{X/S}$ est libre sur X en x) une fois qu'on sait que le fait que Y est lisse sur S en x implique que $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est libre sur Y en x, et l'homomorphisme $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2 \to \Omega^1_{X/S} \otimes \mathscr{O}_Y$ universellement injectif en x. Ce dernier point est inclu dans le

Théorème 4.10 *Soient X un S-préschéma lisse, Y un sous-préschéma fermé de X défini par un faisceau cohérent $\mathscr{J}$ d'idéaux sur X, x un point de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Y *est* lisse sur S en x.

(ii) Il existe un voisinage ouvert X_1 *de* x *dans* X *et un* S*-morphisme* étale

$$g\colon X_1 \to X' = S[t_1, \ldots, t_n]$$

tel que $Y_1 = Y \cap X_1$ *(trace de* Y *sur* X_1*) soit le sous-préschéma de* X_1 image inverse *par* g *du sous-préschéma fermé* $Y' = S[t_{p+1}, \ldots, t_n]$ *de* $X' = S[t_1, \ldots, t_n]$*, pour un* p *convenable.*

(iii) Il existe des générateurs g_i $(1 \leq i \leq p)$ de $\mathscr{J}_x$*, tels que les* dg_i *forment une partie d'une base de* $\Omega^1_{X/S}$ *en* x *(ou, ce qui revient au même, tel que les* $dg_i(x)$ *dans* $\Omega^1_{X/S}$ *soient linéairement indépendant sur* $k(x)$*).*

(iv) Le faisceau $\mathscr{J} / \mathscr{J}^2$ *est libre sur* Y *en* x*, et l'homomorphisme canonique*

$$d\colon \mathscr{J} / \mathscr{J}^2 \to \Omega^1_{X/S} \otimes \mathscr{O}_Y$$

est universellement injectif en x *; ou encore : la suite d'homomorphismes canoniques*

$$0 \to \mathscr{J} / \mathscr{J}^2 \to \Omega^1_{X/S} \otimes \mathscr{O}_Y \to \Omega^1_{Y/S} \to 0$$

est exacte en x*, et* $\Omega^1_{Y/S}$ *est localement libre en* x*.*

42

Démonstration. On sait déja que (ii) implique (i), (iii), (iv) d'après ce qui précède. Prouvons que (i)⇒(ii) (ce qui achèvera en même temps la démonstration de 4.9) En vertu de théorème 4.3 (ii), les deux derniers termes dans la suite exacte (4.3) sont des Modules libres sur Y. Donc, comme les images dans $\Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ des dg $(g \in \mathscr{O}_X)$ engendrent ce module en x, donc leurs images dans $\Omega^1_{Y/S}$ engendrent ce dernier en x, on peut trouver des g_i $(p+1 \leq i \leq n)$ dans $\mathscr{O}_X$ tels que les dg'_i forment une base de $\Omega^1_{Y/S}$, puis (en vertu de l'exactitude de (4.3)) compléter le système des dg_i $(p+1 \leq i \leq n)$ en une base du terme médian par des éléments de la forme dg_i $(1 \leq i \leq n)$ où les g_i $(1 \leq i \leq p)$ *sont dans* $\mathscr{J}_x$. Les g_i proviennent de sections de $\mathscr{O}_X$ sur un voisinage de x dans X, qu'on peut supposer égal à X. On est alors sous les conditions de 4.8 (ii), et on a établi que cela implique la condition 4.8 (i), d'où 4.10 (ii).

L'implication (iii)⇒(ii) dans 4.10 résulte aussitôt de l'implication (iii) ⇒(i) dans 4.8. Donc (i) (ii) (iii) sont équivalents, et impliquent (iv). Enfin, il est trivial que (iv) implique (iii), compte tenu que des $g_i \in \mathscr{J}_x$ qui forment une base de $\mathscr{J}_x \mod \mathscr{J}_x^2$ engendrent $\mathscr{J}_x$ (Nakayama).

De plus, la démonstration qui précède montre ceci :

Corollaire 4.11 *Soient* X *un* S*-préschéma,* Y *un sous-préschéma fermé défini par un faisceau cohérent* $\mathscr{J}$ *d'idéaux sur* X*,* x *un point de* Y*. On suppose* X et Y lisses sur S en x. *Soient* g_i *des sections de* $\mathscr{J}$ $(1 \leq i \leq p)$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Les g_i *engendrent* $\mathscr{J}_x$ *et les* $dg_i(x)$ *sont* linéairement indépendants *dans* $\Omega^1_{X/S}(x)$ *sur* (x).

(ii) Les $g_i \mod \mathscr{J}^2$ *forment une base de* $\mathscr{J} / \mathscr{J}^2$ *en* x*.*

(iii) Les g_i forment un système minimal de générateurs de $\mathscr{J}_x$.

(iv) On peut trouver d'autres sections g_i ($p+1 \leq i \leq n$) de $\mathscr{O}_X$ sur un voisinage X_1 de X, définissant avec les précédents un morphisme étale $X_1 \to X' = S[t_1, \ldots, t_n]$ *tel que $Y_1 = Y \cap X_1$ soit* l'image inverse *par g du sous-préschéma fermé $Y' = S[t_{p+1}, \ldots, t_n]$ de $X' = S[t_1, \ldots, t_n]$.*

43 En particulier :

Corollaire 4.12 *Soient X un S-préschéma, F une section de $\mathscr{O}_X$, Y le sous-préschéma des zéros de F (défini par l'Idéal cohérent $F.\mathscr{O}_X$), x un point de Y. On suppose X simple sur X en x. Pour que Y soit lisse sur S en X, il faut et il suffit que ou bien F soit nul au voisinage de x, ou bien que $dF(x) \neq 0$ (où $dF(x)$ désigne l'image de dF dans l'espace vectoriel $\Omega^1_{X/S}(x)$ sur $k(x)$).*

C'est suffisant en vertu de 4.10 critère (iii). C'est nécessaire, car comme $\mathscr{J}$ est engendré par un élément, il faut d'abord que $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ au point x soit libre de rang ≤ 1. Si ce rang est 0, i.e. $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2 = 0$ en x, il s'ensuit que $J = 0$ en x par Nakayama, i.e. F est nul au voisinage de x. Si ce rang est 1, alors F forme un système minimal de générateurs de $\mathscr{J}$ en x, et on conclut par (4.11, équivalence de (i) et (iii)).

Corollaire 4.13 *Soient Y un S-préschéma localement de type fini, S' un S-préschéma* plat, *$Y' = Y \times_S S'$, x' un point de Y' et x son image canonique dans Y. Pour que Y soit lisse sur S en X, il faut et il suffit que Y' soit lisse sur S' en x'. En particulier, si $S' \to S$ est plat et surjectif, Y est lisse sur S ssi Y' est lisse sur S'.*

Il n'y a à prouver que la suffisance (la nécessité a été vue dans 1.3 (ii)). On peut supposer (remplaçant Y par un voisinage convenable de x, Y' par l'image inverse de ce dernier) que Y est affine de type fini sur S affine, donc Y est isomorphe ùn sous-préschéma fermé d'un schéma $S[t_1, \ldots, t_n]$. Par suite, Y' s'identifie à un sous-préschéma fermé de $X' = X \times_S S'$. Comme X est lisse sur S, donc X' lisse sur S', on peut appliquer les critères de lissité 4.10. Ici, le critère
part 9 (iv) donne le résultat aussitôt.

Remarques 4.14 Le critère (iii) de théorème 4.10 mérite d'être appelé *critère jacobien de lissité*. Il permet de reconnaitre, théoriquement, si un S-préschéma donné Y est lisse sur S en un point x de Y, puisque il existe toujours un voisinage de Y isomorphe à un sous-préschéma d'un S-préschéma lisse X, par exemple $X = S[t_1, \ldots, t_n]$. C'est d'ailleurs pour $X = S[t_1, \ldots, t_n]$,
44 $S = \operatorname{Spec}(A)$, qu'on énonce d'habitude le critère jacobien (bien entendu, dans le cas classique envisagé par Zariski, A était un corps). On laisse au lecteur de donner l'énoncé relatif à la donnée d'un idéal J de $A[t_1, \ldots, t_n]$ et d'un idéal premier le contenant, auquel on est ainsi conduit. Notons qu'il semble bien a l'heure actuelle (et surtout depuis que Nagata est parvenu à généraliser par des méthodes non-différentielles le théorème de Zariski disant que l'ensemble des points réguliers d'un schéma algébrique est ouvert) que le critère jacobien n'a guère d'intérêt que sous la forme où nous le donnons ici (i.e. en utilisant exclusivement des différentielles *relatives* et non pas des différentielles *absolues*, i.e. relatives à l'anneau de constantes absolu $\mathbb{Z}$). Comme

bien souvent, la considération des différentielles est plus commode ici que celle des dérivations. Notons enfin que si Y est lisse sur S en x, de dimension relative n, alors il existe un voisinage ouvert de x dans Y isomorphe à un sous-préschéma de $X = S[t_1, \ldots, t_n]$ avec $n = m + 1$, comme il résulte de la définition et de I 7.6.

Soient A un anneau noethérien, x_i ($1 \leq i \leq n$) des éléments de A, J l'idéal engendré par les x_i. On dit que les x_i forment un *système régulier de générateurs* de J si l'homomorphisme surjectif canonique

$$(A/J)[t_1, \ldots, t_n] \to \mathrm{gr}^J(A)$$

défini par les x_i (où le deuxième membre désigne l'anneau gradué associé à A filtré par les puissances de J) est un *isomorphisme*. Cette condition signifie aussi que

(i) L'homomorphisme surjectif canonique

$$S_{A/J}(J/J^2) \to \mathrm{gr}^J(A)$$

(où, le premier membre désigne l'algèbre symétrique du A/J-module J/J^2) est un isomorphisme, et

(ii) J/J^2 est libre et admet pour base les classes des $x_i \mod J^2$.

Sous cette forme, on voit que si $J \neq A$, les x_i forment un *système minimal de générateurs* de J, et que *tout autre système minimal de générateurs* de J *est un système régulier de générateurs* (N.B. "minimal" est pris au sens strict : nombre minimum d'éléments, qui n'est équivalent au sens : minimal pour l'inclusion, que si A est local) ; d'autre part, si $J = A$, tout système de générateurs de J est régulier.

45 La condition de régularité d'un système de générateurs d'un idéal est stable par localisation par un ensemble multiplicativement stable quelconque, et d'autre part on voit tout de suite que pour que (x_i) soit un système minimal de générateurs de J, il suffit déja que pour tout idéal *maximal* $\mathfrak{m}$ *contenant* J, les x_i définissent un système régulier de générateurs de $JA_{\mathfrak{m}}$ dans $A_{\mathfrak{m}}$. Cela nous ramème donc au cas où A est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et où les x_i sont dans $\mathfrak{m}$. *Alors les x_i forment un système régulier de générateurs de J si et seulement si ils forment une A-suite au sens de Serre* [6], i.e. si pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, x_i est non-diviseur de 0 dans $A/(x_1, \ldots, x_i)A$.

Enfin, dans le cas où A est une algèbre sur un anneau B, et où A/J est isomorphe comme B-algèbre à B (de sorte que J est le noyau d'un homomorphisme de B-algèbres $A \to B$), alors les x_i forment un système régulier de générateurs de J si et seulement si l'homomorphisme canonique

$$B[[t_1, \ldots, t_n]] \to \hat{A}$$

défini par les x_i (où le deuxième membre désigne le complété séparé $\varprojlim A/J^{n+1}$ de A pour la topologie définie par les puissances de J) est un *isomorphisme* (il est en tout cas *surjectif*).

[6] Nous dirons maintenant plutôt "suite A-régulière", cf. EGA 0_{IV} 15.1.7 et 15.1.11.

Tous ces faits sont bien connus, et figurent sans doute dans le cours de Serre d'algèbre commutative rédigé par Gabriel, à peu de choses près. (Où on trouve N autres caractérisations des A-suites, dans le cas où A est un anneau local).

Soit J un idéal dans un anneau noethérien A. On dira que J est un *idéal régulier* si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $JA_{\mathfrak{p}}$ admet un système régulier de générateurs. Il suffit évidemment de le vérifier pour $\mathfrak{p} \supset J$, et on peut de plus se borner à $\mathfrak{p}$ maximal. Plus généralement, soit $\mathscr{J}$ un Idéal sur un préschéma localement nothérien X, on dit que $\mathscr{J}$ est un *Idéal régulier* si pour tout $x \in X$, $\mathscr{J}_x$ est un idéal de $\mathscr{O}_x$ qui admet un système régulier de générateurs. Cela équivaut à la conjonction des deux conditions suivantes :

(a) L'homomorphisme canonique surjectif

$$S_{\mathscr{O}/\mathscr{J}}(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) \to \mathrm{gr}^{\mathscr{J}}(\mathscr{O}_X)$$

est un isomorphisme et

(b) Le faisceau de $\mathscr{O}_X/\mathscr{J}$-Modules $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est localement libre.

46 On dit alors aussi que le sous-préschéma Y de X défini par $\mathscr{J}$ (donc tel que $\mathscr{O}_Y$ prolongé par 0 soit isomorphe à $\mathscr{O}_X/\mathscr{J}$) est *régulièrement immergé* dans X, et on définit de même (de façon évidente) la notion de morphisme d'*immersion régulière*, (resp. *régulière en un point* x), morphisme d'immersion $Y \to X$ identifiant Y (resp. un voisinage convenable de x), à un sous-préschéma fermé régulièrement immergé dans un ouvert de X. (Il ne faut pas dire : sous-préschéma régulier, car cela signifierait que les anneaux locaux de Y sont réguliers). Enfin, des sections x_i de $\mathscr{J}$ sont appelées *système régulier de générateurs* si pour tout $x \in X$, les éléments correspondants de $\mathscr{O}_x$ forment un système régulier de générateurs de $\mathscr{J}_x$ (terminologie compatible avec celle introduite pour des générateurs d'un idéal d'un anneau). Cela signifie aussi que l'homomorphisme surjectif canonique

$$\mathscr{O}_Y[t_1, \ldots, t_n] \to \mathrm{gr}^{\mathscr{J}}(\mathscr{O}_X)$$

défini par les x_i est un isomorphisme. Si on sait par avance que l'Idéal $\mathscr{J}$ est régulier, cela signifie aussi, simplement, que en tout point x *de* Y, les x_i définissent une *base* de $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ sur $\mathscr{O}_{Y,x}$. (N.B. cette condition est vide si Y est vide). Ainsi, pour que $\mathscr{J}$ admette un système régulier de générateurs, il faut et il suffit que $\mathscr{J}$ soit régulier, et le $\mathscr{O}_Y$-Module $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ soit globalement libre (et non-seulement localement libre), i.e. que l'homomorphisme canonique $S_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) \to \mathrm{gr}^{\mathscr{J}}(\mathscr{O}_X)$ soit surjectif, et que le $\mathscr{O}_Y$-Module $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ soit globalement libre.

Un *anneau augmenté est dit régulier* si l'idéal de l'augmentation est régulier. Ainsi, si A est un anneau local, considéré comme augmenté dans son corps résiduel k, alors A est un anneau local régulier si et seulement si c'est un anneau augmenté régulier.

(À vrai dire, il semble qu'il était inutile de commencer par faire le sorite préliminaire pour les anneaux, il y a intérêt à commencer avec les faisceaux tout de suite. Si on veut quelque chose dans le cas noethérien, c'est la définition adoptée ici - a priori moins stricte que celle par les A-suites de Serre - qui semble préférable pour les besoins du calcul différentiel. Bien entendu, pour bien

faire, il faudrait développer aussi au moins une partie de la théorie des morphismes lisses dans le
47 cadre non-noethérien [7], probablement en partant du critère jacobien, de façon à obtenir si possible toutes les propriétés formelles essentielles des morphismes lisses et des morphismes étales i.e. lisses et quasi-finis ; les réciproques seules faisant appel à des hypothèses noethériennes).

Après ces longs préliminaires terminologiques, un petit théorème :

Théorème 4.15 *Soient X un S-préschéma localement de type fini, Y un sous-préschéma fermé de X défini par un faisceau cohérent $\mathscr{J}$ d'idéaux sur X, x un point de X. On suppose maintenant Y* lisse sur *S* en *x (et rien sur X). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est lisse sur S en x

(ii) L'immersion $i\colon Y \to X$ est régulière en x, i.e. $\mathscr{J}_x$ est un idéal régulier de $\mathscr{O}_x$.

Corollaire 4.16 *Supposons Y* lisse *sur S. Pour que X soit lisse sur S dans un voisinage de Y (i.e. aux points de Y) il faut et il suffit que Y soit régulièrement plongé dans X, i.e. que l'immersion $i\colon Y \to X$ soit régulière.*

Démonstration. (i) implique (ii). On applique 4.10 crière (ii), comme $g\colon X_1 \to X$ est *plat*, pour montrer que l'image inverse par g du sous-préschéma Y' de X' est régulièrement plongé, on est ramené à prouver que $Y' = S[t_{p+1}, \dots, t_n]$ est régulièrement plongé dans $S[t_1, \dots, t_n]$, ce qui est trivial (les t_i ($1 \leq i \leq p$) forment un sysème régulier de générateurs de l'Idéal définissant Y' dans X').

(ii) implique (i). Soit g_i ($1 \leq i \leq p$) un système régulier de générateurs de $\mathscr{J}_x$ et soient g_i ($p+1 \leq i \leq n$) des éléments de $\mathscr{O}_{X,x}$ tels que leurs images g_i' dans $\mathscr{O}_{Y,x}$ définissent un morphisme *étale*

$$Y_1 \to Y' = S[t_{p+1}, \dots, t_n]$$

d'un voisinages Y_1 de Y dans Y'. Les g_i ($1 \leq i \leq n$) proviennent de sections (de même nom) de $\mathscr{O}_X$ sur un voisinage X_1 de x, et on peut supposer $X_1 = X$, $Y_1 = Y$. On obtient ainsi un morphisme

$$g\colon X \to X' = S[t_1, \dots, t_n]$$

48 et tout revient à montrer que ce morphisme est *étale* en x. Prenant X_1 assez petit, on peut supposer que les g_i ($1 \leq i \leq p$) forment un système régulier de générateurs de $\mathscr{J}$ sur tout X. En particulier, ils engendrent $\mathscr{J}$, donc le sous-préschéma Y de X s'identifie à l'image inverse par g du sous-préschéma Y' de X'. Soit $x' = g(x)$, alors la fibre de $X' \to X$ en x' est donc identique à la fibre de $Y \to Y'$ en x, donc est étale sur $k(x')$, donc g est *non ramifié* en x, reste à prouver que g est *plat* en x. Or le gradué associé à $\mathscr{O}_{X',x'}$ filtré par les puissances de $\mathscr{J}_x'$ est *libre* sur $\mathscr{O}_{Y',x'}$ en tous degrés, d'autre part le gradué associé à $\mathscr{O}_{X,x}$ filtré par les puissances de $\mathscr{J}_x = \mathscr{J}_x'\mathscr{O}_{X,x}$ est isomorphe (sous l'homomorphisme canonique) au produit tensoriel du précédent par $\mathscr{O}_{Y,x}$

[7] Comme il est dit dans l'avant-propos, c'est chose faite maintenant, cf. EGA IV 17, 18

(puisque l'un et l'autre anneau sont des anneaux de polynômes à $n-p$ indéterminées, à anneau de constante $\mathscr{O}_{Y',x'}$, resp. $\mathscr{O}_{Y,x}$), enfin sur $\mathscr{O}_{X',x'}/\mathscr{J}'_{x'} = \mathscr{O}_{Y',x'}$ $\mathscr{O}_{X,x}/\mathscr{J}_x = \mathscr{O}_{Y,x}$ est plat.

D'après un critère général de platitude (valable pour un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens $A' \to A$, A' étant muni d'un idéal $J' \neq A'$ tel que le gradué associé soit libre sur A'/J' en toute dimension) il s'ensuit que X est plat sur X' en x, cqfd.

Corollaire 4.17 *Soient X un préschéma localement de type fini sur Y, i une section de X sur Y, y un point de Y, $x = i(y)$, $\mathscr{J}$ le faisceau d'idéaux sur X défini par le sous-préschéma $i(Y)$ (que nous supposons fermé pour simplifier l'énoncé, condition vérifiée si X est un schéma).*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est lisse sur Y en x

(ii) i est une immersion régulière en y

(iii) La $\mathscr{O}_y$-algèbre complétée de $\mathscr{O}_x$ pour la topologie définie par les puissances de $\mathscr{J}_x$ est isomorphe à une algèbre de séries formelles $\mathscr{O}_y[[t_1, \ldots, t_n]]$.

(iii bis) Il existe un voisinage ouvert U de y tel que le faisceau d'algèbres $\varprojlim i^*(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{n+1})$ sur $\mathscr{O}_Y$ soit isomorphe à un faisceau de la forme $\mathscr{O}_Y[[t_1, \ldots, t_n]]$ au-dessus de U.

(iv) Il existe un voisinage ouvert U de y, et un voisinage ouvert V de x, et enfin un Y-morphisme $g\colon V \to U[t_1, \ldots, t_n]$, tel que g soit étale, que s induise une section de V sur U, transformée par g en la section nulle de $U[t_1, \ldots, t_n]$ sur U.

49 L'équivalence de (i) et (ii) est un cas particulier de théorème 4.15, en faisant $Y = S$, l'équivalence de (ii) et (iii) (et moralement de (ii) et (iii bis)) a été signalé avec les "rappels". quant à l'équivalence de (i) et (iv), elle se déduit facilement de théorème 4.10 (équivalence des
part 10 conditions (i) et (ii) dudit).

Corollaire 4.18 *Soit X un préschéma lisse au-dessus de S. Alors le morphisme diagonal*

$$\Delta_{X/S}\colon X \to X \times_S X$$

est une immersion régulière. *ou comme on dit encore, X est* "différentiablement lisse" *sur S.*

En effet, c'est un cas particulier de corollare 4.16, puisque X et $X \times_S X$ sont tous deux lisses sur S.

Remarques 4.18 Rappelons (I 1) que si X est un préschéma au-dessus de S, on introduit les faisceaux quasi-cohérents d'Algèbres $\mathscr{P}^n_{X/S} = \mathscr{O}_{X\times_S X}/\mathscr{I}_X^{n+1}$ sur X, (où $\mathscr{I}_X$ désigne le faisceau d'Idéaux qui définit la diagonale dans $X \times_S X$), considéré comme faisceau de $\mathscr{O}_X$-algèbres grâce à la première projection $\mathrm{pr}_1\colon X \times_S X \to X$. Les $\mathscr{P}^n_{X/S}$ forment un système projectif d'Algèbres sur X, dont la limite projective est notée $\mathscr{P}^\infty_{X/S}$ et n'est autre que le faisceau structural du complété formel de $X \times_S X$ le long de la diagonale (en supposant maintenant X localement de type fini sur S, donc les $\mathscr{P}^n_{X/S}$ cohérents). Dire que X est différentiablement lisse sur S

(i.e. que le morphisme diagonal $\Delta_{X/S}$ est une immersion régulière) signifie aussi que $\mathscr{P}^{\infty}_{X/S}$ est régulier, en tant que faisceau d'algèbres augmenté vers $\mathscr{O}_X$, i.e. que $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre et l'homomorphisme surjectif canonique

$$S_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/S}) \to \mathrm{gr}_*(\mathscr{P}^{\infty}_{X/S})$$

est un isomorphisme, ou enfin que tout point de X à un voisinage ouvert sur lequel le faisceau d'Algèbres augmentées $\mathscr{P}^{\infty}_{X/S}$ soit isomorphe à un faisceau $\mathscr{O}_X[[t_1, \dots, t_n]]$.

Soit s une section de X sur S, $\mathscr{J}$ le faisceau d'idéaux sur X qu'elle définit (supposant
50 pour simplifier que $s(S)$ est fermé), on a alors des isomorphismes canoniques de $\mathscr{O}_X$-algèbres augmentées :

(4.4) $$s^*(\mathscr{P}^n_{X/S}) = \mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{n+1} \quad , \quad s^*(\mathscr{P}^{\infty}_{X/S}) = \varprojlim_n \mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{n+1}$$

Ces isomorphismes sont fonctoriels dans un sens évident par changement de base, et (compte tenu de ce fait) redonnent une caractérisation des faisceaux d'algèbres $\mathscr{P}^n_{X/S}$ sur S. Si par exemple $S = \mathrm{Spec}(k)$, k un corps, alors la donnée d'une section s de X sur S équivaut à la donnée d'un point x de X rationnel sur k, et les formules précédentes signifient que l'on a un isomorphisme de k-algèbres

(4.5) $$\mathscr{P}^n_{X/S}(x) = \mathscr{O}_x/\mathfrak{m}_x^{n+1}$$

ce qui justifie le nom :"*faisceau des parties principales d'ordre n sur X rel. à S*" donné à $\mathscr{P}^n_{X/S}$. On voit de plus sur (4.4) que *si X est différentiablement lisse sur S en tout point de $s(S)$, alors X est lisse sur S en tout point de $s(S)$*, (corollaire 4.17) *la réciproque étant également vraie* (corollaire 4.18). Compte tenu de 4.13, on en conclut facilement que si X est un S-préschéma localement de type fini, *X est lisse sur S si et seulement si il est plat sur S et différentiellement lisse sur S*. (N.B. l'hypothèse de platitude est essentielle, comme on voit en prenant pour X un sous-préschéma fermé de S).

Notons encore, à titre de rappel, qu'on obtient une *deuxième structure d'algèbre* sur $\mathscr{P}^n_{X/S}$ grâce à la projection $\mathrm{pr}_2 \colon X \times_S X \to X$, se déduisant d'ailleurs de la précédente à l'aide de l'*involution canonique* du faisceau d'anneaux $\mathscr{P}^n_{X/S}$, induit par l'automorphisme de symétrie de $X \times_S X$. On note par $d^n_{X/S}$ ou simplement d^n, l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux

(4.6) $$d^n_{X/S} \colon \mathscr{O}_X \to \mathscr{P}^n_{X/S}$$

qui correspond à cette deuxième structure d'Algèbre. Compte tenu de l'isomorphisme (4.4), cet homomorphisme transforme une section f de $\mathscr{O}_X$ en une section $d^n(f)$ de $\mathscr{P}^n_{X/S}$ dont l'image inverse par une section s de X sur S s'identifie à l'image canonique de f dans $\Gamma(X, \mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{n+1})$. Cela justifie le nom de "*système des parties principales d'ordre n de f*" donné à $d^n f$, notamment
51 dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(k)$, envisagé dans la formule (4.5).

Pour finir, notons que l'homomorphisme (4.6) peut être considéré comme l'*opérateur différentiel d'ordre $\leq n$* ([8]) (relativement au préschéma des constantes S) *universel* sur $\mathscr{O}_X$,

[8] Pour tout ce qui concerne le présent alinéa, on pourra consulter EGA IV 16.8 à 16.12.

en convenant d'appeler opérateur différentiel d'ordre $\leq n$ de $\mathscr{O}_X$ dans un Module F, un homomorphisme de faisceaux D qui se factorise en

$$D\colon \mathscr{O}_X \xrightarrow{d^n} \mathscr{P}^n_{X/S} \xrightarrow{u} F$$

où u est un homomorphisme *de $\mathscr{O}_X$-Modules*, d'ailleurs uniquement déterminé par D. Cette définition concorde avec la définition récurrente intuitive (D est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n$ si pour toute section g de $\mathscr{O}_X$ sur un ouvert U de X, $f \mapsto D(fg) - D(f)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leq n-1$ sur U). Il s'ensuit que *si X est différentiablement lisse sur S, le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels de tous ordres a la structure simple bien connue* en calcul différentiel sur les variétés différentiables, et en particulier admet localement une base de $\mathscr{O}_X$-Module fermé des *puissances divisées* en des opérateurs permutables $\delta/\delta x_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Si S est un faisceau de $\mathbb{Q}$-algèbres ($\mathbb{Q}$ = corps des rationnels) il suffit de prendre les polynômes ordinaires en les $\delta/\delta x_i$. Dans ce cas d'ailleurs, et très exceptionnellement, pour que X soit différentiablement lisse sur S, il suffit déjà que $\Omega^1_{X/S}$ soit localement libre.

Remarque 4.19 La terminologie "immersion régulière", "idéal régulier", etc.. introduite dans ce numéro a rencontré une opposition assez vive et générale (Chevalley, Serre). On a proposé "idéal de Cohen-Macaulay" ou "idéal de Macaulay" ou "idéal macaulayen", ce qui moralement obligerait à adopter aussi "immersion de Cohen-Macaulay" ou "imersion de Macaulay". Cette terminologie cependant conflicte avec une autre déjà employée dans de futures rédactions du multiplodoque, où un morphisme (de type fini) est dit "Cohen-Macaulay" en un point s'il est plat en ce point, et si la fibre passant par ce point y a un anneau local qui soit un anneau de Cohen-Macaulay. En attendant de trouver une solution satisfaisante, nous garderons sous toutes réserves la terminologie introduite dans ce numéro[9].

5 Cas d'un corps de base

52

Proposition 5.1 *Soient k un corps, X un préschéma de type fini sur k, x un point de X et n la dimension de X en x, $f\colon X \to \operatorname{Spec} k[t_1, \dots, tn] = Y$ un morphisme, défini par des éléments $f_i \in \Gamma(X : \mathscr{O}_X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes (et entraînent que X est lisse sur k en x, et a fortiori régulier en x d'après 3.1) :*

(i) f est étale en x.

(ii) Les df_i forment une base de $\Omega^1_{X/k}$ en x.

(iii) Les df_i engendrent $\Omega^1_{X/k}$ en x.

Comme (i) implique que X est lisse sur k en x, l'implication (i)⇒(ii) est un cas particulier de 4.8, (ii)⇒(iii) est trivial, reste à prouver (iii)⇒(i). Or sir (iii) est vérifié, f est net en x en vertu de lemme 4.1, donc (remplaçant x par un voisinage ouvert) quasi-fini, donc dominant par raison de dimensions. Comme Y est régulier, il s'ensuit que f est étale par (I 9.5 (ii)) ou (I 9.11).

[9] C'est celle adoptée dans EGA 0_{IV} 15.1.7.

Corollaire 5.2 *Sous les conditions préliminaires de 5.1, supposons que $\kappa(x)$ soit une extension* finie séparable *de k, et que les f_i ($1 \leq i \leq n$) définissent des éléments de $\mathfrak{m}_x$. Alors les conditions précédentes équivalent à*

(iv) Les f_i forment un système de générateurs de $\mathfrak{m}_x$ (ou encore : les f_i mod $\mathfrak{m}_x^2$ forment une base de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ sur $\kappa(x)$).

En effet, (iv)⇒(iii) en vertu de la suite exacte

$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to \Omega^1_{\mathscr{O}_x/k} \to \Omega^1_{\kappa(x)/k} \to 0 \tag{5.1}$$

et compte tenu de $\Omega^1_{\kappa(x)/k} = 0$ puisque $\kappa(x)$ est étale sur k. D'autre part (ii) implique (iv), car comme X et $\operatorname{Spec}(\kappa(x))$ sont lisses sur k en x, on peut dans la suite exacte précédente mettre un 0 sur la gauche en vertu de 4.10 (iv).

Corollaire 5.3 *Soit x un point de X (de type fini sur k). Si X est lisse sur k en x, alors $\mathscr{O}_x$ est régulier, la réciproque étant vraie si $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de k.*

53 En effet, la réciproque résulte de 5.2, en prenant un système régulier (f_i) de générateurs de $\mathfrak{m}_x$. (N.B. au lieu de 5.2, on peut aussi invoquer le théorème 4.15). On conclut :

Proposition 5.4 *Soit X un préschéma de type fini sur k. Si X est lisse sur k, il est régulier, la réciproque étant vraie si k est parfait.*

Pour la réciproque, on note qu'en vertu de 5.3, X est lisse sur k en tout point fermé, donc partout puisque l'ensemble des points où il est lisse est ouvert.

Théorème 5.5 *Soient X un préschéma de type fini sur k, x un point de X, n la dimension de X en x, k' une extension parfaite de k. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est lisse sur k en x.

(ii) $\Omega^1_{X/k}$ est libre de rang n en x.

(iibis) $\Omega^1_{X/k}$ est engendré par n éléments en x.

(iii) X est différentiablement lisse sur k en x.

(iv) Il existe un voisinage ouvert U de x tel que $U \otimes_k k'$ soit régulier (i.e. les anneaux locaux de ses points sont réguliers).

On a (i)⇒(ii) par 4.3, (ii)⇒(iibis) trivialement et (iibis)⇒(i) grâce à 5.1. Comme X est plat sur k, on a (i)⇔(iii) en vertu de 4.18. On a (i)⇒(iv) puisque lisse est invariant par extension de la base et implique régulier, et (iv)⇒(i) car par Proposition 5.4, on voit que $U \otimes_k k'$ est simple sur k', donc U est simple sur k par 4.13.

part 11 Prenant pour x le point générique de X supposé irréductible, on trouve :

Corollaire 5.6 *Soit K un anneau d'Artin local localisé d'une algèbre de type fini sur le corps k (par example, K peut être une extension de type fini de k), soit n le degré de transcendance sur K de son corps résiduel. Conditions équivalentes :*

54 *(i) K est une extension finie séparable d'une extension transcendante pure $k(t_1, \ldots, t_n)$ de k.*

(ii) $\Omega^1_{X/k}$ est un K-module libre de rang n.

(ii bis) $\Omega^1_{X/k}$ est un K-module admettant n générateurs.

(iii) Le complété O' de $K \otimes_k K$ pour la topologie définie par les puissances de l'idéal d'augmentation $K \otimes_k K \to K$ est une K-algèbré augmentée "régulière", i.e. isomorphe à une algèbre de séries formelles en K (N. B. Si K est un corps, cela équivaut à dire que O' est un anneau local régulier).

(iv) K est une extension séparable de k.

En effet, on peut toujours considérer K comme l'anneau local du point générique d'un schéma de type fini irréductible X sur k, et les conditions envisagées sont les conditions de même nom dans 5.5, en prenant dans (iv) pour k' une extension algébriquement close de k. Seule l'implication K séparable sur $k \Rightarrow X$ lisse sur k en x, demande une démonstration. Or on est aussitôt ramené grâce à 4.13 au cas où le corps de base est k', donc algébriquement clos, donc où il existe un point a de X rationnel sur k. Mais alors X est lisse sur k en a d'aprés 5.4, a fortiori il est lisse sur k en le point générique x, cfqd [10].

On remarquera que dans le cas où K est une extension de type fini de k, l'équivalence de (i) (ii) (ii bis) (iv) est bien connue, mai que nous ne nous sommes servis d'aucune de ses équivalence déjà connues. Bien entendu, la proposition 5.1 contient comme cas particulier qu'un suite d'éléments x_i $(1 \leq i \leq n)$ est un "base de transcendance séparante" de K sur k si et seulment si les dx_i forment une base du K-module $\Omega^1_{K/k}$, fait bien connu par ailleurs.

Corollaire 5.7 *Soit X un préschéma de type fini sur un corps k. Pour que X soit lisse sur k, il faut et il suffit que $\Omega^1_{X/k}$ soit localment libre, et que les anneaux locaux des points génériques des composantes irréductibles de X soient des extensions séparable de k. (cette dernière condition étant automatiquement vérifiée si k est parfait et X réduit).*

On peut supposer X connexe, soit n le rang de $\Omega^1_{X/k}$ supposé localment libre. D'après l'hy-
55 pothése et 5.6, c'est aussi le degré de trancendance des extensions de k définie par les anneaux locaux des points génériques de X, donc toutes les composantes irréductibles de X sont de dimension n. On conclut alors grâce à 5.5.

On fera attention que si K est une extension finie (non nécessairement séparable) de k, alors $\Omega^1_{K/k}$ est un k-module libre, donc posant $X = \mathrm{Spec}(K)$, $\Omega^1_{X/k}$ est un faisceau localement libre, et X est réduit, sans que X soit nécessairement lisse sur k. Etendant alors les scalaires à la clôture algébrique de k, on trouve un exemple analogue, où k est algébriquement clos, mais X en revanche n'étant pas réduit.

Corollaire 5.8 *Soient X un préschéma de type fini sur le corps k, x un point de X, n la dimension de X en x, p la dimension de $\mathscr{O}_x$ i.e. la codimension dans X de l'adhérence Y de x dans X ;*

[10] Cf. Errata à la fin du présent Exp. II (p. 44)

donc $n-p$ le degré de transcendance de $\kappa(x)$ sur k. Soient f_i ($1 \leq i \leq n$) des éléments de $\mathscr{O}_x$, tels que $f_i \in \mathfrak{m}_x$ pour $1 \leq i \leq p$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) le germe de morphisme en x

$$X \longrightarrow \operatorname{Spec}\bigl(k[t_1, \ldots, t_n]\bigr)$$

défini par les f_i est étale en x.

(ii) Les f_i ($1 \leq i \leq p$) engendrent $\mathfrak{m}_x$ i.e. forment un système régulier de paramètres de $\mathscr{O}_x$, et les classes dans $\kappa(x)$ des f_j ($p+1 \leq j \leq n$) forment une base de transcendance séparante, (i.e. les $d\overline{f}_j$ ($p+1 \leq j \leq n$) forment une base de $\Omega^1_{\kappa(x)/k}$, ou encore engendrent $\Omega^1_{\kappa(x)/k}$).

Supposons (i) vérifié. Il en résulte que les $df_i(x)$ forment une base de $\Omega^1_{X/k}(x)$ (4.8) donc leurs images $d\overline{f}_i(x)$ dans $\Omega^1_{\kappa(x)/k}$ engendrent cet espace vectoriel sur k. Comme les $\overline{f}_i$ pour $1 \leq i \leq p$ sont nuls, il s'ensuit qu'il suffit de prendre les $d\overline{f}_i(x)$ avec $p+1 \leq i \leq n$. Comme le degré de transcendance de $\kappa(x)$ sur k est $n-p$, il résulte alors du corollaire 5.6 critére (iii) (appliqué à $K = \kappa(x)$) que Y est lisse sur k en son point générique x, et que les $d\overline{f}_i(x)$ ($p+1 \leq i \leq n$) forment une *base* de $\Omega^1_{\kappa(x)/k}$ sur $\kappa(x)$. Par suite, la condition (ii) de 4.9 est vérifiée, donc aussi la condition (iii) et en particulier les f_i ($1 \leq i \leq p$) forment un système de générateurs de $\mathfrak{m}_x$.
56 Comme $\mathscr{O}_x$ est de dimension p, ils forment donc un système régulier de paramètres en x. Cela prouve (ii).

Supposons (ii) vérifié. En vertu de la suite exact (5.1), il s'ensuit que les $df_i(x)$ engendrent $\Omega^1_{X/k}$, d'où (i) grâce à prop. 5.1.

Corollaire 5.9 *Soient X un préschéma de type fini sur le corps k, x un point de X, n la dimension de X en x, p la dimension de $\mathscr{O}_x$ i. .e la codimension de l'adhérence Y de x dans X, donc $n-p$ le degré de transcendance de $\kappa(x)$ sur k. Conditions équivalentes*

(i) $\mathscr{O}_x$ est régulier et $\kappa(x)$ est une extension séparable de k.

(ii) X est lisse sur k en x, et l'homomorphisme canonique

$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow \Omega^1_{\mathscr{O}_x/k} \otimes_{\mathscr{O}_x} \kappa(x) = \Omega^1_{X/k}(x)$$

est injectif.

(iii) Il y a des $f_i \in \mathscr{O}_x$ ($1 \leq i \leq n$) avec $f_i \in \mathfrak{m}_x$ pour $1 \leq i \leq p$, tels que le germe de morphisme en x de X dans $\operatorname{Spec}\bigl(k[t_1, \ldots, t_n]\bigr)$ défini par les f_i soit étale en x (i.e. par 5.1 tels que les $df_i(x)$ engendrent $\Omega^1_{X/k}(x)$).

(iv) Il y a des $f_i \in \mathscr{O}_x$ ($1 \leq i \leq n$) tels que les f_i ($1 \leq i \leq p$) engendrent $\mathfrak{m}_x$ et que les $df_j(x)$ ($p+1 \leq j \leq n$) engendrent $\Omega^1_{\kappa(x)/k}$ sur $\kappa(x)$.

L'équivalence de (iii) et (iv) résulte du corollaire 5.8, ces conditions équivalent aussi d'aprés 4.9 au fait que X est lisse sur k en x et que la condition (ii) de 4.10, est vérifiée. Donc elles équivalent au fait que X est lisse sur k en x et que la condition (iv) de 4.10 est vérifiée, donc à 5.9 (ii). Ou au fait que X est lisse sur k en x et que la condition (i) de 4.10 est vérifiée, qui ici signifie simplement que $\kappa(x)$ est séparable sur k. Cela implique 5.9 (i), il reste à prouver que 5.9 (i) l'implique, i.e. à prouver le

Corollaire 5.10 *Soit x un point d'une préschéma de type fini sur le corps k, tel que $\kappa(x)$ soit séparable sur k. Pour que X soit lisse sur k en x, il faut et il suffit qu'il soit régulier en x (i.e. que l'anneau local $\mathscr{O}_x$ soit régulier).*

En effet, s'il en est ainsi, on peut évidemment trouver des $f_i \in \mathscr{O}_x$ $(1 \leq i \leq n)$ satisfaisant la condition 5.9 (iv).

57

Errata Dans le présent numéro, démonstration de 5.6, on a utilisé le fait qu'un schéma de type fini réduit non vide sur un corps algébriquement clos admet au moin un point régulier (donc lisse), fait qui se démontre d'habitude par vois différentielle (via le théorème de Zariski que l'ensemble des points réguliers de X est ouvert). Si on veut éviter un cercle vicieux, il faut démontrer que si K/k est une extension séparable de type fini, et si les $f_i \in K$ son tels que $d_{K/k}f_i$ forment une base de $\Omega^1_{K/k}$, $(1 \leq i \leq n)$, alors n est le degré de transcendance de K sur k i.e. les f_i sont algébriquement indépendants. La démonstration de ce fait à l'aide du critère de Mac-Lane est bien connue, cf. Bourbaki, Algèbre, Chap. V par. 9 th. 2 : on prend un polynôme $g \in k[t_1, \ldots, t_n]$ de degré minimal tel que $g(f_1, \ldots, f_n) = 0$, on a donc

$$\sum \frac{dg}{dt_i}(f_1, \ldots, f_n) df_i = 0$$

d'où (puisque les df_i forment une base de $\Omega^1_{K/k}$) le fait que les dg/dt_i annulent $(f_1, \ldots, f_n)$, donc sont nuls d'après le caractère minimal de g, donc si k est de caractéristique 0 on a $g = 0$, et si k est de caractéristique $p \neq 0$ on a $g = h(t_1^p, \ldots, t_n^p)$. Utilisant le critère de Mac-Lane, on voit que le polynôme $h \in k[t_1, \ldots, t_n]$ annule aussi $(f_1, \ldots, f_n)$, d'où encore $g = 0$ par le caractère minimal de g.

Exposé III

Morphismes lisses : propriétés de prolongement

58

1 Homomorphismes formellement lisses

Dans II, nous nous sommes bornés à la considération d'homomorphismes de type fini, et par conséquent, dans les homomorphismes locaux $A \to B$ d'anneaux locaux, au cas où B est isomorphe à une algèbre localisée d'une A-algèbre de type fini. Ce cas est insuffisant pour diverses applications, notamment en géométrie formelle ou en géométrie analytique. Par exemple, l'anneau de séries formelles $B = A[\![t_1, \ldots, t_n]\!]$ a (du point de vue de la géométrie formelle) les propriétés d'une algèbre lisse sur A. En géométrie analytique, il en est de même de l'anneau local d'un point (y, z) d'un produit $Y \times \mathbb{C}^n$ considéré comme algèbre sur l'anneau local de y ; d'ailleurs, la complétée de cette algèbre est isomorphe à l'algèbre des séries formelles en n indéterminées sur le complété de l'anneau de base $\mathscr{O}_x$. C'est ce qui conduit à poser la définition qui suit.

Définition 1.1 *Soit* $u\colon A \to B$ *un homomorphisme local d'anneaux locaux (noethériens, on le rappelle). On suppose* $\kappa(B)$ *fini sur* $\kappa(A)$. *On dit que* u *est un* homomorphisme formellement lisse, *ou que l'alèbre* B *est* formellement lisse sur A, *s'il existe une* $\overline{A}$*-algèbre locale finie, libre sur* $\overline{A}$*, telle que les composants locaux de l'anneau semi-local* $\overline{B} \otimes_{\overline{A}} A' = B'$ *soient* A'*-isomorphes à des algèbres des séries formelles sur* A' [1].

(On dénote par $\overline{A}$, $\overline{B}$ les anneaux complétés de A, B). Comme B' est fini et libre sur $\overline{B}$, c'est bien un anneau semi-local, composé direct d'anneaux locaux complets, dont chacun est encore un module libre sur $\overline{B}$, donc a même dimension que $\overline{B}$ donc que B. Il s'ensuit que le nombre de variables t_i dans les anneaux de séries formelles envisagés dans 1.1 est égal à
59 $\dim \overline{B} - \dim \overline{A} = \dim B - \dim A$, et en particulier indépendant du composant local choisi. On

[1] Pour une définition plus générale et plus conceptuelle, motiveée par 2.1 ci-dessous, c.f. EGA 0_{IV} 19.3.1.

voit tout de suite que c'est aussi la dimension de l'anneau $B \otimes k = B/\mathfrak{m}B$, où $k = A/\mathfrak{m}$ est le
part 12 corps résiduel de A ; on l'appellera la *dimension relative de B par rapport à A*.

Remarques 1.2 Il est évident que la définition 1.1 ne dépend que de l'homomorphisme sur les complétés $\overline{A} \to \overline{B}$ déduit de $A \to B$, ce qui justifie dans une certaine mesure la terminologie. Nous nous repentons ici de la définition 3.2 b) et 4.1 b), qui risque d'induire en erreur, et préférons dire "formellement non ramifié" et "formellement étale" dans les cas envisagés dans ces définitions, réservant la terminologie "non ramifiée" et "étale" au cas où B est localisée d'une A-algèbre de type fini [2]. Le lecteur vérifiera aussitôt que "formellement étale" équivaut à "formellement lisse et quasi-fini". Enfin, signalons qu'il y a une définition raisonnable de "formellement lisse" sans aucune hypothèse préalable sur l'extension résiduelle $\kappa(B)/\kappa(A)$ (supposée ici finie), englobant entre autres les homomorphismes locaux $A \to B$ tels que B soit *plat* sur A et $B/\mathfrak{m}B$ une *extension séparable* de $A/\mathfrak{m} = k$ (pas nécessairement de type fini) ; par exemple, un p-anneau de Cohen est formellement simple sur l'anneau des entiers p-adiques. C'est la propriété de relèvement des homomorphismes (comparer 2.1) qui doit devenir définition dans ce cas général. Pour les applications que nous avons en vue, le cas traité dans la définition 1.1 nous suffira ; par la suite, dans "formellement lisse" nous sous-entendrons "à extension résiduelle finie".

Lemme 1.3 *Si B est formellement lisse sur A, B est plat sur A.*

Comme la platitude est invariante par complétion, on peut supposer A et B complets. Comme la platitude est invariante par extension plate locale (donc fidèlement plate) de l'anneau de base, on est ramené en vertu de définition 1.1 au cas où B est une algèbre de séries formelles sur A. Mais alors en tant que A-module, B est isomorphe à un produit de A-modules isomorphes à A, donc (l'anneau de base A étant noethérien) est A-plat comme produit de A-modules plats.

60 Mettons-nous sous les conditions de 1.1. Comme les extensions résiduelles des composants locaux de B' sur A' sont triviales, il s'ensuit que $L \otimes_k k'$ est une k'-algèbre artinienne dont les composants locaux ont des extensions résiduelles triviales (où L, k, k' sont les corps résiduels de A, B, A'). Cette condition nécessaire pour que l'extension finie libre A' satisfasse la condition énoncée dans 1.1 est aussi suffisante, comme il résulte aussitôt de 1.4 (i) et 1.5 ci-dessous.

Proposition 1.4 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux, à extension résiduelle finie soit A' une A-algèbre finie locale sur A, de sorte que $B' = B \otimes_A A'$ est finie sur B, donc un anneau semi-local également noethérien.* (i) *Si B est formellement lisse sur A, alors les localisés de B en ses idéaux maximaux sont formellement lisse sur A'.* (ii) *La réciproque est vraie si A' est libre sur A.*

On est aussitôt ramené au cas où A, B sont complets.

(i) Soit A'' une extension finie libre locale de A telle que les composants locaux de $B'' = B \otimes_A A''$ soient des algèbres de séries formelles sur A''. Faisant l'extension des scalaires $A'' \to A'' \otimes_A A' \to A'''$, où A''' est un composant local de $A'' \otimes_A A'$, on voit que les

[2] Ou mieux, "essentiellement non ramifié" resp. "essentiellement non étale", comparer EGA IV 18.6.1.

composants locaux de $B'' \otimes_{A''} A''' = B \otimes_A A'''$ sont des algèbres de séries formelles sur A'''. Or on a aussi $B \otimes_A A''' = (B \otimes_A A') \otimes_{A'} A''' = B \otimes_{A'} A'''$, d'autre part comme A'' est libre sur A, $A'' \otimes_A A'$ est libre sur A' et il en est de même par suite de A''' qui en est facteur direct, ce qui prouve que B' est formellement lisse sur A'.

(ii) Soit A'' une A'-algèbre finie libre locale telle que les composants locaux de $B' \otimes_{A'} A'' = B \otimes_A A''$ soient des algèbres de séries formelles sur A''. Comme A' est libre sur A, A'' l'est aussi, donc B est formellement *lisse* sur A.

Proposition 1.5 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux, à extension résiduelle* triviale. *Pour que B soit formellement lisse sur A, il faut et il suffit que $\overline{B}$ soit isomorphe à une algèbre de séries formelles sur $\overline{A}$.*

Il n'y a à prouver que la nécessité, et on peut supposer A et B complets. Soit $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{n}$) l'idéal maximal de A (B) et soient $t_1, \ldots, t_n$ des éléments de $\mathfrak{n}$ qui définissent une base de l'espace vectoriel

$$(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) \,/\, \mathrm{Im}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B)$$

Ces éléments définissent donc un homomorphisme de A-algèbres locales

$$B_1 = A[[t_1, \ldots, t_n]] \to B$$

61 prouvons que c'est un isomorphisme. Il suffit de prouver que pour toute puissance $\mathfrak{m}^q$ de $\mathfrak{m}$, on obtient un isomorphisme en réduisant $\mod \mathfrak{m}^q$ (puisque B_1 et B sont les limites projectives des anneaux correspondants réduits $\mod \mathfrak{m}^q$, q variable). Comme B et B_1 sont des A-modules plats donc les gradués associés à la filtration $\mathfrak{m}$-adique s'obtiennent en tensorisant par $\mathrm{gr}(A)$, sur $k = A/\mathfrak{m}$, les anneaux $B_1/\mathfrak{m}B_1$ resp. $B/\mathfrak{m}B$, on est ramené à montrer que $B_1/\mathfrak{m}B_1 \to B/\mathfrak{m}B$ est un isomorphisme. Compte tenu de 1.3, on est ainsi ramené au cas où A est un *corps* k. D'autre part, si A' est A-algèbre finie libre locale telle que $B \otimes_A A'$ soit une algèbre de séries formelles sur A' (N.B. cette algèbre est locale, puisque l'extension résiduelle de B sur A est triviale), pour prouver que $B_1 \to B$ est un isomorphisme, il suffit de prouver que $B_1 \otimes_A A' \to B \otimes_A A'$ l'est. Cela nous ramène au cas où B est déjà une algèbre de séries formelles (il fallait commencer par cette réduction, avant de se ramener au cas d'un corps de base). Mais alors B est un anneau local régulier à corps de représentants k, et il est bien connu (et immédiat par considération des gradués associés à la filtration $\mathfrak{n}_1$-adique et $\mathfrak{n}$-adique sur B_1 et B) que $B_1 \to B$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1.6 *Si B est formellement lisse sur A, alors il existe une A-algèbre finie locale A' telle que les composants locaux de $\overline{B} \otimes_{\overline{A}} \overline{A}' = \overline{(B \otimes_A A')}$ soient isomorphes à des algèbres de séries formelles sur $\overline{A'}$.*

En effet, si L/k est l'extension résiduelle de B/A, on considère une extension k'/k, telle que les extensions résiduelles dans la k'-algèbre $L \otimes_k k'$ soient triviales. Soit A' une algèbre finie libre sur A telle que $A'/\mathfrak{m}A' = k'$ (on sait qu'il en existe, par exemple en se ramenant de proche en proche au cas où k'/k est monogène, et alors on relève dans A les coefficients du polynôme minimal d'un générateur de k' sur k). Elle est locale. Alors $B \otimes_A A'$ a en ses idéaux maximaux des extensions résiduelles triviales au-dessus de celle k' de A', et on achève à l'aide de 1.5.

Corollaire 1.7 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux. Pour que B soit formellement lisse sur A, il faut et il suffit que B soit plat sur A et que $B/B\mathfrak{m}B$ soit formellement lisse sur $k = A/\mathfrak{m}$.*

Faisant une extension finie libre locale A' convenable de A et utilisant 1.4 (ii), on est ramené au
62 cas où l'extesion résiduelle de B/A est triviale. On sait d'ailleurs par 1.4 (i) et 1.3 que les conditions énoncées sont nécessaires. Pour la suffisance, il suffit de remarquer que la démonstration de 1.5 prouve, sous les hypothèses faites ici, que B est une algèbre de séries formelles sur A (supposant A et B complets, ce qui est loisible).

Remarque 1.8 Il ne serait pas difficile de développer, pour les homomorphismes formellement lisses, l'analogue de toutes les propriétés des morphismes lisses, étudiées dans II. Pour les propriétés différentielles, cela demande cependant une modification de la définition habituelle des différentielles de Kähler (cf. 1), les produits tensoriels complétés remplaçant les produits tensoriels ordinaires. Nous nous contentons d'évoquer ici ces abîmes, ce qui précède étant suffisant pour notre propos.

Il reste à faire le lien entre la lissité formelle, et la notion de lissité développée dans II (et dont nous n'avons encore fait nul usage) :

Proposition 1.9 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local, B éntant localisée d'une A-algèbre de type fini. Pour que B soit lisse sur A, il faut et il suffit qu'il soit formellement lisse sur A.*

Utilisant 1.7 et 2.1, on est ramené au cas où A est un corps.

Utilisant 1.4 (ii) et 4.13 une extension convenable k' de k nous ramène au cas où l'extension résiduelle pour B/k est triviale. En vertu de 1.5 (resp. 5.2) B est alors lisse sur k (resp. formellement *lisse sur* k) si et seulement si B est un anneau local régulier (resp. son complété est une algèbre de séries formelles sur k). Or il est bien connu que ces deux conditions sont équivalentes
part 13 (l'extension résiduelle étant triviale).

2 Propriété de relèvement caractéristique des homomorphismes formellement lisses

Théorème 2.1 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux définissant une extension*
63 *sion résiduelle finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) B est formellement lisse sur A

(ii) *Pour tout homomorphisme local $A \to C$, où C est un anneau local* complet, *tout idéal J de C contenu dans $r(C)$, et tout A-homomorphisme local $B \to C/J$, il existe un A-homomorphisme (nécessairement local) $B \to C$ qui le relève.*

(iii) *Pour toute A-algèbre C (pas nécessairement un anneau noethérien) tout idéal nilpotent J de C, et tout A-homomorphisme $B \to C$ continu (i.e. s'annulant sur une puissance de $r(B)$), il existe un A-homomorphisme $B \to C$ (nécessairement continu lui aussi) qui le relève.*

(iv) *Même énoncé que (ii) et (iii), mais C étant un anneau local artinien, fini au-dessus de A.*

(iv bis) *Comme (iv), mais J étant de plus de carré nul.*

Remarque. Pour la suite de cet exposé, nous nous servirons seulement de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) ou (iv bis) $\Rightarrow$ (i) ; l'implication directe (i) $\Rightarrow$ (ii) sera prouvée par une autre méthode au n° suivant lorsque B est localisée d'une algèbre de type fini sur A. Rappelons que dans la “bonne” théorie des théorèmes de Cohen[3], la propriété (ii) ou (iii) devient la définition des homomorphismes formellement lisses, alors que 1.1 devient une propriété caractéristique valable seulement dans le cas d'une extension résiduelle finie. On fera attention que des propiétés (ii) et (iii) aucune n'est plus générale que l'autre. On pourrait donner une propriété (équivalente) qui les coiffe toutes deux, en introduisant un anneau linéairement topologisé C, *séparé* et *complet*, un idéal *fermé topologiquement nilpotent* de C, et un homomorphisme continu $A \to C$ (faisant donc de C une A-algèbre topologique) ; nous laisserons cette modification au lecteur.

Démonstration de 2.1. Nous prouverons (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii), puis (iv) $\Rightarrow$ (i). Comme (ii) $\Rightarrow$ (iv) est trivial, et l'equivalence de (iv) et (iv bis) se voit par une récurence immédiate sur l'entier n tel que $J^n = 0$, cela achèvera la démostration.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Une récurrence immédiate nous ramène au cas où $J^2 = 0$. Comme C est fini sur A, il existe une puissance $\mathfrak{m}^q$ de l'ideal maximal de A qui annule C. Divisant par $\mathfrak{m}^q$, et notant
64 que $B/\mathfrak{m}^q B$ est encore formellement lisse sur $A/\mathfrak{m}^q$ par 1.4 (i), on peut supposer A artinien. Comme B est plat sur A par 1.3, B *est libre sur* A puisque A es artinien. Donc il existe un *homomorphisme de A-modules*

$$w\colon B \to C$$

qui relève l'homomorphisme donné $u\colon B \to C/J$. Posons

$$f(xy) = w(xy) - w(x)w(y) \qquad (x, y \in B)$$

alors $f(x, y) \in J$, et f est donc une application A-bilinéaire de $B \times B$ dans J. Pour qu'il existe un relèvement $v\colon B \to C$ de u qui soit un homomorphisme d'algèbres, il faut et il suffit qu'il existe une application A-linéaire $g\colon B \to J$ telle que $v = w + g$ soit un homomorphisme d'algèbres, ce qui s'ecrit

$$g(1) = 1 - w(1)$$
$$g(x, y) - u(x)g(y) - u(y)g(x) = -f(x, y) \qquad (\text{pour } x, y \in B)$$

[3]Cf. EGA 0_{IV} 19.3, 19.8

C'est là un système d'equations *linéaires* dans $\mathrm{Hom}_A(B, J)$, à seconds membres dans J, donc il a une solution si et seulement si le système correspondant dans $\mathrm{Hom}_A(B, J) \otimes_A A'$, à seconds membres dans $J' = J \otimes_A A'$, a une solution, — A' dèsignant une algèbre fidèlement plate sur A. Or soit A' une algèbre finie et libre sur A, locale, telle que $B' = B \otimes_A A'$ soit une algèbre de séries formelles sur A' (N.B. on peut dans notre démonstration supposer A et B complets, comme on constate aussitôt). Comme A' est libre de type fini sur A, on a

$$\mathrm{Hom}_A(B, J) \otimes_A A' = \mathrm{Hom}_{A'}(B', J')$$

et on constate que le système d'équations obtenu dans $\mathrm{Hom}_{A'}(B', J')$ est celui qui détermine les homomorphismes de A'-algèbres $B' \to C' = C \otimes_A A'$ qui relèvent l'homomorphisme $u' \colon B' \to C'/J'$ déduit de u par extension des scalaires en "corrigeant" par un homomorphisme de A'-modules $g' \colon B' \to J'$ l'homomorphisme de A'-modules $w' \colon B' \to C'$ déduit de w par extension des scalaires. (Noter que B engendre B' comme A'-module). On est ainsi ramené à prouver (iii) lorsque B est une *algèbre de séries formelles* sur A, $B = A[[t_1, \ldots, t_n]]$. Relevons alors de façon quelconque les images dans C/J des t_i en des éléments z_i de C. Comme les z_i $\bmod J$ sont nilpotents ($u \colon B \to C/J$ étant continu) il en est de même des z_i (puisque J est nilpotent), donc les z_i définissent un homomorphisme continu de A-algèbres topologiques de B dans C discret, relevant évidemment u, cqfd.

65 (iii) ⇒ (ii). Soit $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de C, et pour tout entier $q > 0$, soit

$$C_q = C/\mathfrak{n}^q \quad , \quad J_q = (J + \mathfrak{n}^q)/\mathfrak{n}^q$$

donc C_q/J_q s'identifie à une algèbre quotient de C/J, d'autre part l'homomorphisme composé $u_q \colon B \to C/J \to C_q/J_q$ est continu de B dans C_q/J_q discret, et J_q est un idéal nilpotent dans C_q. On construit alors de proche en proche des A-homomorphismes

$$v_q \colon B \to C_q$$

tels que (a) v_q relève u_q et (b) v_q relève v_{q-1}. La possibilité de la récurrence se vérifie aisément, car comme

$$u_q \colon B \to C/(J + \mathfrak{n}^q) \quad \text{et} \quad v_{q-1} \colon B \to C/\mathfrak{n}^{q-1}$$

définissent le même homomorphisme

$$B \to C/((J + \mathfrak{n}^q) + \mathfrak{n}^{q-1}) = C/(J + \mathfrak{n}^{q-1}) = C_{q-1}/J_{q-1}$$

à savoir u_{q-1}, ils définissent un homomorphisme

$$B \to C/J'_q \quad \text{où} \quad J'_q = (J + \mathfrak{n}^q) \cap \mathfrak{n}^{q-1} \supset \mathfrak{n}^q$$

(dont ils proviennent l'un et l'autre par réduction). On est donc ramené à relever un homomorphisme $B \to C/J'_q$ de B dans un quotient de C_q par un idéal $J'_q/\mathfrak{n}^q$ contenu dans J_q, donc nilpotent, et cela est possible d'après l'hypothèse (iii).

Ceci fait, les v_q définissent un homomorphisme de B dans la limite projective C des C_q. Comme J est fermé, J est la limite projective des J_q, donc v relève u, cqfd.

(iv) $\Rightarrow$ (i). On constate d'abord aussitôt que si (iv) est vérifié, (iv) reste vérifié pour las composants locaux de $B \otimes_A A'$ sur A', si A' est une algèbre locale finie sur A. Prenant A' libre sur A et telle que les extensions résiduelles de B' au-dessus de A' soient triviales, on est ramené grâce à 1.4 (ii) au cas où la extension résiduelle de B sur A est triviale. Nous allons prouver alors le résultat un peu précis :

Corollaire 2.2 *Sous les conditions de 2.1, supposons de plus l'extension résiduelle de B au-*
66 *dessus de A triviale. Alors les conditions équivalentes de 2.1 équivalent aussi aux deux conditions suivantes (en supposant dans (v) A* et *B complets) :*

(iv ter) Comme (iv), mais l'anneau local artinien C fini sur A étant restreint à avoir une extension résiduelle triviale (et de plus, si on y tient, l'idéal J étant de carré nul).

(v) Il existe un A-homomorphisme local (où $n = \dim \mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B)$)

$$u\colon B \to B_1 = A[[t_1, \dots, t_n]]$$

induisant un isomorphisme

$$\mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{n}_1/(\mathfrak{n}_1^2 + \mathfrak{m}B_1)$$

où $\mathfrak{n}$ ($\mathfrak{n}_1$) est l'idéal maximal de B (B_1), $\mathfrak{m}$ celui de A.

Démonstration. Comme (iv bis) implique évidemment (iv ter) — en faisant abstraction du canular de l'idéal de carré nul—, il suffira de prouver (iv ter) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i).

(iv ter) $\Rightarrow$ (v). Choisissons une base $a_1 \dots a_n$ de $\mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B)$, ce qui définit donc un homomorphisme local de A-algèbres

$$B \to B_1/(\mathfrak{n}_1^2 + \mathfrak{m}B_1) = k[t_1, \dots, t_n]/(t_1, \dots, t_n)^2$$

qu'on peut relever de proche en proche, en vertu de (iv ter) en des homomorphismes de A-algèbres de B dans $B_1/\mathfrak{n}_1^2$, $B_1/\mathfrak{n}_1^3$ etc, d'où en passant à la limite projective l'homomorphisme $B \to B_1$ ayant la propriété voulue.

(v) $\Rightarrow$ (i). Comme dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] & \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] & \mathfrak{n}_1/\mathfrak{n}_1^2 \arrow[r] & \mathfrak{n}_1/(\mathfrak{n}_1^2 + \mathfrak{m}B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

les deux lignes sont exactes, et les flêches verticales extrêmes surjectives, la flêche médiane est surjective et il s'ensuit (B étant complet) que $B \to B_1$ est *surjectif*. Soient x_i ($1 \leq i \leq n$) des éléments de B qui relèvent les t_i. Ils définissent donc un homomorphisme de A-algèbre

$B_1 \to B$, qui sera surjectif pour la même raison que u, et donc la composé avec u est l'identité par construction. Donc $B_1 \to B$ est aussi injectif, et est par suite un isomorphisme. On trouve
67 donc

Corollaire 2.3 *Sous les conditions de 2.2 (v), u est nécessairement un isomorphisme.*

Cela achève de prouver que B est formellement lisse sur A. On a d'ailleurs en même temps retrouvé 1.5 (mais il n'y a guère de mérite à ça).

3 Prolongement infinitésimal local des morphismes dans un S-schéma lisse

Théorème 3.1 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme localement de type fini. Conditions équivalentes :*

(i) f est lisse

(ii) Pour tout préschéma Y' sur Y, tout sous-préschéma fermé Y'_0 de Y' ayant même espace sous-jacent que Y', tout Y-morphisme $g_0\colon Y'_0 \to X$ et tout $z \in Y'_0$, il existe un voisinage ouvert U de z dans Y' et un prolongement g de $g_0|Y'_0 \cap U$ en un Y-morphisme $U \to X$.

(ii bis) Pur Y', Y'_0 et z comme dans (ii), *posant $X' = X \times_Y Y'$, $X'_0 = X \times_Y Y'_0$, toute section de X'_0 sur Y'_0 se prolonge en une section de X' au-dessus d'un voisinage ouvert U de z.*

(iii) Pour tout Y-schema Y', spectre d'un anneau artinien local fini sur quelque $\mathscr{O}_y$ ($y \in Y$), tout sous-préschéma fermé non vide Y'_0 de Y', et tout Y-morphisme $g_0\colon Y'_0 \to X$, il existe un Y-morphisme $g\colon Y' \to X$ qui prolonge g_0.

(iii bis) Pour tout Y', Y'_0 comme dans (iii), *posant $X' = X \times_Y Y'$, $X'_0 = X \times_Y Y'_0$, toute section de X'_0 sur Y'_0 se prolonge en une section de X' sur Y'.*

Demonstration. L'équivalence de (ii) et (ii bis) d'une part, de (iii) et (iii bis) d'autre part, est triviale, ainsi que l'implication (ii) ⇒ (iii). Il reste donc à prouver (i) ⇒ (ii) et (iii) ⇒ (i).

(i) ⇒ (ii). Soit $x = g_0(z)$. Remplaçant X par un voisinage ouvert convenable de x, et Y' par le préschéma induit sur l'ouvert image réciproque de ce dernier par g_0, on peut supposer que X est étale au-dessus de $Y[t_1, \dots, t_n]$. Considérons le Y-morphisme composé $Y'_0 \to X \to Y[t_1, \dots, t_n]$, il est défini par n sections du faisceau $\mathscr{O}_{Y'_0}$, qui peuvent donc se
68 prolonger au voisinage de z en des sections de $\mathscr{O}_{Y'}$, donc on peut supposer que le morphisme en question a été prolongé en un Y-morphisme $Y' \to Y'_0$. En vertu de (5.6) il existe alors un unique Y-morphisme $g\colon Y' \to X$ qui relève le précédent, et prolonge en même temps g_0, cqfd.

(iii) ⇒ (i). Comme l'ensemble des points où f est lisse est ouvert, il suffit de prouver qu'il contient tout $x \in X$ qui est *fermé* dans sa fibre. Soit $y = f(x)$, alors $\mathscr{O}_x$ est une algèbre sur $\mathscr{O}_y$, localisée d'une algèbre de type fini, à extension résiduelle finie. D'autre part, l'hypothese (iii) implique que tout homomorphisme de $\mathscr{O}_x$ dans una algèbre A/J, où A est une algèbre artinienne

locale finie sur $\mathscr{O}_y$, et J un idéal contenu dans son radical, se relève en un homomorphisme de $\mathscr{O}_x$ dans l'algèbre A (compte tenu qu'un morphisme d'un $\operatorname{Spec}(B)$, B anneau local, dans X est déterminé biunivoquement par un homomorphisme local d'un $\mathscr{O}_x$ ($x \in X$) dans B). Par 2.1 il
part 14 s'ensuit que $\mathscr{O}_x$ est formellement lisse sur $\mathscr{O}_y$, donc lisse sur $\mathscr{O}_y$ en vertu de 1.9.

Corollaire 3.2 *Soit $f\colon X \to Y$ comme dans 3.1. Conditions équivalentes :*

(i) f est étale

(ii) On a la condition (ii) de 3.1 avec unicité *du prolongement g de g_0 à U.*

(iii) On a la condition (iii) de 3.1 avec unicité *de g.*

Il suffit de noter, dans la démonstration de (i)⇒(ii) ci-dessus, qu'on ne peut avoir unicité (quand Y_0' n'est pas identique à Y' au voisinage de z) que si $n = 0$ (condition qu'on sait être suffisante).

Corollaire 3.3 *Soit X un préschéma localement de type fini sur un anneau local* complet *A, y le point fermé de $Y = \operatorname{Spec}(A)$ et x un point de $f^{-1}(y)$* rationnel *sur $\kappa(y)$. Si X est* lisse *sur A* en *x, alors il existe une section s de X sur Y "passant par x" i.e. telle que $s(y) = x$.*

En particulier, si X est lisse sur A, alors l'application naturelle

$$\Gamma(X/Y) \to \Gamma(X \otimes_A k/k)$$

des sections de X sur Y dans l'ensemble des points de la fibre $f^{-1}(y) = X \otimes_A k$ rationnels sur k, est surjective. Ce fait était surtout bien connu et utilisé lorsque A est un anneau de valuation
69 discrète et X est propre sur A (en fait, projectif sur A), auquel cas les sections de X sur Y (i.e. les "points de X à valeurs dans A") s'identifient aussi aux sections rationnelles, i.e. aux points de $X \otimes_A K = X_K$ (qui est un schéma propre et simple sur K) à valeurs dans $K =$ corps des fractions de A i.e. aux points de X rationnels sur K.

4 Prolongement infinitésimal local des S-schémas lisses

Théorème 4.1 *Soient Y un préschéma localement noethérien, Y_0 un sous-préschéma fermé ayant même espace sous-jacent, X_0 un Y_0-préschéma lisse, x un point de X_0. Alors il existe un voisinage ouvert U_0 de x, un préschéma X lisse sur Y, et un Y_0-isomorphisme :*

$$h\colon U_0 \xrightarrow{\sim} X \times_Y Y_0.$$

De plus, si (U_0', X', h') est une autre solution de ce problème, alors "elle est isomorphe à la première au voisinage de x".

On laisse au lecteur de préciser ce qu'on veut dire par là. On peut noter que pour U_0 donné, une solution du Pb posé revient à la donnée, sur U_0, d'un faisceau d'algèbres $\mathscr{B}$ sur $f_0^{-1}(\mathscr{O}_Y)$

(où f_0 est l'application continue sous-jacente au morphisme structural $U_0 \to Y_0$), muni d'un homomorphisme d'anneaux $\mathscr{B} \to \mathscr{O}_{U_0}$ compatible avec l'homomorphisme $f^{-1}(\mathscr{O}_Y) \to f^{-1}(\mathscr{O}_{Y_0})$, tels que

(a) cet homomorphisme induit un isomorphisme

$$\mathscr{B} \otimes_{f^{-1}(\mathscr{O}_Y)} f^{-1}(\mathscr{O}_{Y_0}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{Y_0};$$

(b) U_0 muni de $\mathscr{B}$ devient un Y-préschéma lisse.

De cette façon, le sens précis de l'assertion d'unicité locale devient particulièrement évident.

Démonstration. On peut supposer déjà que X_0 est étale sur un $Y_0[t_1, \ldots, t_n] = Y'_0$. Or ce dernier peut être considéré comme un sous-préschéma fermé de $Y' = Y[t_1, \ldots, t_n]$, ayant même espace sous-jacent. Par (I 8.3), il existe un X étale sur Y', et un Y'_0-isomorphisme $X \times_{Y'} Y'_0 \xrightarrow{\sim} X'$.
70 On a gagné pour l'existence. Pour l'unicité, on utilise la propriété 3.1 (ii) des morphismes lisses, en tenant compte du

Lemme 4.2 *Soient Y un préschéma, Y_0 un sous-préschéma fermé défini par un faisceau d'idéaux $\mathscr{J}$ localement nilpotent, X et X' des Y-préschémas, $u\colon X \to X'$ un Y-morphisme. On suppose X plat sur Y. Pour que u soit un isomorphisme, il faut et suffit que $u_0\colon X \times_Y Y_0 \to X' \times_Y Y_0$ le soit.*

Démonstration facile, en passant au cas affine et regardant les gradués associés. On notera d'ailleurs que l'énoncé analogue, obtenu en remplaçant "isomorphisme" par "immersion fermée", est également valable, et sans hypothèse de platitude.

Remarque 4.3 Il est essentiel de noter que le prolongement local X obtenu dans 4.1 *n'est pas canonique*, en d'autres termes l'isomorphisme local entre deux solutions n'est pas unique, i.e. il existe en général des Y-automorphismes non triviaux de X induisant l'identité sur le sous-préschéma fermé $X_0 = X \times_Y Y_0$. C'est pour cela qu'il faut s'attendre, pour la construction de prolongements infinitésimaux *globaux* de préschémas simples, à l'existence d'une obstruction de nature cohomologique, qui sera précisée plus bas (n^{o} 6).

5 Prolongement infinitésimal global des morphismes

Soient T un espace topologique, $\mathscr{G}$ un faisceau de groupes sur X, P un faisceau d'ensembles sur T sur lequel $\mathscr{G}$ opère (à droite, pour fixer les idées). On dit que $\mathscr{P}$ est *formellement principal homogène* sous $\mathscr{G}$, si l'homomorphisme bien connu

$$\mathscr{G} \times \mathscr{P} \to \mathscr{P} \times \mathscr{P}$$

de faisceaux d'ensembles, déduit des opérations de $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{P}$, est un *isomorphisme*. Il revient au même de dire que pour tout $x \in T$, $\mathscr{P}_x$ est *vide ou un espace principal homogène* sous le

groupe ordinaire $\mathscr{G}_x$, ou aussi que pour tout ouvert U de T, $\mathscr{P}(U)$ est vide ou un espace principal homogène sous le groupe ordinaire $\mathscr{G}(U)$. On dit que P est un *faisceau principal homogène* sous G s'il l'est formellement et si en plus les $\mathscr{P}_x$ sont non vides (en d'autres termes, si *tous* les
71 $\mathscr{P}_x$ sont des espaces principaux homogènes, donc non vides, sous les $\mathscr{G}_x$)[4]. Rappelons que l'ensemble des classes (à isomorphisme près) de faisceaux principaux homogènes sous $\mathscr{G}$ s'identifie à l'ensemble de cohomologie $\mathrm{H}^1(T, \mathscr{G})$, qui est aussi le groupe de cohomologie usuel de T à coefficients dans $\mathscr{G}$ lorsque $\mathscr{G}$ est commutatif. On a ainsi, pour tout $\mathscr{P}$ principal homogène, une classe caractéristique $c(\mathscr{P}) \in \mathrm{H}^1(T, \mathscr{G})$, dont la trivialité est nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{P}$ soit trivial (i.e. isomorphe à $\mathscr{G}$, sur lequel $\mathscr{G}$ opère par translations à droite), ou encore pour que $\mathscr{P}$ ait une section.

Proposition 5.1 *Soient S un préschéma, X et Y des préschémas sur S, Y_0 un sous-préschéma fermé de Y défini par un Idéal $\mathscr{J}$ sur Y* de carré nul. *Soit g_0 un S-morphisme de Y_0 dans X, et $\mathscr{P}(g_0)$ le faisceau sur Y dont les sections sur un ouvert U sont les prolongements $g\colon U \to X$ de $g_0|U \cap Y_0$ en un S-morphisme g. Alors $\mathscr{P}(g_0)$ est un faisceau* formellement principal homogène *(de façon naturelle) sous le faisceau en groupes commutatif*

$$\mathscr{G} = \mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega^1_{X/S}), \mathscr{J})$$

Posons $\mathscr{P} = \mathscr{P}(g_0)$. Nous devons définir pour tout ouvert U de Y une application

$$\mathscr{P}(U) \times \mathscr{G}(U) \to \mathscr{P}(U)$$

de façon que (a) pour $g \in \mathscr{P}(U)$ fixé, l'application $s \mapsto gs$ de $\mathscr{G}(U)$ dans $\mathscr{P}(U)$ est bijective (b) $\mathscr{P}(U)$ devient un ensemble à groupe d'opérateurs $\mathscr{G}(U)$ (c) les applications précédentes sont compatibles avec les opérateurs de restriction pour un ouvert $V \subset U$. La vérification de (c) sera triviale, on peut donc pour simplifier supposer $U = Y$. La vérification de (b) (qui est, si on veut, de nature locale) sera laissée au lecteur, nous nous bornerons donc, pour un $g \in \mathscr{P}(Y)$ donné, de définir une bijection naturelle de $\mathscr{G}(Y)$ sur $\mathscr{P}(Y)$. Donc on suppose donné déjà un S-morphisme $g\colon X \to Y$, et on cherche une bijection canonique

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega^1_{X/S}), \mathscr{J}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}(Y)$$

où $\mathscr{P}(Y)$ est l'ensemble des S-morphismes g' de Y dans X induisant le même morphisme $g_0\colon Y_0 \to X$ que g. La donnée d'un tel g' est équivalente à la donnée d'un S-morphisme
72 $h\colon Y \to X \times_S X$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ h = g$, et $h \circ i = (g_0, g_0)$, où $\mathrm{pr}_1 \colon X \times_S X$ est la première projection, $i\colon Y_0 \to Y$ l'immersion canonique, et $(g_0, g_0)\colon Y_0 \to X \times_S X$ est le morphisme $\Delta_{X/S}g_0$ de composante g_0, g_0 :

$$\begin{tikzcd}
X \times_S X \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & Y_0 \arrow[l, "h_0=(g_0,g_0)"'] \arrow[d, "i"] \\
X & Y \arrow[l, "g"] \arrow[ul, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

[4]Il semble préférable d'adopter le terme plus court et plus parlant de "*torseur sous G*", introduit dans la thèse de J. GIRAUD.

Comme h_0 se factorise par l'immersion diagonale $\Delta_{X/S}$ et que Y est dans le voisinage infinitésimal d'ordre 1 de Y_0 (i.e.$\mathscr{J}^2 = 0$) les h cherchés se factorisent nécessairement (de façon unique) par le voisinage infinitésimal du premier ordre de la diagonale, lequel s'identifie (en tant que X-préschéma grâce à pr_1) au spectre X' du faisceau d'algèbres $\mathscr{O}_X + \Omega^1_{X/S}$ (où le deuxième terme est considéré comme un Idéal de carré nul), le morphisme diagonal $X \to X'$ correspondant à l'augmentation canonique de ce faisceau d'algèbres. Posons $Y' = X' \times_X Y$, $Y'_0 = Y' \times_Y Y_0 = X' \times_X Y_0$, de sorte que les h cherchés sont en correspondance biunivoque avec les sections u de Y' sur Y qui prolongent une section donnée u_0 de Y'_0 sur Y_0. On peut d'ailleurs identifier Y' au spectre du faisceau d'algèbres sur Y $\mathscr{A} = g^*(\mathscr{O}_X + \Omega^1_{X/S}) = \mathscr{O}_Y + g^*(\Omega^1_{X/S})$, et Y'_0 au faisceau d'algèbres $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y_0} = \mathscr{O}_{Y_0} + g_0^*(\Omega^1_{X/S})$, alors la section u_0 est celle définie par l'augmentation canonique de A_0 dans $\mathscr{O}_{Y_0}$. Donc $\mathscr{P}(Y)$ s'identifie à l'ensemble des homomorphismes d'algèbres $\mathscr{A} \to \mathscr{O}_Y$ qui induisent l'augmentation canonique $\mathscr{A}_0 \to \mathscr{O}_{Y_0}$. Or les homomorphismes d'algèbres $\mathscr{A} \to \mathscr{O}_Y$ correspondant biunivoquement aux homomorphismes de Modules $\mathscr{M} \to \mathscr{A}$ (posant pour simplifier $\mathscr{M} = g^*(\Omega^1_{X/S})$), et on s'intéresse à ceux qui induisent l'homomorphisme *nul* $\mathscr{M}_0 \to \mathscr{O}_{Y_0}$ (où $\mathscr{M}_0 = \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y_0}$) i.e. qui appliquent $\mathscr{M}$ dans l'idéal $\mathscr{J}$ de l'augmentation. On trouve donc l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{M}, \mathscr{J}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(\mathscr{M}_0, \mathscr{J})$ (puisque $\mathscr{J}$ est annulé par $\mathscr{J}$). C'est la bijection canonique cherchée $(*)$.

part 15 Tenant compte de l'implication (i)⇒(iii) dans 3.1, on trouve :

73

Corollaire 5.2 *Si X est lisse sur S (du moins aux points de $g_0(Y_0)$) alors $\mathscr{P}$ est même un* faisceau principal homogène *sous le faisceau en groupes commutatifs $\mathscr{G}$, qui en l'occurrence peut aussi s'écrire*

$$\mathscr{G} = g_0^*(\mathfrak{g}_{X/S}) \otimes_{\mathscr{O}_{Y_0}} \mathscr{J}$$

où $\mathfrak{g}_{X/S}$ est le faisceau sur X dual de $\Omega^1_{X/S}$, i.e. le faisceau tangent *(ou* faisceau des dérivations*) de X par rapport à S. (Cette dernière formule provient du fait que $\Omega^1_{X/S}$ est alors libre de type fini).*

En particulier, à ce faisceau principal homogène correspond une classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^1(Y_0, \mathscr{G})$, dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un S-morphisme g prolongeant g_0. Et s'il existe un tel prolongement, l'ensemble de tous les prolongements possibles est un espace homogène sous le groupe $\mathrm{H}^0(Y_0, \mathscr{G})$.

Dans l'application des méthodes de la géométrie formelle, la situation est le plus souvent la suivante : on donne deux S-préschémas X et Y, un Idéal cohérent $\mathscr{I}$ sur S, on désigne par S_n le sous-préschéma fermé de S défini par $\mathscr{I}^{n+1}$, et on pose

$$X_n = X \times_S S_n \quad , \quad Y_n = Y \times_S S_n.$$

On suppose qu'on a un S_n-morphisme :

$$g_n \colon Y_n \to X_n$$

(ou, ce qui revient au même, un S-morphisme $Y_n \to X$ ou encore un S_{n+1}-morphisme $Y_n \to X_{n+1}$, puisque un tel morphisme induit nécessairement $Y_n \to X_n$), et on cherche à le prolonger en un S_{n+1}-morphisme

$$g_{n+1}\colon Y_{n+1} \to X_{n+1}$$

(Si on peut continuer indéfiniment, on obtient donc un morphisme $\widehat{Y} \to \widehat{X}$ pour les préschémas formels complétés de Y et X pour les Idéaux $\mathscr{I}\mathscr{O}_X$ et $\mathscr{I}\mathscr{O}_Y$). On peut appliquer 5.1 en y remplaçant (S, X, Y, Y_0, g_0) par $(S_{n+1}, X_{n+1}, Y_{n+1}, Y_n, g_n)$, le faisceau $\mathscr{G}$ devient ici le faisceau des homomorphismes de Modules de $g_n^*(\Omega^1_{X_{n+1}/S_{n+1}})$ dans $\mathscr{J} = \mathscr{I}^{n+1}\mathscr{O}_Y/\mathscr{I}^{n+2}\mathscr{O}_Y$.
74 Comme $\mathscr{J}$ est annulé par $\mathscr{I}\mathscr{O}_Y$, on peut remplacer alors $g_n^*(\Omega^1_{X_{n+1}/S_{n+1}})$ par le faisceau qu'il induit sur Y_0, savoir $h_0^*(\Omega^1_{X/S})$, où h_0 est le composé $Y_0 \to Y_n \to X_{n+1}$, ou encore le composé $Y_0 \to X_0 \to X_{n+1}$, où $g_0\colon Y_0 \to X_0$ est induit par g_n. Comme l'image inverse de $\Omega^1_{X_{n+1}/S_{n+1}}$ sur $X_0 = X_{n+1} \times_{S_{n+1}} S_0$ est $\Omega^1_{X_0/S_0}$, on voit qu'on a aussi

$$\mathscr{G} = \mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega^1_{X_0/S_0}), \mathscr{I}^{n+1}\mathscr{O}_Y/\mathscr{I}^{n+2}\mathscr{O}_Y)$$

Donc on obtient le

Corollaire 5.3 *Soient $S, X, Y, \mathscr{I}, g_n$ comme ci-dessus, soit $\mathscr{P}(g_n)$ le faisceau sur Y dont les sections sur un ouvert U sont les prolongements g_{n+1} de g_n en un S_{n+1}-morphisme $Y_{n+1} \to X_{n+1}$. Alors $\mathscr{P}$ est un faisceau formellement principal homogène sous le faisceau en groupes*

$$\mathscr{G} = \mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega^1_{X_0/S_0}), \mathrm{gr}^{n+1}_{\mathscr{I}\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_Y))$$

En particulier :

Corollaire 5.4 *Si de plus X est lisse sur S (du moins aux points de $g_0(Y_0)$) alors $\mathscr{P}$ est même un faisceau principal homogène. En particulier, il définit une classe d'obstruction dans $\mathrm{H}^1(Y_0, \mathscr{G})$, dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un prolongement global g_{n+1} de g_n. Et s'il existe un tel prolongement, l'ensemble de tous les prolongements globaux est un espace principal homogène sous $\mathrm{H}^0(Y_0, \mathscr{G})$. Enfin, dans le cas envisagé, le faisceau $\mathscr{G}$ peut aussi s'écrire*

$$\mathscr{G} = g_0^*(\mathfrak{g}_{X_0/S_0}) \otimes_{\mathscr{O}_{Y_0}} \mathrm{gr}^{n+1}_{\mathscr{I}\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_Y)$$

Procédant de proche en proche, on voit donc que si tous les $\mathrm{H}^1(Y_0, \mathscr{G}_n)$ son nuls (où $\mathscr{G}_n = g_0^*(\mathfrak{g}_{X_0/S_0}) \otimes \mathrm{gr}^n_{\mathscr{I}\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_Y)$), alors partant avec un g_k quelconque, on peut le prolonger successivement en $g_{k+1}, \ldots$. En particulier, si $\mathscr{I}$ est nilpotent, on pourra trouver un prolongement g de g_k à Y. La condition de nullité des H^1 est vérifiée en particulier si Y_0 est affine. On
75 trouve donc :

Corollaire 5.5 *Dans l'énoncé du théorème 3.1, on obtient une condition nécessaire et suffisante équivalente aux autres en supposant que le Y' qui intervient dans (ii) (ou (ii bis)) est affine, et en exigeant l'existence d'un* prolongement global *g de g_0 à tout Y'.*

On notera que la démonstration de 3.1 ne pouvait pas nous donner ce résultat directement.

Un cas important est celui où Y est *plat* sur S, alors on a donc

$$\mathrm{gr}^n(\mathscr{O}_Y) = \mathrm{gr}^n(\mathscr{O}_S) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{Y_0}$$

et lorsque de plus les $\mathrm{gr}^n(\mathscr{O}_S)$ sont *localement libres sur* S, on trouve

$$\mathscr{G}_n = \mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(g_0^*(\Omega^1_{X_0/S_0}), \mathscr{O}_{Y_0}) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathrm{gr}^n(\mathscr{O}_S),$$

ou encore, si $\Omega^1_{X_0/S_0}$ est lui aussi localement libre (par exemple X lisse sur S)

$$\mathscr{G}_n = g_0^*(\mathfrak{g}_{X_0/S_0}) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathrm{gr}^n(\mathscr{O}_S)$$

Si par exemple S est affine d'anneau affine A, $\mathscr{I}$ étant défini par un idéal I de A, on trouve

$$\mathrm{H}^i(Y_0, \mathscr{G}_n) = \mathrm{H}^i(Y_0, \mathscr{G}_0) \otimes_A \mathrm{gr}^n_I(A)$$

pour tout i (en effet, la question est locale sur S_0, et on est ramené au cas où on tensorise par un Module libre). *Dans ce cas, la nullité de* $\mathrm{H}^1(Y_0, \mathscr{G}_0)$ *implique que toutes les obstructions aux prolongements successifs de* g_n *sont nulles*. On obtient donc :

Corollaire 5.6 *Soient* $(S, X, Y, \mathscr{I}, g_n)$ *comme plus haut, supposons de plus* X *lisse sur* S*, enfin* S *affine, et les* $\mathrm{gr}^n(\mathscr{O}_S) = \mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1}$ *localement libres. Alors l'obstruction à construire* g_{n+1} *se trouve dans* $\mathrm{H}^1(Y_0, \mathscr{G}_0) \otimes_A \mathrm{gr}^{n+1}_I(A)$ *(où* A *est l'anneau de* S*,* I *l'idéal de* A *définissant* $\mathscr{I}$*), en posant*

$$\mathscr{G}_0 = g_0^*(\mathfrak{g}_{X_0/S_0})$$

Si $\mathrm{H}^0(Y_0, \mathscr{G}_0) = 0$*, alors* g_n *peut se prolonger en un* $\widehat{S}$*-morphisme* $\widehat{g}\colon \widehat{Y} \to \widehat{X}$*.*

Bien entendu, ce résultat resterait valable tel quel, si on partait, au lieu de S-préschémas
76 ordinaires X et Y, de $\widehat{S}$-préschémas formels $\widehat{\mathscr{I}}$-adiques $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$. Il permet de prouver par exemple que certains schémas formels propres sur un anneau local complet (par exemple) sont en fait algébriques. En effet, procédant comme dans le lemme 4.2, on trouve :

Corollaire 5.7 *Sous les conditions de 5.6, si* g_0 *est un isomorphisme il en est de même de* $\widehat{g}$*.*

(N.B. le même résultat vaut pour les immersions fermées).

On obtient ainsi :

Proposition 5.8 *Soient* A *un anneau local complet d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$*, corps résiduel* k*, soient* $\mathfrak{X}$ *et* $\mathfrak{Y}$ *deux préschémas formels* $\mathfrak{m}$*-adiques sur* A*, plats sur* A *(i.e. pour tout* n*,* X_n *et* Y_n *sont plats sur* $A_n = A/\mathfrak{m}^n$*), on suppose* $X_0 = \mathfrak{X} \otimes_A k$ *lisse sur* k *et* $\mathrm{H}^1(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/k}) = 0$*. Alors tout* k*-isomorphisme de* Y_0 *sur* X_0 *se prolonge en un* A*-isomorphisme de* $\mathfrak{Y}$ *sur* $\mathfrak{X}$ *; ce prolongement est unique si de plus* $\mathrm{H}^0(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/k}) = 0$*.*

Cela donne en particulier un résultat d'*unicité* de préschéma formel lisse sur A se réduisant suivant un préschéma X_0 donné (moyennant $\mathrm{H}^1(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/k}) = 0$). De plus, si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ proviennent de schémas ordinaires propres sur A, soient X et Y, alors on sait d'aprés le théorème d'existence de faisceaux en Géométrie formelle (cf exposé au Séminaire Bourbaki, N° 182 ([5])) qu'il y a correspondance biunivoque entre les A-isomorphismes $Y \xrightarrow{\sim} X$ et le A-isomorphismes des complétés formels, donc

Corollaire 5.9 *L'énoncé précédent 5.1 reste valable en y remplaçant $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ par des A-schémas ordinaires X et Y,* propres *sur A.*

Enfin, lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel propre sur A, et que $\mathfrak{Y}$ est de la forme $\widehat{Y}$ où Y est un schéma ordinaire propre sur A, alors la proposition 5.8 donne des conditions suffisantes pour qu'on puisse trouver un isomorphisme de $\mathfrak{X}$ avec $\widehat{Y}$, donc pour que le schéma formel $\mathfrak{X}$ soit en fait "algébrique" (i.e. isomorphe à un $\widehat{X}$, X un schéma ordinaire propre sur A, lequel sera alors canoniquement déterminé). C'est ce qui à lieu notamment si $X_0 = \mathbb{P}^r_k$ (ou plus généralement,
77 si X_0 est un schéma de Sévéri–Brauer, i.e. devient isomorphe à l'espace projectif type sur la clôture algébrique de k) : tout schéma formel propre et plat sur A, de fibre $\mathbb{P}^r_k$, est algébrisable, et de façon plus précise est isomorphe au complété formel $\mathfrak{m}$-adique de $\mathbb{P}^r_A$. En particulier (grâce au théorème d'existence) tout schéma ordinaire propre sur A, de fibre $\mathbb{P}^r_k$, est isomorphe à $\mathbb{P}^r_A$ (A étant un anneau local complet). Utilisant la théorie de la descente, on peut prouver que si A n'est pas complet, X devient isomorphe à $\mathbb{P}^r$ en faisant une extension $A \to A'$ finie et étale de la base (et sous cette forme, le résultat reste valable pour une fibre qui est un schéma de Sévéri–Brauer).

6 Prolongement infinitésimal global des S-schémas lisses

Sous les conditions du théorème 4.1, on se propose de chercher s'il existe un préschéma X lisse sur Y tel que $X \times_Y Y_0$ soit Y_0-isomorphe à X_0, sachant qu'un tel schéma "existe localement sur X_0". Reprenant la méthode de construction de proche en proche, on est conduit à remplacer Y par la lettre S, à supposer qu'on se donne un sous-préschéma fermé S_0 de S défini par un faisceau d'idéaux $\mathscr{I}$, (qu'il n'est plus nécessaire de supposer localement nilpotent), à introduire les sous-préschémas fermés S_n de S définis par les $\mathscr{I}^{n+1}$, et à supposer qu'on s'est donné un sous-préschéma X_n lisse sur S_n. On se propose de trouver un S_{n+1}-préschéma X_{n+1} "qui se réduit suivant X_n", i.e. muni d'un isomorphisme

$$X_{n+1} \times_{S_{n+1}} S_n \xleftarrow{\sim} X_n$$

qui soit *lisse* sur S_{n+1} (ou, ce qui revient au même par 2.1, *plat* sur S_{n+1}). Comme nous l'avons signalé dans dans N° 4, une telle donnée revient à la donnée d'un faisceau d'algèbres $\mathscr{B}$ sur $f^{-1}(\mathscr{O}_{S_{n+1}})$ (où f est l'application continue sous-jacente au morphisme structural $X_n \to S_n$), muni d'une augmentation $\mathscr{B} \to \mathscr{O}_{X_n}$ compatible avec l'augmentation $f^{-1}(\mathscr{O}_{S_{n+1}}) \to f^{-1}(\mathscr{O}_{S_n})$,

[5]Cf. EGA III 5.4.1 pour la démonstration

et satisfaisant à deux conditions (a) et (b) que nous ne réécrirons pas, nous bornant à noter qu'elles sont de *nature locale* sur l'espace topologique sous-jacent à X_n. On sait d'après 4.1 qu'une solution existe localement. Elle est de plus unique à (non unique) isomorphisme près, du
78 moins localement. Commençons par préciser ce point :

Proposition 6.1 *Soit X_{n+1} sur S_{n+1} se réduisant suivant X_n sur S_n. Alors le faisceau (sur l'espace topologique sous-jacent à X_n, ou encore à X_0) des S_{n+1}-automorphismes de X_{n+1} qui induisent l'identité sur X_n est canoniquement isomorphe à*

$$\mathscr{G} = \mathfrak{g}_{X_0/S_0} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathrm{gr}^{n+1}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_S)$$

(en tant que faisceau de groupes).

En effet, par 5.4 et 4.2 ce faisceau est un faisceau principal homogène sous $\mathscr{G}$. Comme il est muni d'une section privilégiée (l'automorphisme identique de X_{n+1}), il s'identifie donc comme faisceau d'ensembles à $\mathscr{G}$. Il faut vérifier que cette identification est compatible avec les structures de groupe. C'est facile, et d'ailleur un cas particulier d'un résultat plus général sur la compatibilité des structures de fibrés principaux, dans 5.1 et 5.3, avec la composition des morphismes (résultat que nous n'énonçons pas ici, mais qui se doit de figurer dans le hyperplodoque).

En particulier, le faisceau sur X_0 des germes d'automorphismes de X_{n+1} (avec les structures explicitées) est *commutatif*. Il s'ensuit que si X'_{n+1} est une autre solution du problème, isomorphe à X_{n+1} au-dessus de l'ouvert U de X_0, alors l'isomorphisme de $\mathbf{Aut}(X_{n+1})|U$ sur $\mathbf{Aut}(X'_{n+1})|U$ déduit par transport de structure d'un isomorphisme $X_{n+1}|U \xrightarrow{\sim} X'_{n+1}|U$, *ne dépend pas* du choix de ce dernier. (Ce n'est d'ailleur autre que l'isomorphisme identique de $\mathscr{G}$, lorsque on identifie l'un et l'autre faisceau d'automorphismes à $\mathscr{G}$ grâce à 6.1).

part 16 On déduit de 6.1 :

Corollaire 6.2 *Soient X_{n+1}, X'_{n+1} lisses sur S_{n+1} et "se réduisant suivant X_n". Alors le faisceau (sur l'espace sous-jacent à X_0) des S_{n+1}-isomorphismes de X_{n+1} sur X'_{n+1} induisant l'indentité sur X_n, est de façon naturelle un faisceau principal homogène sous $\mathscr{G}$.*

Cela exprime en effet que X_{n+1} et X'_{n+1} sont isomorphes localement, et que le faisceau des germes d'automorphismes du premier est $\mathscr{G}$.

79 Notons maintenant qu'en vertu de 4.1, on peut toujours trouver un recouvrement (U_i) de X_n par des ouverts (qu'on peut supposer affines), et pour tout i un schéma lisse X^i sur S_{n+1} se réduisant suivant $U_i = U_{in}$. Supposons pour simplifier X_n *séparé*, donc les $U_{ij} = U_i \cap U_j$ sont encore des ouverts *affines* de X_n. Comme le H^1 d'un tel ouvert, à valeurs dans le faisceau quasi-cohérent $\mathscr{G}$, est nul, on en déduit par corollaire 6.2 que $X^i|U_{ij}$ est isomorphe à $X^j|U_{ij}$; soit

$$f_{ji} : X^i|U_{ij} \xrightarrow{\sim} X^j|U_{ij}$$

un tel isomorphisme. Il est déterminé à une section près de $\mathscr{G}$ sur U_{ij}. Posons, pour tout triple d'indices :

$$f^{(k)}_{ji} = f_{ji}|U_{ijk} \quad \text{où } U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Si on avait

(1) $$f_{kj}^{(i)} f_{ji}^{(k)} = f_{ki}^{(j)},$$

il s'ensuivrait que les X^i se “recollent” par les f_{ji}, donc qu'ils définissent une solution $X = X_{n+1}$ du problème cherché. Une telle solution existe plus généralement, si on peut modifier les f_{ji} en des f'_{ji} :

(2) $$f'_{ji} = f_{ji} g_{ji} \quad (g_{ji} \in \Gamma(U_{ij}, \mathscr{G}))$$

de telle façon que les f'_{ji} satisfassent la condition de transitivité ci-dessus. Cette condition suffisante pour l'existence d'une solution est aussi nécessaire, comme on voit en se rappelant qu'une telle solution X doit, sur chaque U_i, être isomorphe à X^i, ce qui permet donc de choisir des isomorphismes
$$f_i : X|U_i \xrightarrow{\sim} X^i$$
et de définir des
$$f'_{ji} = (f_j|U_{ij})(f_i|U_{ij})^{-1} : X^i|U_{ij} \xrightarrow{\sim} X^j|U_{ij}$$
satisfaisant la condition de recollement.

Or posons

(3) $$f_{ijk} = (f_{ki}^{(j)})^{-1} f_{kj}^{i} f_{ji}^{k};$$

c'est un automorphisme de $X^i|U_{ijk}$, que nous identifierons à une section de $\mathscr{G}$ grâce à 6.1. On
80 constate que c'est un 2-*cocycle* f du recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_i)$, à coefficients dans $\mathscr{G}$, par un petit calcul formel laissé au lecteur. Le même calcul montre que moyennant (2), la condition de recollement (1) *pour les* f'_{ij} équivaut à la formule

(4) $$f = dg,$$

où $g = (g_{ij})$ est considéré comme une 1-cochaine de $\mathscr{U}$ à coefficients dans $\mathscr{G}$. Donc *la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution du problème est que la classe de cohomologie dans* $\mathrm{H}^2(\mathscr{U}, \mathscr{G})$ *définie par le cocycle (3)* soit nulle. Notons d'ailleurs que puisque $\mathscr{U} = (U_i)$ est un recouvrement affine de X_0 qui est un *schéma*, $\mathrm{H}^2(\mathscr{U}, \mathscr{G})$ s'identifie à $\mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{G})$. Il est immédiat d'ailleurs que la classe de cohomologie ainsi obtenue dans $\mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{G})$ ne dépend pas du recouvrement affine considéré. On l'appellera la *classe d'obstruction au prolongement de* X_n *en un schéma* X_{n+1} *lisse sur* S_{n+1}.

Supposons cette obstruction nulle. Alors un raisonnement esquissé plus haut montre que toute solution $X = X_{n+1}$ est isomorphe à une solution obtenue par recollement à partir d'isomorphismes f'_{ji}, qu'on peut supposer sous la forme (2), la condition de recollement n'étant autre que (3). L'ensemble des g admissibles est donc un espace principal homogène sous le groupe $\mathrm{Z}^1(\mathscr{U}, \mathscr{G})$ des 1-cocycles de $\mathscr{U}$ à coefficients dans $\mathscr{G}$. De plus, on constate tout de suite que *deux cochaines* g *et* g' (telles que $dg = dg' = f$) *définissent des solutions isomorphes si et seulement si le cocycle* $g - g'$ *est de la forme* dh, où $h = (h_i) \in \mathrm{C}^0(\mathscr{U}, \mathscr{G})$. On trouve donc :

Théorème 6.3 *Soient $(S, \mathscr{I}, X_n)$ comme ci-dessus, X_n étant supposé séparé*[6]. *Alors on peut définir canoniquement une classe d'obstruction dans $\mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{G})$ (où $\mathscr{G}$ est défini dans 6.1), dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un schéma X_{n+1} lisse sur S_{n+1} se réduisant suivant X_n. Si cette obstruction est nulle, alors l'ensemble des classes, à isomorphisme près (induisant l'identité sur X_n) de S_{n+1}-préschémas X_{n+1} se réduisant suivant X_n, est de façon naturelle un espace principal homogène sous $\mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{G})$.*

Remarques 6.4 A partir de 6.1, les raisonnements faits ici sont purement formels, et se trans-
81 crivent avantageusement dans le cadre des catégories locales, ou même des catégories fibrées générales. La classe d'obstruction à l'existence d'un objet "global" d'une catégorie (dont on peut trouver un objet "localement", et dont deux objets sont toujours "isomorphes localement", le groupe des automorphismes de tout objet étant commutatif) ainsi obtenu dans le contexte général, contient comme cas particulier le "deuxième homomorphisme bord" dans une suite exacte de faisceaux de groupes non nécessairement commutatifs, (étudié par exemple par Grothendieck dans Kansas ou Tohoku). Le calcul bébête par cocycles fait ici doit donc être regardé comme un pis-aller, dû à la non existence d'un texte de référence satisfaisant.

6.5 On notera que dans 6.3, il n'y a pas en général d'élément privilégié dans l'espace principal homogène envisagé sous $\mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{G})$. Cela se traduit notamment par le fait que l'on obtient (localisant sur S) un faisceau principal homogène sur S_0, de groupe structural $\mathrm{R}^1 f_*(\mathscr{G})$, qui n'est pas nécessairement trivial, i.e. qui définit une classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^1(S_0, \mathrm{R}^1 f_*(\mathscr{G}))$ qui n'est pas nécessairement nulle. (Lorsque l'on suppose que la classe $d \in \mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{G})$ n'est pas nulle, mais nulle "localement au-dessus de S", i.e. définit une section nulle de $\mathrm{R}^2 f_*(\mathscr{G})$, i.e. un élément nul dans $\mathrm{H}^0(S_0, \mathrm{R}^2 f_*(\mathscr{G}))$).

6.6 On ne sait pour l'instant à peu près rien sur le mécanisme algébrique général des classes de cohomologie introduites dans ce numéro et ses relations avec le numéro précédent, et on ne sait rien en dire de précis dans les cas particuliers les plus simples, tel le cas des schémas abéliens sur des anneaux artiniens[7]. On espère qu'il se trouvera des gens pour chiader la question, qui semble particulièrement intéressante. Elle est intimement liée en particulier à la "théorie des modules" des structures algébriques.

Corollaire 6.7 *Supposons que $\mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{G}) = 0$, alors un X_{n+1} existe, et il est unique à isomorphisme près si de plus $\mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{G}) = 0$.*

En particulier, on en conclut, en procédant de proche en proche (et remarquant qu'un schéma
82 affine est acyclique pour un faisceau quasi-cohérent) :

[6] Cette condition est en fait inutile, et on peut éviter les calculs de cocycles plus haut. Cf. le livre de J. GIRAUD, Cohomologie Non Abélienne (à paraître dans Springer Verlag 1971). Comparer remarques 6.4.

[7] On sait maintenant que cette obstruction est toujours nulle dans ce cas.

Corollaire 6.8 *Sous les conditions du théorème 4.1, si X_0 est affine, alors il existe un X lisse sur Y se réduisant suivant X_0, et cet X est unique à isomorphisme (non unique) près.*

On notera que la démonstration directe du th. 4.1 ne pouvait nous donner ce résultat.

Corollaire 6.9 *Sous les conditions de 6.3, supposons S affine d'anneau A, $\mathscr{I}$ défini par un idéal I de A, enfin les $\operatorname{gr}^n_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_S) = \mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1}$ localement libres. Alors $\mathrm{H}^i(X_0, \mathscr{G})$ s'identifie à $\mathrm{H}^i(X_0, \mathscr{G}_0) \otimes_A \operatorname{gr}^{n+1}_I(A)$, où*

$$\mathscr{G}_0 = \mathfrak{g}_{X_0/S_0},$$

donc la classe d'obstruction au prolongement de X_n se trouve dans $\mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{G}_0) \otimes_A \operatorname{gr}^{n+1}_I(A)$, et si elle est nulle, l'ensemble des classes (à isomorphisme près) de solutions est un espace principal homogène sous $\mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{G}_0) \otimes_A \operatorname{gr}^{n+1}_I(A)$.

En particulier :

Corollaire 6.10 *Sous les conditions de 6.9 supposons*

$$\mathrm{H}^2(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/S_0}) = 0,$$

alors il existe un schéma formel $\hat{I}$-adique sur le complété formel $\mathscr{I}$-adique $\hat{S}$ de S, qui soit "lisse sur S" (i.e. les $\mathfrak{X}_p$ sont lisses sur les S_p) et qui se réduise suivant X_n, i.e. muni d'un isomorphisme

$$\mathfrak{X} \times_S S_n \xleftarrow{\sim} X_n.$$

Si de plus $\mathrm{H}^1(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/S_0}) = 0$, alors un tel $\mathfrak{X}$ est unique à isomorphisme près.

En effet, on construit de proche en proche X_{n+1}, X_{n+2}, etc., d'où $\mathfrak{X}$ en passant à la limite
part 17 inductive des X_i. L'assertion d'unicité figure déjà au n° précédent.

7 Application à la construction de schémas formels et de schémas ordinaires lisses sur un anneau local complet A

83 Les résultats du N° précédent permettent parfois de prouver l'existence d'un schéma formel $\mathfrak{m}$-adique sur un tel anneau, se réduisant suivant un schéma lisse X_0 sur k donné. Distinguons deux cas :

a) *A est "d'égales caractéristiques"* (c'est le cas en particulier si k est de caractéristique 0). Alors on sait qu'il existe un *sous-corps de représentants de* A, i.e. un sous-corps k' tel que $A \to k$ induise un isomorphisme $k' \xrightarrow{\sim} k$. *Alors il existe même un schéma ordinaire lisse sur A se réduisant suivant* X_0, savoir $X = X_0 \otimes_k A$, A étant considéré comme une algèbre sur k grâce à l'homomorphisme $k \to k' \to A$ défini par k'. Il faut cependant noter que cette construction n'est pas "naturelle" ; il est facile de se convaincre (déjà dans le cas où $A = k[t]/(t^2)$, algèbre des nombres duaux) qu'un autre homomorphisme de relèvement $k \to A$ (défini en l'occurence par une dérivation absolue de k dans lui-même) définit un X' sur A qui en général *n'est pas isomorphe à* X (si $\mathrm{H}^1(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/k}) \neq 0$). Il serait d'ailleurs intéressant d'étudier (pour k de caractéristique 0, ou non parfait et de car. $p > 0$) quels sont les X lisses sur A qu'on obtient ainsi, à quelle condition deux homomorphismes $k \to A$ définissent des A-schémas isomorphes. Néanmoins, l'existence de k' suffit à entraîner que la première obstruction au relèvement de X_0, qui est dans $\mathrm{H}^2(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/k}) \otimes_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, est nécessairement nulle. Bien entendu, quand on a relevé alors X_0 en X_1 lisse sur $A/\mathfrak{m}^2$, la nouvelle obstruction à la construction de X_2 ne sera en général pas nulle : elle sera fonction d'un élément variable dans un certain espace principal homogène sous $\mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{G}_0) \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ et se trouve dans $\mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{G}_0) \otimes \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$: il conviendrait d'étudier la situation de façon détaillée[8]

b) *A est d'inégales caractéristiques.* Dans ce cas, on ignore tout, (sauf si par chance $\mathrm{H}^2(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/k}) = 0$, auquel cas on peut construire un schéma formel $\mathfrak{m}$-adique simple sur A se réduisant suivant k). Même si $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et si X_0 est un schéma “abélien” de dimension 2, on ne sait pas si on peut relever en un $X = X_1$ lisse sur A[9], d'autre part, on n'a pas d'exemple d'un X_0 dont on ait prouvé qu'il ne provient pas d'un schéma ordinaire X lisse sur A. (J'ai l'impression que cela doit exister, avec X_0 une surface projective)[10] Signalons simplement que d'après le théorème de Cohen, il existe un p-anneau de Cohen B de corps résiduel k et un homomorphisme $B \to A$ induisant l'isomorphisme identique sur le corps résiduels ; par suite, le
84 résultat “le plus fort” de relèvement serait obtenu en prenant pour A un p-anneau de Cohen : s'il existe une solution (ordinaire ou formelle) au-dessus d'un tel anneau, il en existe une au-dessus de tout anneau local complet de corps résiduel k. En particulier, comme pour un p-anneau de Cohen $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ s'identifie canoniquement à k, on voit que *pour tout schéma lisse X_0 sur un corps k de caractéristique $p > 0$, il existe une classe de cohomologie dans* $\mathrm{H}^2(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/k})$ première obstruction au relèvement de X_0 en un schéma lisse sur un p-anneau de Cohen ; on ignore si elle peut être non nulle[11].

Même si on arrive de proche en proche à construire les X_n se réduisant suivant X_0, cela ne donne en général qu'un schéma *formel* $\mathfrak{X}$ lisse sur A, se réduisant suivant X_0. Lorsque X_0 est propre sur A, il reste la question si $\mathfrak{X}$ est en fait algébrisable, pour pouvoir obtenir un schéma *ordinaire* propre sur A et simple sur A, se réduisant suivant X_0. Le seul critère connu (signalé dans le Séminaire Bourbaki, et qui figure dans les Eléments, Chap. III, 4.7.1) est le suivant : si $\mathfrak{X}$ est propre sur A, et si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur $\mathfrak{X}$ tel que le faisceau induit $\mathscr{L}_0$ sur X_0 soit ample (i.e. une puissance tensorielle convenable $\mathscr{L}_0^{\otimes n}$, $n > 0$, provient d'une immersion projective de X_0) alors il existe un schéma X projectif sur A, et un faisceau inversible ample sur X, tels que $(\mathfrak{X}, \mathscr{L})$ s'en déduise par complétion $\mathfrak{m}$-adique. Cela nous amène donc, étant donné un faisceau localement libre $\mathscr{E}_0$ sur X_0 (que nous choisirons inversible ample pour notre propos), de le prolonger en un faisceau localement libre $\mathscr{E}$ sur $\mathfrak{X}$. Pour ceci, on est ramené à

[8]Elle est sans doute décrite par l'opération crochet de Kodaira-Spencer (cf. Séminaire Cartan, 1960/61, Exp. 4).

[9]C'est maintenant prouvé, cf. note 7 page 62.

[10]Un tel exemple a été depuis construit par J.P. Serre (Proc. Nat. Acad. Sc. USA, vol. 47, N° 1, pp 108–109, 1961), du moins pour certaines dimensions. D. Mumford a donné un exemple (non publié) avec une *surface* algébrique.

[11]Elle peut être non nulle, comme signalé en note 10 à la page 64.

construire de proche en proche des faisceaux localement libres $\mathscr{E}_n$ sur les X_n. La discussion est toute analogue à celle du N° 6, (cf. remarque 6.4), le rôle essentiel étant joué par le *faisceau des automorphismes* d'un $\mathscr{E}_{n+1}$ qui induisent l'identité sur $\mathscr{E}_n$: on montre aussitôt que ce faisceau s'identifie à

$$(*) \qquad \mathscr{G} = \mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_{X_0}}(\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_0 \otimes \mathrm{gr}^{n+1}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_X)) = \mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_{X_0}}(\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_0) \otimes \mathrm{gr}^{n+1}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_X)$$

qui est encore un faisceau en groupes commutatifs. On trouve :

Proposition 7.1 *Soit S un préschéma muni d'un faisceau quasi-cohérent d'idéaux $\mathscr{I}$, X un préschéma sur S, S_n le sous-préschéma de S défini par $\mathscr{I}^{n+1}$, et $X_n = X \times_S S_n$ (pour tout*
85 *entier n). Soit $\mathscr{E}_n$ un faisceau localement libre sur X_n, on se propose de le prolonger en un faisceau localement libre $\mathscr{E}_{n+1}$ sur X_{n+1}. Alors $\mathscr{E}_n$ définit une classe d'obstruction canonique dans $\mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{G})$, où $\mathscr{G}$ est le faisceau quasi-cohérent donné par la formule ci-dessus, classe dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un $\mathscr{E}_{n+1}$ prolongeant $\mathscr{E}_n$. Si cette classe est nulle, alors l'ensemble des classes, à isomorphisme près (induisant l'identité sur $\mathscr{E}_n$) de solutions $\mathscr{E}_{n+1}$, est un espace principal homogène sous $\mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{G})$.*

Cette proposition donne lieu aux corollaires habituels. Signalons seulement si X est *plat* sur S, alors on peut écrire

$$\mathscr{G} = \mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_{X_0}}(\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathrm{gr}^{n+1}_{\mathscr{I}}(\mathscr{O}_S)$$

d'où, si S est affine d'anneau A et si les $\mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1}$ sont localement libres, la condition suffisante

$$\mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{G}_0) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{G}_0 = \mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_{X_0}}(\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_0)$$

pour l'existence d'un $\mathscr{E}_{n+1}$, donc de proche en proche pour l'existence de prolongements successifs $\mathscr{E}_m$ ($m = n, n+1$, etc. . .).

Revenant à la situation de départ, on trouve donc :

Proposition 7.2 *Soient A un anneau local complet, $\mathfrak{X}$ un schéma formel propre et plat sur A, tel que X_0 soit projectif et que $\mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{O}_{X_0}) = 0$. Alors il existe un schéma X projectif sur A dont le complété formel $\mathfrak{m}$-adique est isomorphe à $\mathfrak{X}$.*

Conjuguant avec 6.10, on trouve :

Théorème 7.3 *Soient A un anneau local complet de corps résiduel k, X_0 un schéma projectif et lisse sur k, tel que*

$$\mathrm{H}^2(X_0, \mathfrak{g}_{X_0/k}) = \mathrm{H}^2(X_0, \mathscr{O}_{X_0}) = 0$$

Alors il existe un schéma lisse et projectif X sur A, se réduisant suivant X_0.

Plus généralement, si on se donne un X_n lisse sur $A_n = A/\mathfrak{m}^{n+1}$ se réduisant suivant X_0, alors il existe un X lisse et propre sur A et un isomorphisme $X \otimes_A A_n = X_n$.

Corollaire 7.4 *Toute courbe lisse et propre sur k provient par réduction d'une courbe lisse et propre sur A.*

C'est ce réultat qui sera l'outil essentiel (avec le théorème d'existence de faisceaux en
86 Géométrie Formelle) pour étudier le groupe fondamental de X_0 par voie transcendante.

Exposé IV

Morphismes plats

87 Nous donnons ici surtout les propriétés de platitude qui nous ont servi dans les exposés précedents. Une étude plus détaillée se trouvera au Chapitre IV des “Eléments de Géométrie Algébrique” en préparation[1], où on étudie de façon systématique la situation suivante : X étant localement de type fini sur Y localement noethérien, et $\mathscr{F}$ cohérent sur X et Y-plat, donner des relations entre les propriétés de Y, celles de $\mathscr{F}$, et celles des faisceaux cohérents induits par $\mathscr{F}$ sur les fibres de $X \to Y$ (du point de vue notamment de la dimension, de la dimension cohomologique, de la profondeur etc...). On a notamment une façon systématique d'obtenir des théorèmes du type *Seidenberg* ou *Bertini* (pour les sections hyperplanes). Le résultat essentiel pour l'application des méthodes de platitude dans ce contexte est le suivant (qui sera démontré plus bas) : Si Y est intègre, X de type fini sur Y, $\mathscr{F}$ cohérent sur X, il existe un ouvert non vide U de Y tel que $\mathscr{F}$ soit Y-plat aux points de X au-dessus de U. Une deuxième façon, sans doute encore plus importante, dont la platitude s'introduit en Géométrie Algébrique, est la *théorie de descente* : voir par exemple les deux exposés de Grothendieck sur le sujet au Séminaire Bourbaki[2]. La platitude semble ainsi une des notions techniques centrales en Géométrie Algébrique.

Rappelons que la notion de platitude et fidèle platitude a été introduite par Serre dans GAGA. Un exposé des N° 1 et 2 suivants se trouvera aussi dans Alg. Comm. de Bourbaki (qui bien entendu, comme le titre du livre l'indique, ne se borne pas au cas d'anneaux de base commutatifs)[3].

Contrairement aux exposés précédents, nous ne supposons pas que les anneaux envisagés
part 18 sont nécessairement noethériens.

1 Sorites sur les modules plats

88 Un module M sur l'anneau A est dit *plat* (ou A-plat si on veut préciser A) si le foncteur

[1]Cf. EGA IV 11 et 12.

[2]et, pour un exposé plus détaillé, les Exposés VIII et IX plus bas.

[3]N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Chap. I (Modules Plats), Act. Sc. Ind 1290, Paris, Hermann (1961).

$$T_M \colon N \mapsto M \otimes_A N$$

(qui est en tous cas exact a droite) est *exact* i.e. transforme monomorphismes en monomorphismes. Il revient au même de dire que le premier foncteur dérivé à droite, ou tous les foncteurs dérivés à droite, sont nuls, i.e. que l'on a

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0 \qquad \text{pour tout } N,$$

resp. qu'on a

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = 0 \qquad \text{pour } i > 0, \text{ tout } N.$$

Comme les Tor_i commutent aux limites inductives, il suffit d'ailleurs de vérifier ces conditions pour N de type fini, et même (prenant alors une suite de composition de N à quotiens monogènes) que l'on ait

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$$

si N monogène, i.e. de la forme A/I, I étant un idéal de A. Notons d'ailleurs que

$$\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0 \Longleftrightarrow I \otimes_A M \to M = A \otimes_A M$$

est *injectif*, comme on voit sur la suite exacte des Tor, compte tenu de $\mathrm{Tor}_1^A(M, A) = 0$. Donc M plat équivaut à dire que pour tout idéal I, l'homomorphisme naturel

$$I \otimes_A M \to IM$$

est un isomorphisme. Il suffit d'ailleurs de le vérifier pour I de type fini, a fortiori il suffit de vérifier que le foncteur $M\otimes$ est exact sur les modules *de type fini*.

Comme chaque fois qu'on a un foncteur exact T, si on identifie, pour un sous-objet N' de N, $T(N')$ à un sous-objet de $T(N)$, on a

$$T(N' \cap N'') = T(N') \cap T(N'')$$

$$T(N' + N'') = T(N') + T(N'')$$

pour deux sous-objets N', N'' de N.

Une somme directe de modules plats, un facteur direct d'un module plat, est plat. En particulier, A étant plat, un module *libre*, donc aussi un module *projectif*, est plat. Le produit tensoriel de deux modules plats est plat, et si M est plat sur A, alors $M \otimes_A B$ est plat sur B pour tout changement de base A B (à cause de l'associativité du produit tensoriel et du fait qu'un composé
89 de foncteurs exacts est exact). Si M est plat sur B, B plat sur A, alors M est plat sur A (même raison).

La suite exacte des Tor, plus la "commutativité du Tor, donne :

Proposition 1.1 *Soit* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *une suite exacte de A-modules, M'' étant plat. Alors*

(i) *cette suite reste exacte par tensorisation par n'importe quel A-module N*

(ii) *pour que M soit plat, il faut et il suffit que M' le soit.*

On peut donc dire que du point de vue du comportement par produits tensoriels, les modules plats sont “aussi bons” que les modules libres ou projectifs (et la suite exacte de 1.1 en particulier est “aussi bonne” que si elle splittait).

Soit S une partie multiplicativement stable de A, alors $S^{-1}A$ est plat sur A, car $S^{-1}A \otimes N = S^{-1}N$ est un foncteur exact en N. Si M est A-plat, alors $S^{-1}M = S^{-1}A \otimes M$ est $S^{-1}A$-plat, la réciproque étant vraie si $M \to S^{-1}M$ est un isomorphisme, i.e. si les $s \in S$ sont bijectifs dans M (à cause de la transitivité de la platitude, $S^{-1}A$ étant plat sur A). Plus généralement, le cas d'un morphisme de préschémas $X \to Y$ et d'un faisceau quasi-coherent $\mathscr{F}$ sur X dont on veut étudier la platitude par rapport à Y conduit à la situation avec deux anneaux :

Proposition 1.2 *Soient $A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, M un B-module, T une partie multiplicativement stable de B.*

(i) *Si M est A-plat, alors $T^{-1}M$ est A-plat (donc aussi $S^{-1}A$-plat pour toute partie multiplicativement stable S de A s'envoyant dans T).*

(ii) *Inversement, si $M_{\mathfrak{n}}$ est plat sur $A_{\mathfrak{n}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B, $M_{\mathfrak{n}}$ est plat sur A (ou, ce qui revient au même, sur $A_{\mathfrak{m}}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal premier de A image inverse de $\mathfrak{n}$) alors M est A-plat.*

On a en effet la formule, fonctorielle par rapport au A-module N :

$$T^{-1}M \otimes_A N = T^{-1}(M \otimes_A N)$$

car les deux membres sont fonctoriellement isomorphes à $T^{-1}B \otimes_B M \otimes_B N_{(B)}$ (avec $N_{(B)} = N \otimes_A B$) en vertu des formules d'associativité de $\otimes$. Il s'ensuit aussitôt que si $M \otimes_A N$ est exact en N, il en est de même de $T^{-1}M \otimes_A N$ (comme composé de deux foncteurs exacts), d'où (i). Et il s'ensuit de même (ii), car pour vérifier l'exactitude d'une suite de B-modules, il
90 suffit de vérifier l'exactitude des localisés en tous les idéaux maximaux de B.

Proposition 1.3 (i) *Soit M un A-module plat. Si $x \in A$ est non diviseur de 0 dans A, il est non-diviseur de 0 dans M. En particulier, si A est intègre, M est sans torsion.*

(ii) *Supposons que A soit intègre et que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A_{\mathfrak{m}}$ soit principal (par exemple A anneau de Dedekind, ou même principal). Pour que le A-module M soit plat, il faut et il suffit qu'il soit sans torsion.*

On obtient (i) en notant que l'homothétie x dans M s'obtient en tensorisant par M l'homothétie x dans A. Pour (ii), on peut supposer déjà A principal grâce à 1.2 (ii) ; il faut montrer que si M est sans torsion, alors pour tout idéal I de A, l'injection $I \to A$ tensorisée par M est une injection, ce qui signifie que le générateur x de I est non diviseur de 0 dans M, O.K.

2 Modules fidèlement plats

Un foncteur F d'une catégorie dans une autre est dit *fidèle* si pour tout X, Y, l'application $\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$ est injective. S'il s'agit d'un foncteur additif de catégories additives, il revient au même de dire que $F(u) = 0$ implique $u = 0$, et cela implique que $F(X) = 0$ implique $X = 0$. Pour que F soit *fidèle et exact*, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : pour toute suite $M' \to M \to M''$ de morphismes dans $\mathscr{C}$, la suite transformée $F(M') \to F(M) \to F(M'')$ est exacte *si* et *seulement si* la précédente l'est. Ou encore : F est exact, et $F(X) = 0$ implique $X = 0$. (N.B. pour pouvoir parler d'exactitude, il faut supposer les catégories en jeu *abéliennes*). Supposons qu'on ait une famille (M_i) d'objets non nuls de $\mathscr{C}$ tels que tout objet non nul de $\mathscr{C}$ ait un sous-objet admettant un quotient isomorphe à un M_i. Alors F fidèle et exact équivaut à : F exact, et $F(M_i) \neq 0$ pour tout i. Si $\mathscr{C}$ est la catégorie des modules sur un anneau A, on peut prendre par exemple pour (M_i) la famille des $A/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ parcourant les idéaux maximaux de A. (En effet, tout module non nul admet un sous-module non nule monogène, donc isomorphe à un A/I, I idéal $\neq A$, lequel par Krull admet un quotient $A/\mathfrak{m}$). De ces sorites, on déduit en particulier :

Proposition 2.1 *Soit M un A-module. Conditions équivalentes :*

91 *(i) Le foncteur $M \otimes_A$ est fidèle et exact.*

(i bis) M est plat, et $M \otimes_A N = 0$ implique $N = 0$

(i ter) M est plat, et $M \otimes A/\mathfrak{m} \neq 0$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

(ii) Pour toute suite d'homomorphismes $N' \to N \to N''$, la suite tensorisée par M est exacte si et seulement si la suite initiale l'est.

On dit alors que M est un A-module *fidèlement plat*. En particulier, si M est fidèlement plat, alors $N \to N'$ est un monomorphisme (épimorphisme, isomorphisme) si et seulement si l'homomorphisme tensorisé par M l'est. Un module fidèlement plat est *fidèle*, puisque l'homothétie f dans M s'obtient en tensorisant par M l'homothétie f dans A.

On voit comme dans 1. les propriétés de transitivité habituelles : le produit tensoriel de deux modules fidèlement plats est fidèlement plat, si M est fidèlement plat sur A, $M \otimes_A B$ est fidèlement plat sur B pour toute extension de la base $A \to B$, si B est une A-algèbre qui est fidèlement plate sur A et si M est un B-module fidèlement plat, c'est un A-module fidèlement plat.

Corollaire 2.2 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux, M un B-module de type fini. Pour que M soit fidèlement plat sur A, il faut et il suffit qu'il soit plat sur A et non nul.*

Résulte du critère (i ter) et de Nakayama. En particulier, *pour que B soit A-plat, il faut et il suffit qu'il soit fidèlement A-plat.*

Proposition 2.3 *Soit $A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, M un B-module qui est fidèlement plat sur A. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B qui l'induise.*

Divisant par $\mathfrak{p}$, on est ramené au cas où $\mathfrak{p} = 0$. Localisant en l'idéal premier 0, on est ramené au cas où A est un corps. Mais M étant fidèlement plat sur A est non nul, a fortiori $B \neq 0$, donc B a un idéal premier, qui ne peut qu'induire l'unique idéal premier de A ! Géométriquement, on peut dire que l'existence d'un faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur $X = \operatorname{Spec}(B)$ qui soit "fidèlement plat" relativement à A, implique que $X \to Y = \operatorname{Spec}(A)$ est *surjectif*.

Corollaire 2.4 *Supposons M plat sur A, de type fini sur B et supp. $M = \operatorname{Spec}(B)$ (i.e. $M_{\mathfrak{q}} \neq 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B). Alors les idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de B contenant $\mathfrak{p}B$ minimaux induisent $\mathfrak{p}$.*

92 On est encore ramené au cas $\mathfrak{p} = 0$ (car les hypothèses se conservent toutes en divisant), donc A intègre. On est ramené à l'énoncé suivant :

Corollaire 2.5 *M étant come dessus, tout idéal premier minimal $\mathfrak{q}$ de B induit un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A qui est minimal.*

En effet, localisant en $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, on est ramené à prouver que si A et B sont locaux et l'homomorphisme $A \to B$ local, M un B-module non nul plat sur A, et si B est de dimension 0, alors A est de dimension 0. Par 2.2 et 2.3, on conclut que tout idéal premier de A est induit par un idéal premier de B, donc par l'idéal maximal de A donc est l'idéal maximal, cqfd. Géométriquement, 2.5 signifie que toute composante irréductible de $\overline{X} = \operatorname{Spec}(B)$ domine quelque composante irréductible de $Y = \operatorname{Spec}(A)$ (moyennant l'existence d'un faisceau quasi-cohérent de type fini sur X, de support X, et plat par rapport à Y).

On notera qu'on n'a pas eu à supposer dans 2.4 M fidèlement plat sur A, mais rien ne garantit alors l'existence d'un idéal premier contenant $\mathfrak{p}B$ (donc d'un minimal parmi de tels).

Proposition 2.6 *Soit $i\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Conditions équivalentes :*

- *(i) B est un A-module fidèlement plat.*
- *(ii) B est plat sur A, et $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ est surjectif*
- *(ii bis) B est plat sur A, et tout idéal maximal est induit par un idéal de B.*
- *(iii) i est injectif et $\operatorname{Coker} i$ est un A-module plat.*
- *(iv) Le foncteur $M_{(B)} = M \otimes_A B$ en le A-module M est exact, et l'homomorphisme fonctoriel canonique $M \to M_{(B)}$ est injectif.*
- *(iv bis) Pour tout idéal I de A, $I \otimes_A B \to IB$ est un isomorphisme, et l'image inverse de IB dans A est égale à I.*

On a (i) ⇒ (ii) par 2.3, (ii) ⇒ (ii bis) est trivial, (ii bis) ⇒ (i) par le critère (i ter) de 2.1. On a (iii) ⇒ (iv) par 1.1, (iv) ⇒ (iv bis) trivialement (en faisant $M = A/I$ dans la deuxième condition (iv bis)), et (iv bis) ⇒ (i) en vertu du critèrede platitude par idéaux vu au début de 1 et du critère
93 2.1 (iter). Enfin, (iv) ⇒ (iii) par une réciproque facile de 1.1, et (i) ⇒ (iv) car si N est le noyau de $M \to M \otimes_A B = T(M)$, alors ($T$ étant exact) $N \to T(N)$ est nul d'où $T(N) = N \otimes_A B = 0$,
part 19 d'où $N = 0$, cqfd.

3 Relations avec la complétion

Soient A un anneau noethérien, I un idéal dans A, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie I-préadique, et pour tout A-module M, soit $\widehat{M}$ son complété pour la topologie I-préadique. C'est un $\widehat{A}$-module, d'où un homomorphisme canonique

$$M \otimes_A \widehat{A} \to \widehat{M}.$$

Lorsque M parcourt les modules *de type fini*, le foncteur $M \mapsto \widehat{M}$ est exact, comme il résulte facilement du *théorème de Krull : Si $N \subset M$, la topologie de N est celle induite par la topologie de M*. Comme $M \otimes_A \widehat{A}$ est exact à droite, on en conclut aisément (en résolvant M par $L \to L' \to M$, avec L et L' libres de type fini) que l'homomorphisme fonctoriel plus haut est un *isomorphisme* ($\widehat{M}$ étant aussi exact à droite) et par conséquent que $M \otimes_A \widehat{A}$ est aussi un foncteur *exact* en M. Par suite :

Proposition 3.1 *Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A, alors le complété séparé $\widehat{A}$ de A (pour la topologie I-préadique) est* plat *sur A.*

Corollaire 3.2 *Pour que $\widehat{A}$ soit fidèlement plat sur A, il faut et il suffit que I soit contenu dans le radical de A.*

En effet, il suffit d'appliquer le critère 2.1 (i ter).

Ces résultats résument tout ce qu'on sait dire, du point de vue de l'algèbre linéaire, sur les relations entre A et $\widehat{A}$. Le corollaire 3.2 est surtout utilisé lorsque A est un anneau local noethérien et que I est contenu dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ (et le plus souvent, lui est égal).

4 Relations avec les modules libres

Proposition 4.1 *Soient A un anneau, I un idéal de A, M un A-module. Supposons qu'on soit sous l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :*

(a) I est nilpotent

(b) A est noethérien, I est dans le radical de A, et M est de type fini.

Pour que M soit libre sur A, il faut et il suffit que $M \otimes A/I$ soit libre sur A/I, et que $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$.

94 C'est nécessaire, prouvons la suffisance. Soit (e_i) une famille d'éléments de M dont l'image dans $M \otimes A/I = M/IM$ y définit une base sur A/I (c'est une famille finie dans le cas (b)). Soit L le A-module libre construit sur le même ensemble d'indices, on a donc un homomorphisme $L \to M$ tel que la tensorisation T par A/I induit un isomorphisme $T(L) \xrightarrow{\sim} T(M)$. Si Q est le conoyau de $L \to M$, on a donc $T(Q) = 0$, d'où $Q = 0$ en vertu de Nakayama (valable sous l'une ou l'autre condition (a) ou (b)). Donc $L \to M$ est surjectif, soit R son noyau, on a donc une suite exacte

$$0 \to R \to L \to M \to 0$$

d'où, comme $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$, une suite exacte $0 \to T(R) \to T(L) \to T(M) \to 0$, d'où $T(R) = 0$, d'où encore $T(R) = 0$ en vertu de Nakayama (tenant compte que dans le cas (b), R est de type fini puisque A était supposé noethérien).

Corollaire. *On peut remplacer la condition $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$ par : l'homomorphisme canonique surjectif*

$$(*) \qquad \operatorname{gr}_I^0(M) \otimes_{A/I} \operatorname{gr}_I(A) \to \operatorname{gr}_I(M)$$

est un isomorphisme.

En effet, si M est libre, cela est certainement vérifié. Il faut donc prouver que si $M \otimes A/I$ est libre sur A/I et la condition sur les gr vérifiée, alors M est libre. On reprend la démonstration ci-dessus en construisant $L \to M$, il résulte de l'hypothèse que cet homomorphisme induit un isomorphisme pour les gradués associés, donc son noyau est contenu dans l'intersection des $I^n L$, donc est nul (comme il est trivial dans (a), et bien connu dans (b)). Cqfd.

Corollaire 4.3 *Supposons que A/I soit un corps. Alors les conditions suivantes sur M sont équivalentes :*

(i) *M est libre*

(ii) *M est projectif*

(iii) *M est plat*

(iv) $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$

(v) *L'homomorphisme canonique $(*)$ est bijectif.*

En effet, dans le cas envisagé, $M \otimes A/I$ est automatiquement libre.

Le résultat précédent est valable dans les deux cas suivants :

(a) M est un module *quelconque* sur un anneau local A dont l'idéal maximal I est *nilpotent* (par exemple un anneau local artinien).

(b) M est un module *de type fini* sur un anneau *local noethérien*.

95 Rappelons pour mémoire :

Corollaire 4.4 *Supposons que A soit un anneau* local noethérien intègre *d'idéal maximal* $\mathfrak{m} = I$, *de corps résiduel $k = A/I$, de corps des fractions K. Soit M un module de type fini sur A. Alors les conditions équivalentes (i) à (v) précédentes équivalent aussi à*

(vi) $M \otimes_A K$ et $M \otimes_A k$ sont des espaces vectoriels de même dimension (i.e. le rang de M sur A est égal au nombre minimum de générateurs du A-module M).

Demonstration immédiate : on laisse au lecteur le soin de généraliser au cas où A est seulement supposé sans éléments nilpotents : il faut alors exiger que les rangs de M pour les idéaux premiers minimaux de A soient égaux à la dimension de l'espace vectoriel $M \otimes_A k$.

5 Critères locaux de platitude

Proposition 5.1 *Soit A un anneau muni d'un idéal I, M un A-module. Supposons*

$$Tor_1^A(M, A/I^n) = 0 \qquad \text{pour } n > 0$$

alors l'homomorphisme canonique surjectif

$$(*) \qquad \mathrm{gr}_I^0(M) \otimes_{A/I} \mathrm{gr}_I(A) \to \mathrm{gr}_I(M)$$

est un isomorphisme. La réciproque est vraie si I est nilpotent.

L'hypothèse signifie que les homomorphismes

$$I^n \otimes_A M \to I^n M$$

sont des isomorphismes, d'où aussitôt le fait que les homomorphismes

$$I^n/I^{n+1} \otimes_A M \to I^n M/I^{n+1} M$$

sont des isomorphismes. Réciproquement, supposons cette condition vérifiée et I nilpotent, prouvons $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I^n) = 0$ pour tout n. C'est vrai pour n grand, procédons par récurrence descendante sur n, en le supposant prouvé pour $n + 1$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes I^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes I^n \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes (I^n/I^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & MI^{n+1} \arrow[r] & MI^n \arrow[r] & MI^n/MI^{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

96 où les lignes sont exactes. Par hypothèse, la dernière flèche verticale est un isomorphisme, et l'hypothèse de récurrence signifie aussi que la première flèche verticale l'est. Il en est donc de même de la flèche verticale médiane, ce qui achève la démonstration.

La proposition suivante a été dégagée au moment du Séminaire par Serre ; elle permet des simplifications substantielles dans le présent numéro.

Proposition 5.2 *Soient $A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout B-module N, on a $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = 0$;

(ii) $\mathrm{Tor}_1^A(M,B) = 0$, et $M_{(B)} = M \otimes_A B$ est B-plat.

On a un isomorphisme fonctoriel

$$M \otimes_A N = (M \otimes_A B) \otimes_B N$$

qui exprime le premier membre, considéré comme foncteur en M, comme un composé de deux foncteurs $M \mapsto M \otimes_A B$ et $P \mapsto P \otimes_B N$. Comme le premier transforme modules libres sur A en modules libres sur B, donc projectifs en projectifs, on a la suite spectrale des foncteurs composés

$$\mathrm{Tor}_n^A(M,N) \Leftarrow \mathrm{Tor}_p^B(\mathrm{Tor}_q^A(M,B),N)$$

d'où une suite exacte pour les termes de bas degré

$$0 \leftarrow \mathrm{Tor}_1^B(M \otimes_A B, N) \leftarrow \mathrm{Tor}_1^A(M,N) \leftarrow \mathrm{Tor}_1^A(M,B) \otimes_A N$$

Si (i) est vérifié, alors on conclut de cette suite exacte $\mathrm{Tor}_1^B(M \otimes_A B, N) = 0$ pour tout N, i.e. $M \otimes_A B$ est B-plat, d'où (ii). Si inversement (ii) est vérifié, alors dans la suite exacte les termes entourant $\mathrm{Tor}_1^A(M,N)$ sont nuls, donc on a (i).

Corollaire 5.3 *Supposons que $B = A/I$, alors les conditions précédentes équivalent à la suivante :*

(iii) $\mathrm{Tor}_1^A(M,N) = 0$ pour tout A-module N annulé par une puissance de I.

En effet, (i) signifie qu'il en est ainsi si N est annulé par I. On en déduit (iii) en appliquant l'hypothèse aux $I^n N/I^{n+1}N$.

97 **Corollaire 5.4** *Sous les conditions de 5.3, les conditions envisagées impliquent que l'homomorphisme fonctoriel*

$$(*) \qquad \mathrm{gr}_I^0(M) \otimes_{A/I} \mathrm{gr}_I(A) \to \mathrm{gr}_I(M)$$

est un isomorphisme, et que $M \otimes_A A/I$ est plat sur A/I.

Il suffit d'appliquer (iii) et (5.1). Utilisant la réciproque de 5.1 dans le cas I nilpotent, on trouve :

Corollaire 5.5 *Soient A un anneau muni d'un idéal nilpotent I, M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est A-plat

(ii) $M \otimes_A A/I$ est A/I-plat, et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$

(iii) $M \otimes_A A/I$ est A/I-plat, et l'homomorphisme canonique $(*)$ sur les gradués est un isomorphisme.

En effet, ce sont respectivement les conditions (iii) et (ii) précédentes, et celles de corollaire 5.4.

Ne supposons plus I nilpotent, alors on aura seulement a priori dans 5.5 les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). D'autre part, comme la condition (iii) reste stable en divisant par une puissance de I, on voit en vertu de 5.5 qu'elle implique

(iv) pour tout entier n, $M \otimes A/I^n$ est plat sur A/I^n.

On se propose de donner des conditions moyennant lesquelles on peut en conclure (i), i.e. que M est A-plat. Je dis qu'il suffit pour ceci que A soit noethérien et que M satisfasse la condition de finitude suivante : *pour tout module de type fini N sur A, $M \otimes_A N$ est séparé pour la topologie I-préadique*. (Il suffirait de le vérifier si N est un idéal de type fini dans A). En effet, prouvons que sous ces conditions, si $N' \to N$ est un monomorphisme de modules de type fini, $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ est un monomorphisme. Il suffit en effet de montrer que le noyau est contenu dans les $I^n(M \otimes_A N') = \mathrm{Im}(M \otimes_A I^nN' \to M \otimes_A N')$, ou encore dans les $\mathrm{Im}(M \otimes_A V'_n \to M \otimes_A N') = \mathrm{Ker}(M \otimes_A N' \to M \otimes_A (N'/V'_n))$, où V'_n parcourt un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans N' (muni de sa topologie I-adique). D'après le théorème de Krull, la topologie I-adique de N' est induite par celle de N, on peut donc prendre $V'_n = N' \cap I^nN$. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A N' \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_A (N'/V'_n) \arrow[d] \\ M \otimes_A N \arrow[r] & M \otimes_A (N/I^nN) \end{tikzcd}$$

98 Comme N'/V'_n et N/I^nN sont annulés par I^n, le deuxième homomorphisme vertical s'identifie à celui déduit de l'homomorphisme *injectif* $N'/V'_n \to N/I^nN$ en tensorisant sur A/I^n avec le (A/I^n)-module *plat* $M \otimes_A A/I^n$, il est donc *injectif*. Par suite, le noyau de $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ est contenu dans celui de $M \otimes_A N' \to M \otimes_A (N'/V'_n)$, ce qu'on voulait.

La condition de "finitude" envisagée sur M est vérifiée en particulier si M est un module de type fini sur une A-algèbre noethérienne, B telle que IB soit contenu dans le radical de B : en effet, alors $M \otimes_A N$ est un module de type fini sur B pour tout module de type fini N sur A,
part 20 donc séparé par Krull pour la topologie I-adique $=$ sa topologie (IB)-adique. On trouve ainsi :

Théorème 5.6 *Soient $A \to B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, I un idéal de A tel que IB soit contenu dans le radical de B, M un B-module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est A-plat

(ii) $M \otimes_A A/I$ est A/I-plat, et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$

(iii) $M \otimes_A A/I$ est A/I-plat, et l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{gr}_I^0(M) \otimes_{A/I} \mathrm{gr}_I(A) \to \mathrm{gr}_I(M)$$

est un isomorphisme.

(iv) Pour tout entier n, $M \otimes_A A/I^n$ est plat sur A/I^n.

Ce résultat s'applique surtout lorsque A, B sont des anneaux *locaux* noethériens, $A \to B$ un homomorphisme local, et I un idéal maximal (et on peut réduire aussitôt 5.6 à ce cas). Un cas intéressant est celui où A/I est un corps, i.e. I maximal, auquel cas la condition que $M \otimes_A (A/I)$ est plat sur A/I devient inutile ; de plus, comme alors les A/I^n sont des anneaux locaux artiniens,
99 la condition (iv) signifie que les $M \otimes_A (A/I^n)$ sont *libres* sur les A/I^n.

Corollaire 5.7 *Soit $A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, $u\colon M' \to M$ un homomorphisme de B-modules de type fini, supposons M plat sur A. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est injectif, et $\operatorname{Coker} u$ est plat sur A.

(ii) $u \otimes_A k\colon M' \otimes_A k \to M \otimes_A k$ est injectif

(où k désigne le corps résiduel de A).

(i)⇒(ii) en vertu de 1.1, prouvons la réciproque. Tout d'abord u est injectif, car il suffit de le vérifier sur les gradues associés, où cela résulte d'un carré commutatif que le lecteur écrira. Soit M'' son Coker, on a donc une suite exacte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

d'où par la suite exacte des Tor, compte tenu de l'hypothèse (ii) et de $\operatorname{Tor}_1^A(M,k) = 0$, la relation $\operatorname{Tor}_1^A(M'',k) = 0$, donc M'' est plat sur A par le théorème 5.6.

Corollaire 5.8 *Sous les conditions de 5.6, soit J un idéal de B contenant IB et contenu dans le radical. Soient $\hat{A}$ le complété I-adiques de A et $\hat{B}$ et $\hat{M}$ les complétés J-adiques de B et M. Pour que M soit A-plat, il faut et il suffit que M soit $\hat{A}$-plat.*

(N.B. la suffisance résulterait déjà facilement de 3.2). On utilise le critère (iii) de 5.6 dans la situation (A,B,I,M) et dans la situation $(\hat{A},\hat{B},I\hat{A},\hat{M})$. On constate que les conditions obtenues pour l'un et l'autre cas sont équivalentes, grâce à 3.2.

Corollaire 5.9 *Soient $A \to B \to C$ des homomorphismes locaux d'anneaux locaux noethériens, M un C-module de type fini (N.B. C n'intervient que pour pouvoir mettre une condition de finitude sur M). On suppose B plat sur A. Soit k le corps résiduel de A. Conditions équivalentes :*

(i) M est plat sur B.

(ii) M est plat sur A, et $M \otimes_A k$ est plat sur $B \otimes_A k$.

L'implication (i)⇒(ii) est triviale, prouvons (ii)⇒(i). On applique le critère (iii) de 5.6 à $(B, C, \mathfrak{m}B = I, M)$, comme $M \otimes_B (B/I) = M \otimes_B (B \otimes_A k) = M \otimes_A k$, la première condition
100 de ce critère signifie précisément que $M \otimes_A k$ est plat sur $B \otimes_A k$, parfait. La deuxième condition

du critère est vérifiée parce que M est plat sur A et B plat sur A, par une formule d'associativité du produit tensoriel. — Bien entendu, se référant à 5.5 au lieu de 5.6, on obtient un énoncé analogue sans condition noethérienne et de finitude, quand en suppose en revanche que l'idéal $\mathfrak{m}$ de A est nilpotent. (Le fait que $\mathfrak{m}$ ait été pris maximal n'est d'ailleurs pas intervenu ; mais c'est en un sens le cas "$\mathfrak{m}$ maximal" qui est "le meilleur possible").

6 Morphismes plats et ensembles ouverts

Rappelons d'abord quelques résultats sur les ensembles constructibles, qui sont d'ailleurs démontrés dans des notes en circulation du Séminaire Dieudonné-Rosenlicht sur les Schémas [4].

Soit X un espace topologique. On dit avec Chevalley qu'une partie de X est *constructible* si elle est réunion finie de parties localement fermées.

Lemme 6.1 *Soit X un espace topologique noethérien, soit Z une partie de X. Pour que Z soit constructible, il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible Y de X, $Z \cap Y$ est non dense dans Y ou contient une partie ouverte non vide de l'espace Y.*

On en déduit, utilisant un lemme bien connu d'Algèbre Commutative :

Lemme 6.2 *(Chevalley) Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de type fini de préschémas, avec Y noethérien. Alors $f(X)$ est constructible.*

Lemme 6.3 *Soient X un espace topologique noethérien dont toute partie fermée irréductible admet un point générique, U une partie constructible de X, $x \in X$. Pour que U soit un voisinage de x, il faut et il suffit que toute générisation y de x (i.e. tout $y \in X$ tel que $x \in \bar{y}$) soit dans U.*

En particulier

Corollaire 6.4 *Soit X un espace topologique noethérien dont toute partie fermée irréductible admet un point générique, U une partie de X. Pour que U soit ouverte, il faut et il suffit qu'elle satisfasse les deux conditions suivantes :*

(a) U contient toute générisation de chacun de ses points

101 *(b) si $x \in U$, alors $U \cap \bar{x}$ contient une partie ouverte non vide de l'espace $\bar{x}$.*

En effet, U est nécessairement constructible grâce à 6.1, et on applique le critère 6.2 qui prouve que U est un voisinage de ses points.

Corollaire 6.5 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de type fini de préschémas, avec Y localement noethérien, x un point de X, $y = f(x)$. Pour que f transforme toute voisinage de x en un voisinage de y, il faut et il suffit que pour toute générisation y' de y, il existe une générisation x' de x telle que $f(x') = y'$.*

[4] Cf. EGA 0_{III} 9, EGA IV 1.8 et 1.10.

On peut évidemment supposer que X et Y sont affines, donc noethériens. La condition est suffisante, car il suffit de prouver que $f(X)$ est un voisinage de y, or $f(X)$ est constructible par 6.1, et il suffit d'appliquer le critère 6.3. La condition est nécessaire, car soit $Y' = \overline{y'}$, et soit F la réunion des composantes irréductibles de $f_{-1}(Y')$ qui ne contiennent pas x. Alors $X - F$ est un voisinage ouvert de x, donc son image est un voisinage de y, et a fortiori contient y', donc il existe $x'_1 \in X - F$ tel que $f(x'_1) = y'$. Considérons une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$ contenant x'_1, elle contient nécessairement x (car autrement elle serait contenue dans F), soit x' son point générique. C'est une générisation de x, et $f(x')$ est une générisation de $f(x'_1) = y'$ contenue dans Y', donc est égal à y', cqfd.

Théorème 6.6 *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme localement de type fini, avec Y localement noethérien, F un faisceau cohérent sur X de support X, plat par rapport à Y. Alors f est un morphisme ouvert (i.e., transforme ouverts en ouverts).*

Il suffit de prouver le critère 6.5 pour tout point $x \in X$. Or les générisations x' de x correspondent aux idéaux premiers de $\mathscr{O}_x$, celles y' de y correspondent aux idéaux premiers de $\mathscr{O}_y$, et il faut donc vérifier que tout idéal premier de $\mathscr{O}_y$ est induit par une idéal premier de $\mathscr{O}_x$. Or F_x est un $\mathscr{O}_x$ module non nul et $\mathscr{O}_y$ plat, donc fidèlement plat sur $\mathscr{O}_y$ par 2.2. On peut donc appliquer 2.3, ce qui achève la démonstration.

Remarques. Comme la platitude se conserve par extension de la base, on voit que sous les conditions de 6.5 f est même *universellement ouvert*. J'ignore cependant, lorsque Y est intègre et X de type fini sur Y, si f induit sur toute composante X_i de X un morphisme ouvert, ou
102 même seulement équidimensionnel [5] i.e. dont toutes les composantes des fibres ont même dimension (on sait seulement que X_i *domine* Y). La question est liée à la suivante : soit $A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, tel que B soit plat sur A et $\mathfrak{m}B$ soit un idéal de définition de B, (ce qui implique d'ailleurs $\dim B = \dim A$). Est-il vrai que pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}_i$ de B, on a $\dim B/\mathfrak{p}_i = \dim B$? Signalons seulement que la réponse à la première question est négative quand on remplace l'hypothèse de platitude de 6.5 par la seule hypothèse que f soit universellement ouvert.

Lemme 6.7 *Soient A un anneau intègre noethérien, B une A-algèbre de type fini, M un B-module de type fini. Alors il existe un élément non nul f de A tel que M_f soit un module libre (a fortiori plat) sur A_f.*

Soit K le corps des fractions de A, alors $B \otimes_A K$ est une algèbre de type fini sur K, et $M \otimes_A K$ un module de type fini sur cette dernière. Soit n la dimension du support de ce module, nous raisonnerons par récurrence sur n. Si $n < 0$ i.e. si $M \otimes_A K = 0$, alors prenant un nombre fini de générateurs de M sur B, on voit qu'il existe un $f \in A$ qui annule ces générateurs, donc M, d'où $M_f = 0$ et on a gagné. Supposons $n \geq 0$. On sait que le B-module M admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à des modules $B/\mathfrak{p}_i$, les $\mathfrak{p}_i$ étant

[5] La réponse à la deuxième question est affirmative, celle à la première négative même si f est étale ; cf. EGA IV 12.1.1.5 et EGA Err_{IV} 33.

des idéaux premiers de B. Comme une extension de modules libres est libre, on est ramené au cas où M lui-même est de la forme $B/\mathfrak{p}$, ou encore identique à B, B étant une A-algèbre *intègre*. Appliquant le lemme de normalisation de Noether à la K-algèbre $B \otimes_A K$, on voit facilement qu'il existe un élément f non nul de A tel que B_f soit entier sur le sous-anneau $A_f[t_1, \ldots, t_n]$, où les t_i sont des indéterminées. Donc on peut déjà supposer B est entier sur $C = A[t_1, \ldots, t_n]$, c'est donc un C-module de type fini sans torsion. Soit m son rang, il existe donc une suite exacte de C-modules :

$$0 \to C^m \to B \to M' \to 0$$

où M' est un C-module de torsion. Il s'ensuite que la dimension de Krull du $C \otimes_A K$-module $M' \otimes_A K$ est strictement inférieur à celle n de $C \otimes_A K$. D'après l'hypothèse de récurrence, il s'ensuite que, à condition de localiser par rapport à un f non nul convenable de A, on peut
103 supposer que M' est un A-module libre. D'autre part, C^m est un A-module libre. Donc B est
part 21 alors un A-module libre, on a fini.

Lemme 6.8 *Soient A un anneau noethérien, B une algèbre de type fini sur A, M un B-module de type fini, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B, $\mathfrak{q}$ l'idéal premier qu'il induit sur A. On suppose $M_\mathfrak{p}$ plat sur $A_\mathfrak{q}$ (ou sur A, c'est pareil). Alors il existe un $g \in B - \mathfrak{p}$ tel que*

(a) $(M/\mathfrak{q}M)_g$ *est plat sur* $A/\mathfrak{q}$.

(b) $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{q})_g = 0$.

En effet, appliquant 6.7 à $(A/(q), B/\mathfrak{q}B, M/\mathfrak{q}M)$ on voit d'abord qu'il existe un f dans $A - \mathfrak{q}$ tel que $(M/\mathfrak{q}M)_f$ soit plat sur $A/\mathfrak{q}$. D'autre part, comme $M_\mathfrak{p}$ est plat sur A, on a $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p} = \mathrm{Tor}_1^A(M_\mathfrak{p}, A/\mathfrak{q}) = 0$, donc comme $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{q})$ est un B-module de type fini, il existe un $g \in B - \mathfrak{p}$ tel qu'on ait (b). On peut alors (remplaçant g par gf) supposer qu'on a en même temps (a), ce qui prouve le corollaire.

Corollaire 6.9 *Avec les notations de 6.8, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de B contenant $\mathfrak{p}$ et ne contenant pas g, $M_{\mathfrak{p}'}$ est plat sur A (ou, ce qui revient au même, sur $A_{\mathfrak{q}'}$, où $\mathfrak{q}'$ est l'idéal premier de A induit par $\mathfrak{p}'$).*

Il suffit d'appliquer le critère 5.6 (ii) au système $(A, B_{\mathfrak{q}'}, \mathfrak{q}, M_{\mathfrak{q}'})$, en utilisant la localisation des Tor.

Théorème 6.10 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de type fini, avec Y localement noethérien, et soit F un faisceau cohérent sur X. Soit U l'ensemble des points $x \in X$ tels que F_x soit plat sur $\mathscr{O}_{f(x)}$. Alors U est un ensemble* ouvert.

Démonstration : On peut supposer X et Y affines, d'anneaux B et A, donc F défini par un B-module M de type fini. On applique le critère 6.4. La condition (a) est vérifiée trivialement par 1.2 (i), reste à vérifier la condition (b) de 6.4. C'est ce qui a été fait dans le lemme 6.8 et le corollaire 6.9.

Dans beaucoup de questions, la forme plus faible suivante du théorème 6.10 est suffisante
104 (qui résulte déjà du lemme 6.7, et ne nécessite donc ni la technique des constructibles, ni le théorème 5.6) :

Corollaire 6.11 *Sous les conditions de 6.10, si on suppose Y intègre, alors il existe un ouvert non vide V dans Y tel que F soit plat relativement à Y en tous les points de $f^{-1}(V)$.*

En effet, l'ensemble ouvert U contient la fibre du point générique de Y (puisque l'anneau local de ce point est un corps), donc il contient un ouvert de la forme $f^{-1}(V)$, X étant de type fini sur Y. De 6.11, on conclut aussi facilement le résultat suivant, où Y est supposé noethérien (mais pas nécessairement intègre) : il existe une partition de Y en des parties localement fermées Y_i telles que (munissant Y_i de la structure réduite induite) F induise sur chaque $X_i = X \times_Y Y_i$ un faisceau plat par rapport à Y_i.

Exposé V

Le groupe fondamental : généralités

105

0 Introduction

Le présent Séminaire est la suite du Séminaire 1960. Nous référons à ce dernier par des sigles tels que (SGA I 9.7) qui signifie : Séminaire de Géométrie Algébrique, exposé I, N° 9.7. Les numéros des exposés de 1961 suivront ceux de 1960. Nous référons aux Éléments de Géométrie Algébrique de Dieudonné-Grothendieck par des sigles tels que (EGA I 8.7.3).

Le présent exposé résume (avec de légers compléments) les derniers exposés de 1960, qui n'avaient pas été rédigés.

Comme en 1961, nous nous limiterons en règle générale à des préschémas localement noethériens, bien que souvent cette restriction soit inessentielle. Nous admettrons dans l'exposé VI la théorie de la descente fidèlement plate, résumée dans Séminaire Bourbaki N° 190. S'il y a lieu, nous en donnerons un exposé plus détaillé dans un exposé ultérieur[1], une fois que le lecteur aura eu l'occasion de se convaincre de l'utilité de cette technique, pour la théorie du groupe fondamental.

1 Préschéma à groupe fini d'opérateurs, préschéma quotient

Soient X un préschéma, G un groupe fini opérant sur X par automorphismes, à droite pour fixer les idées. Si X est affine d'anneau A, G opère donc par automorphismes à gauche sur A.

Pour tout préschéma Z, G opère à gauche sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Z)$, on peut donc considérer l'ensemble

$$\mathrm{Hom}(X, Z)^G$$

[1]CF. Exp. VI et Exp. VIII

des morphismes invariants par G. Il dépend fonctoriellement de Z, on peut se demander si ce
106 foncteur est “représentable”, i.e. isomorphe à un foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}(Y, Z)$. Cela signifie qu'on peut trouver un préschéma Y, et un morphisme invariant par G

$$p\colon X \to Y$$

tel que pour tout Z, l'application correspondante $g \mapsto gp$

$$\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)^G$$

soit bijective. On dit alors que (Y, p) est un *préschéma quotient* de X par g (il est déterminé à isomorphisme unique près).

Proposition 1.1 *Soient A un anneau sur lequel le groupe fini G opère à gauche, $B = A^G$ le sous-anneau des invariants de A, $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $p\colon X \to Y$ le morphisme canonique (évidemment invariant par G). Alors*

- *(i) A est entier sur B i.e. p est un morphisme* entier.
- *(ii) Le morphisme p est surjectif, ses fibres sont les trajectoires de G, la topologie de Y est quotient de celle de X.*
- *(iii) Soit $x \in X, y = p(x), G_x$ le stabilisateur de x, alors $\kappa(x)$ est une extension algébrique quasi-galoisienne de $\kappa(y)$ et l'application canonique de G_x dans le groupe $\mathrm{Gal}(\kappa(x)/\kappa(y))$ des $\kappa(y)$-automorphismes de $\kappa(x)$ est surjectif.*
- *(iv) (Y, p) est un préschéma quotient de X par G.*

Les énoncés (i) (ii) (iii) sont bien connus en algèbre commutative[2] et sont mis seulement pour mémoire, sauf l'assertion sur la topologie, qui provient du fait général suivant, conséquence facile du théorème de Cohen-Seidenberg : un morphisme entier est fermé (i.e. transforme fermés en fermés). Notons tous de suite :

Corollaire 1.2 *Sous les conditions précédentes, l'homomorphisme naturel $\mathscr{O}_Y \to p_*(\mathscr{O}_X)^G$ est un isomorphisme.*

Cela résulte aussitôt de la formule

$$(S^{-1}A)^G = S^{-1}(A^G)$$

valable pour toute partie multiplicativement stable S de $B = A^G$ (formule qui se module, et s'énonce plus généralement pour un changement de base $A \to A'$ qui est *plat*), appliquée au cas où S est engendré par un élément f de B.

107 L'assertion (ii) et cor. 1.2 impliquent facilement (iv) ; plus généralement, on aura ceci :

Proposition 1.3 *Soient X un préschéma à groupe d'automorphismes finis G, $p\colon X \to Y$ un morphisme affine invariant tel que $\mathscr{O}_Y \xrightarrow{\sim} p_*(\mathscr{O}_X)^G$. Alors les conclusions (i) (ii) (iii) (iv) de 1.1 sont encore valables.*

[2] Cf. N. Bourbaki, Alg. Comm. Chap. 5, §1 et §2, th. 2.

En effet, pour (i) (ii) (iii) on peut supposer Y donc X affine, et si B, A sont leurs anneaux, l'hypothèse implique $B = A^G$, il suffit d'appliquer 1.1. Pour (iv), on utilise (ii) et $\mathscr{O}_Y = p_*(\mathscr{O}_X)^G$.

Corollaire 1.4 *Sous les conditions de 1.3, pour tout ouvert U de Y, U est un quotient de $X|U = p^{-1}(U)$ par G.*

En effet, $p^{-1}(U) \to U$ induit par p satisfait aux mêmes hypothèses que p.

Si maintenant X est un Z-préschéma et les opérations de G sont des Z-automorphismes, alors par (iv) Y est un Z-préschéma. Ceci dit :

Corollaire 1.5 *Pour que X soit affine resp. séparé sur Z, il faut et il suffit que Y le soit. Si X est de type fini sur Z, il est* fini *sur Y ; si de plus Z est localement noethérien, Y est de type fini sur Z.*

Comme X est affine et a fortiori séparé sur Y, si Y est affine resp. séparé sur Z, X l'est aussi. Réciproquement, supposons X affine sur Z, prouvons que Y l'est : on peut grâce à 1.4 supposer Z affine, et on est ramené à prouver que si X est affine, Y l'est, ce qui résulte de la détermination explicite de Y comme $\mathrm{Spec}(A)^G$ faite dans 1.1. De même, comme $p\colon X \to Y$ est entier donc universellement fermé, et surjectif, il s'ensuit que si X est séparé sur Z, Y l'est aussi (lemme à dégager !) ; en effet, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times_Z X \arrow[r, "p\times_Z p"] & Y \times_Z Y \\ X \arrow[u, "\Delta_{X/Z}"] \arrow[r, "p"] & Y \arrow[u, "\Delta_{Y/Z}"'] \end{tikzcd}$$

le morphisme $X \times_Z X \to Y \times_Z Y$ est fermé, donc transforme la diagonale (fermée) de $X \times_Z X$ en une partie fermée de $Y \times_Z Y$, qui n'est d'ailleurs autre que la diagonale de ce dernier puisque p est surjectif. — Si X est de type fini sur Z, il l'est a fortiori sur Y donc il est fini sur Y (puisqu'il est déjà entier sur Y). Supposons de plus Z localement noethérien, prouvons que Y est de type fini sur Z. On peut grâce à 1.4 supposer Z affine. Comme l'espace topologique X est quasi-compact et que $p\colon X \to Y$ est surjectif, Y est également quasi-compact donc réunion
108 finie d'ouverts affines, et par 1.4 on est ramené au cas où Y est affine, donc X affine. Mais alors l'anneau A de X est une algèbre de type fini sur l'anneau C de Z qui est noethérien, et il est connu que $B = A^G$ est alors également une algèbre de type fini sur C (car A sera entière, donc finie sur une sous-algèbre B' de B de type fini sur C, donc comme B' est noethérien, B est
part 22 également finie sur B', donc de type fini sur C).

109 **Corollaire 1.6** *Pour que X soit affine resp. un schéma, il f et s que Y le soit.*

Définition 1.7 *Soit X un préschéma où un groupe fini G opère à droite. On dit que G* opère de façon admissible *s'il existe un morphisme $p\colon X \to Y$ ayant les propriétés de 1.3 (ce qui implique que X/G existe et est isomorphe à Y).*

Proposition 1.8 *Soit X un préschéma où le groupe fini G opère à droite. Pour que G opère de façon admissible, il faut et il suffit que X soit réunion d'ouverts affines invariants par G, ou encore que toute trajectoire de G dans X soit contenue dans un ouvert affine.*

Cette dernière condition est évidemment impliquée par la première, et à son tour elle l'implique ; car soit T une trajectoire de G, U un ouvert affine la contenant, l'intersection des transformés de U par les g G est alors un ouvert U' stable par G, contenant T et contenu dans l'ouvert affine U. Comme dans U, toute partie finie a un système fondamental de voisinages ouverts affines, il existe un voisinage ouvert affine V de T contenu dans U'. Ces transformés par les g G sont donc affines et contenus dans U' qui est *séparé*, donc leur intersection U'' est un ouvert affine qui est invariant par G et contient T. — Ceci posé, la condition envisagée dans 1.8 est *nécessaire*, car on prendra les images inverses X_i d'ouverts afiines Y_i recouvrant Y. Elle est suffisante, car on peut alors par 1.1 construire les quotients $Y_i = X_i/G$; dans chaque Y_i l'image de $X_i \cap X_j$ est un ouvert Y_{ij} s'identifiant à X_{ij}/G par 1.4, en particulier on en déduit des isomorphismes $Y_{ij} \xrightarrow{\sim} Y_{ji}$ permettant de recoller les Y_i pour construire Y. Serre préfère construire directement l'espace topologique quotient Y de X par G, mettre dessus le faisceau $p_*(\mathscr{O}_X)^G$ et vérifier que Y devient un préschéma et qu'on est alors sous les conditions de 1.3.

Corollaire 1.7 *Si G opérant sur X est admissible, il en est de même pour tout sous-groupe H de G (donc X/H existe).*

Cela peut aussi se vérifier directement sur la situation 1.3, en notant qu'on peut toujours supposer X affine sur un Z et les $s \in G$ opèrent par Z-automorphismes (on prend par exemple $Z = Y$) ; on en effet :

Corollaire 1.8 *Supposons X affine sur Z, et les opérations de G des Z-automorphismes. Alors G opère sur X de façon admissible. Si X est défini par un faisceau quasi-cohérent $\mathscr{A}$ d'algèbres, Y est défini par le faisceau $\mathscr{A}^G$ des invariants de $\mathscr{A}$ par G.*

Proposition 1.9 *Supposons que G opère de façon admissible sur X, et que $X/G = Y$ soit un préschéma sur Z. Considérons un morphisme de changement de base $Z' \to Z$, posons $X' = X \times_Z Z', Y' = Y \times_Z Z'$, de sorte que G opère encore par transport de structure sur X', le morphisme $p' : X' \to Y'$ étant invariant. Si Z' est* plat *sur Z, alors p' satisfait encore les hypothèses de 1.3 i.e. $\mathscr{O}'_Y \to p'_*(\mathscr{O}_{X'})^G$ est un isomorphisme (p' étant de toutes façons affine). Donc G opère de façon admissible sur X', et $(X/G) \times_Z Z' \approx (X \times_Z Z')/G$.*

On peut évidemment supposer $Z = Y$, on est ramené au cas où de plus Y et Y' sont affines. Il faut montrer que si B est le sous-anneau des invariants de G opérant dans A, et si B' est une algèbre sur B plate sur B, alors B' est la sous-algèbre des invariants de $A' = A \otimes_B B'$. C'est immédiat, car la suite exacte

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A^{(G)}$$

(où le dernier terme signifie une puissance de A, et où $j(x)$ est le système des $s \cdot x - x,\ s \in G$) reste exacte par tensorisation par A'.

On fera attention que l'hypothèse de platitude était essentielle pour la validité du résultat ; en particulier, si Y' est un sous-préschéma fermé de X (par exemple même un point fermé de X), X' son image inverse dans X, alors Y' *ne s'identifie pas* en général à X'/G. Nous verrons qu'il en est néanmoins ainsi si X est étale sur Y.

Pour finir, donnons un formalisme aussi commode que trivial. Soit Y un préschéma. Comme dans la catégorie des préschémas, les sommes directes existent, on peut pour tout ensemble E considérer le préschéma somme d'une famille $(Y_i)_{i \in E}$ de préschémas tous identiques à Y, ce
110 préschéma sera noté $Y \times E$. Il est caractérisé par la formule

$$(*) \qquad \operatorname{Hom}(Y \times E, Z) = \operatorname{Hom}(E, \operatorname{Hom}(Y, Z))$$

où le deuxième Hom désigne évidemment l'ensemble des applications de l'ensemble E dans l'ensemble $\operatorname{Hom}(Y, Z)$. On a un morphisme canonique

$$Y \times E \to Y$$

faisant de $Y \times E$ un préschéma sur Y. Comme les produits fibrés commutent aux sommes directes (dans la catégorie des préschémas) on aura, si Y est un préschéma sur un autre Z, pour un changement de base $Z' \to Z$:

$$(Y \times E) \times_Z Z' = (Y \times_Z Z') \times E$$

(formule surtout utile si $Z = Y$). D'autre part, on conclut trivialement de la définition

$$(Y \times E) \times F = Y \times (E \times F) = (Y \times E) \times_Y (Y \times F)$$

(la dernière formule cependant résultant de la commutativité signalée plus haut)

Pour Y fixé, on peut regarder $Y \times E$ comme un foncteur en E, à valeurs dans les préschémas sur Y, foncteur qui commute aux produits finis d'après la formule précédente, (ce qui permet par exemple à tout groupe ordinaire G de faire correspondre un schéma en groupes $Y \times G$ sur Y, qui sera fini sur Y si Y l'est, etc...). Plus généralement, ce foncteur est “exact à gauche”, mais nous n'aurons pas à nous en servir ici. Ce foncteur commute aussi trivialement aux sommes directes, et il est aussi “exact à droite”, comme on voit aussitôt sur la formule de définition $(*)$. En particulier, si le groupe fini G opère à droite dans l'ensemble E, alors il opère à droite dans $Y \times E$, et on a

$$(Y \times E)/G = Y \times (E/G)$$

où en fait le quotient du premier membre satisfait aux conditions de 1.3 (c'est immédiat).

2 Groupes de décomposition et d'inertie. Cas étale

111 Soit G groupe fini opérant à droite sur le préschéma X. Si $x \in X$, on appelle *groupe de*

décomposition de x le stabilisateur $G_d(x)$ de x. Ce groupe opère canoniquement (à gauche) sur le corps résiduel $\kappa(x)$, et l'ensemble des éléments de $G_d(x)$ qui opèrent trivialement est appelé *groupe d'inertie* de x, noté $G_i(x)$.

Supposons que G opère sur X de façon admissible et que Y soit un préschéma sur un préschéma Z. Fixons-nous un $z \in Z$, et une extension algébriquement close Ω de $\kappa(z)$ ayant un degré de transcendance supérieur à celui des $\kappa(x)/\kappa(z)$, où x est un point de X au-dessus de z. On peut regarder $\mathrm{Spec}(\Omega)$ comme un Z-schéma, et les points de X à valeurs dans Ω correspondent aux homomorphismes de $\kappa(z)$-algèbres $\kappa(x) \to \Omega$, où x est un point de X au-dessus de z ; comme Ω a été prise assez grande, tout point x de X au-dessus de z est la localité d'un point de X à valeurs dans Ω. Si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ désignent respectivement l'ensemble des points de X et Y à valeurs dans Ω, on a une application naturelle

$$X(\Omega) \to Y(\Omega),$$

d'autre part, G opère sur $X(\Omega)$ et l'application précédente est invariante par G. Ceci posé, les conclusions (ii) et (iii) de 1.3 s'interprètent aussi ainsi : *l'application précédente est surjective et identifie $Y(\Omega)$ au quotient $X(\Omega)/G$. De plus, si x est la localité de $a \in X(\Omega)$, alors le stabilisateur de a dans G n'est autre que le groupe d'inertie $G_i(x)$*. Tout ceci est d'ailleurs vrai sans supposer Ω "assez grand", cette dernière hypothèse sert uniquement à assurer qu'on peut caractériser le groupe d'inertie de tout élément de X au-dessus de z comme un stabilisateur "géométrique". On en conclut par exemple aussitôt :

Proposition 2.1 *Faisons une extension de la base $Z' \to Z$, d'où $X' = X \times_Z Z'$. Soit x' un point de X', x son image dans X, alors on a $G_i(x) = G_i(x')$.*

Il suffit, dans les considérations ci-dessus, de prendre pour Ω une extension assez grande de $\kappa(z')$ (où z, z' sont les images de x, x' dans Z, Z').

Proposition 2.2 *Sous les conditions de 1.3, supposons Y localement noethérien, X fini sur Y.*
112 *Soit H un sous-groupe de G, considérons $X' = X/H$ (cf 1.7), soit $x \in X$, x' son image dans X' et y son image dans Y.*

(i) Si $H \supset G_d(x)$, alors l'homomorphisme $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_{x'}$ induit un isomorphisme sur les complétés.

(ii) Si $H \supset G_i(x)$, alors l'homomorphisme $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_{x'}$ est étale i.e. X' est étale sur Y en x'.

Soit $Y_1 = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}_y})$, faisons le changement de base $Y_1 \to Y$, on trouve un $X_1 = X \times_Y Y_1$ fini sur Y_1, sur lequel G opère, le quotient étant Y_1 par 1.9. Soit y_1 l'unique point de Y_1 au-dessus de y, comme $\kappa(y) = \kappa(y_1)$, il s'ensuit que la fibre de X en y est isomorphe à celle de X_1 en y_1, d'où un unique point x_1 de X_1 au-dessus de x. D'ailleurs par 1.9 on aura $X_1/H = X'_1 = X' \times_Y Y_1$, soit x'_1 l'image de x_1 dans X'_1, il est au-dessus de x', et on vérifie facilement (X' étant de type fini sur Y) que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{x'} \to \mathscr{O}_{x'_1}$ induit un isomorphisme sur les complétés. Donc on est ramené au cas où Y est le spectre d'un anneau local complet, soit B, donc X le spectre d'un anneau fini A sur B, composé d'un nombre fini d'anneaux locaux A_x correspondants aux points x_i de X sur Y. Si A_0 correspond à $x = x_0$, alors A s'identifie à l'anneau $\mathrm{Hom}_{G_d}(G, A_0)$ des fonctions $f\colon G \to A_0$ telles que $f(st) = sf(t)$ pour $s \in G_d$, les opérations de G sur ces fonctions étant définies par $(uf)(t) = f(tu)$. On voit donc que si H est un sous-groupe quelconque de G, alors A^H est l'anneau des fonctions $f\colon G \to A_0$ telles que

$$f(stu) = sf(t) \qquad \text{pour } s \in G_d,\ u \in H$$

donc c'est un anneau semi-local dont les composants locaux correspondent aux doubles classes $G_d aH$ dans G, à la double classe définie par $a \in G$ correspondant (grâce à l'application $f \mapsto f(a)$) le sous-anneau $A_0^{H(a)}$ de A_0, où $H(a) = G_d \cap aHa^{-1}$. D'ailleurs, le composant local de A^H correspondant à l'image x' de x est aussi celui correspondant à la double classe $G_d H$ de l'élément neutre, son composant local est donc $A_0^{G_d \cap H}$. Si donc $G_d \in H$, on trouve $A_0^{G_d} = A^G = B$, ce qui prouve (i). Pour prouver (ii), on peut, en passant à une extension finie plate convenable de A, et utilisant 2.1, se ramener au cas où l'extension résiduelle $\kappa(x)/\kappa(y)$ est
part 23 triviale. Mais alors $G_i(x) = G_d(x)$, et on est ramené au cas précédent.

113 **Corollaire 2.3** *Sous les conditions de 2.2, supposons $G_i(x) = (e)$, alors X est étale sur Y en x. Donc si $G_i(x) = (e)$ pour tout $x \in X$, alors $X \to Y$ est un morphisme étale.*

Il y a une réciproque partielle :

Corollaire 2.4 *Supposons X connexe et le groupe G fidelè sur X. Pour que $p\colon X \to Y = X/G$ soit étale, il faut et il suffit que les groupes d'inertie des points de X soient réduits à l'élément neutre. S'il en est ainsi, G s'identifie au groupe de tous les Y-automorphismes du Y-schéma X.*

Compte tenu de 2.3, on peut supposer X étale sur Y. Mais si un $s \in G$ est dans un $G_i(x)$, il résulte alors de I 5.4 que s opère trivialement sur G, donc est l'élément unité puisque G est fidèle, ce qui prouve la première assertion. Soit u un Y-automorphisme de X, soit $x \in X$. D'après la proposition 1.3, il existe un $s \in G$ tel que $s(x) = u(x)$, et induisant le même homomorphisme résiduel $\kappa(x) = \kappa(x')$ que u. Par loc. cit. on a donc $s = u$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.5 L'hypothèse que G opère fidèlement n'est évidemment par surabondante dans le corollaire 2.4. Il en est de même de l'hypothèse que X est connexe, comme on voit par exemple en prenant $X = Y \times E$, E étant un ensemble fini, et G le groupe des permutations de E : G opère avec force inertie, néanmoins $(Y \times E)/G = Y \times (E/G) = Y$, et X est étale sur Y. Prenant pour G un groupe strictement plus petit que le groupe symétrique de E, mais opérant transitivement sur E, on voit qu'il y aura aussi des Y-automorphismes de X ne provenant pas de G.

L'exemple type d'un groupe G opérant sant inertie est celui de $Y \times G$, sue lequel on fait opérer G grâce à ses opérations sur le facteur G par translations à droite : un Y-préschéma X à groupe d'opérteurs à droite Gest dit *trivial* s'il est isomorpe à $Y \times G$.

Pour faire le lien entre le préschémas à groupes finis d'opérateurs et la notion de fibré principal dans une catégorie(lien dont nous n'aurons pas besoin d'ailleurs pour la suite du séminaire,

mais important dans d'autres contextes) les considérations suivantes sont utiles. Nous fixons un préschéma de base Y, et nous plaçons dans le catégorie des Y-préschémas. Si G est un groupe
114 fini, nous poserons pour abréger $G_Y = Y \times G$, c'est donc un schéma en groupes finis sur Y (cf $n°1$), et si X est un Y-préschéma, on a

$$X \times_Y G_Y = X \times G$$

(même référence). La donnée d'un Y-morphisme $X \times_Y G_Y \to X$ équivaut donc à la donnée d'un Y-morphisme $X \times G \to X$, i.e. à la donnée pour tout $g \in G$ d'un Y-morphisme $T_g \colon X \to X$. On constate aussitôt que pour que la donnée des T_g définisse sur X une structure de préschéma à groupe d'opérateurs à droite G, (i.e. $T_{gg'} = T_{g'}T_g$, $T_e = id_x$) il faut et il suffit que le Y-morphisme correspondant $X \times_Y G_Y \to X$ définisse sur X une structure de Y-préschéma 'a Y-schéma en groupes d'opérateurs, (au sens général des objets à $\mathscr{C}$-groupe d'opérateurs dans une catégorie $\mathscr{C}$). Supposons qu'il en soit ainsi. Rappelons que X est dit *formellement principal homogène* sous G_Y[3] si le morphisme canonique

$$X \times_Y G_Y \to X \times_Y X$$

dont les composantes sont respectivement pr_1 et le morphisme de multiplication $\pi \colon X \times_Y G_Y \to X$, est un isomorphisme. En l'occurence, identifiant le premier membre à $X \times G$, le morphisme considéré est celui qui, à tout $g \in G$, associe le morphisne

$$(id_X, T_g) = (id_X \times_Y T_g)\Delta_{X/Y} \colon X \to X \times_Y X$$

et par suite, dire que X est formellement principal homogène sous G_Y signifie aussi que $X \times_Y X$ est isomorphe à la somme directe des transformées de la diagonale les éléments (e, g) de $G \times G$(opérant sur $X \times_Y X$ de façon évidente) où e désigne l'élément unité de G. Si on ne veut pas distinguer la gquche et la droite et donner une formule qui reste applicable au produit de plus de deux facteurs identiques à X, on peut formuler la condition en disant que le morphisme canonique

$$X \times_G (G \times G) \to X \times_Y X$$

obtenu en attachant au couple (g, g') le morphisme

$$(T_g, T_{g'}) = (T_g \times_Y T_{g'})\Delta_{X/Y} \colon X \to X \times_Y X$$

et faisant opérer G à qauche sur $G \times G$ par l'homomorphisme diagonal ;

$$s(g, g') = (sg, sg'),$$

est un *isomorphisme*.

115 La notion d'*espace principal homogène* est déduite de celle de l'espace formellement principal homogène en ajoutant un axiome supplémentaire, assurant que le "quotient" de X par G_Y existe et est précisément l'object unité à droite de la catégorie, ici Y. Cet axiome peut varier

[3]on dit plutôt maintenant : X est un pseudo-torseur sous G_Y.

suivant le contexte, et s'explicite souvent le plus commodément (dans le yoga de la "descente") en exigeant que l'objet à opérateurs devienne "trivial" i.e. isomorphe au produit $X \times_Y G_Y$ (en l'occurrence $X \times G$) par un changement de base convenable, de type précisé (de telle façon, en practique, à permettre la technique de descente ; cf. Grothendieck, Technique de descente et théorèmes d'existence en Géometrie Algébrique, Sém. Bourbaki N$^{\text{o}}$ 190, pages 26 28)[4]. Dans cet ordee d'idées, signalns ici la caractérisation des fibrés principaux homogènes de groupe G (au sens de loc.cit.) :

Proposition 2.6 *Soient Y un préschéma localement noethérien, X un Y-préschéma à groupe fini G d'opérateurs opérant à droite. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est fini sur Y, $Y = X/G$, les groupes d'inertie des points de X sont réduits à l'unité.*

(ii) *Il existe un changement de base fidèlement plat et quasi-compact $Y_1 \to Y$ tel que $X_1 = X \times_Y Y_1$ soit un Y_1-préschéma à opérateurs trivial, i.e. isomorphie à $Y_1 \times G$.*

(ii bis) *Comme (ii), mais $Y_1 \to Y$ étant fini, étale, surjectif.*

(iii) *X est formellement principal homogène sous G_Y, et fidèlement plat et quasi-compact sur Y.*

Démonstration (i) $\Rightarrow$ (ii bis) On prendra $Y_1 = X$, notant que $X \to Y$ est bien fini, étale par 2.3 et surjectif. Montrons que X_1 est alors trivial sur Y_1, ce que résultera du

Corollaire 2.7 *Si (i) est vérifié et si X admet une section sur Y, alors X est un espace à opérateurs trivial.*

En effet, cette section permet de définir un G-morphisme $X \times G \to X$, surjectif puisque G est transitif sur les fibres de X, injectif puisque G opère sans inertie ; enfin, c'est un isomorphisme local en virtu de I 5.3 puisque X est étale sur Y. Donc c'est un isomorphisme.

116 (ii bis) implique trivialement (ii), qui implique (i) cas les ingrédients de (i) sont "invariants" par extension fidelèment plate quasi-compacte de la base (cf Séminaire Bourbaki cité plus haut pour "fini" ; pour les groupes d'inertie, on applique 2.1 , et pour $Y = X/G$, une réciproque de 1.9 dans le cas d'un changement de base *fidèlement plat*, que nous avions oublié d'expliciter).

Nous avons prouvé (i) $\Rightarrow$ (iii) en passant en prouvant (i) $\Rightarrow$ (ii bis). Enfin (iii) $\Rightarrow$ (ii), cas la première hypothèse dans (iii) signifie précisément puisque X est fidèlement plat et quasi-compact sur Y.

Définition 2.8 *Un Y-préschéma X à groupe d'opérateurs à droite G satisfaisant les conditions équivalentes de 2.6 est appelé un* revêtement principal de Y, de groupe de Galois G.

[4]Cf. Exp. VIII pour la théorie de la descente plate.

3 Automorphismes et morphismes de revêtements étales

Proposition 3.1 *Soit X étale séparé de type fini sur Y localement noethérien, soit G un groupe fini opérant sur X par Y-automorphismes. Alors G opère de façon admissible et le préschéma quotient X/Y est étale sur Y.*

On ne suppose pas X fini sur Y, cependant X est quasi-projectif sur Y d'où l'existence de X/G grâce à 1.8. Prouvons d'abord

Corollaire 3.2 *Le morphisme $X \to X/G$ est étale.*

On peut supposer évidemment G transitif sur l'ensemble des composantes connexes de X, puis par considération du stabilisateur d'une composante connexe, que X est même connexe. Enfin, on peut supposer que G opère fidèlement. Mais alors on voit comme dans 2.4 que G opère sans inertie, donc par 2.3 il s'ensuit que $X \to X/G$ est étale. On conclut grâce au

Lemme 3.3 *(remords à l'exposé I). Soient $X \to X' \to Y$ des morphismes de type fini, x un point de X, x' et y ses images. On suppose Y localement noethéien. Si deux des morphismes envisages sont étales aux points marqués, il en est de même de troisisième.*

Il reste seulement à regarder le cas où $X \to X'$ et $X \to Y$ sont étales en x et prouver que
117 $X' \to Y$ l'est en x' (ce qui est le cas dont nous avons besoin pour 3.1). Faisant une extension plate convenable de la base Y, on est ramené au cas où l'extension résiduelle $\kappa(x)/\kappa(y)$ est triviale. Considérons les homomorphismes $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_{x'} \to \mathscr{O}_x$ et les homomorphismes déduits par passage aux complétés, l'hypothèse signifie que $\hat{\mathscr{O}}_y \to \hat{\mathscr{O}}_x$ et $\hat{\mathscr{O}}_{x'} \to \hat{\mathscr{O}}_x$ sont des isomorphismes, d'où aussitôt que $\hat{\mathscr{O}}_y \to \hat{\mathscr{O}}_{x'}$ en est un, ce qui prouve le lemme.

Corollaire 3.4 *Si X est fini et étale sur Y, alors X/G est fini et étale sur Y.*

Proposition 3.5 *Soient X,X' deux revêtements étales de Y. Alors tout Y-morphisme $f\colon X \to X'$ se factorise en le produit d'un morphisme étale surjectif $X \to X''$ et de l'immersion canonique $X'' \to X'$ d'une partie X'' de X' à la fois ouverte et fermée.*

On sait (I 4.8) que f est étale, donc un morphisme ouvert, d'autre part X étant fini sur Y, f est fermé, donc $f(X) = X''$ est une partie à la fois ouverte et fermée de X'. On a fini (N.B. il suffisait que X', au lieu d'un revêtement étale, soit non ramifié sur Y).

Corollaire 3.6 *Avec les notations précédentes, $X \to X'$ est un épimorphisme strict dans la catégorie des préschémas, et $X' \to X$" est un monomorphisme (et même un monomorphisme strict) dans la catégorie des préschémas.*

La première assertion signifie par définition que la suite de morphismes

$$X \times_{X''} X \overset{pr_1}{\underset{pr_2}{\rightrightarrows}} X \longrightarrow X''$$

est exact, et cela résulte du fait que $X \to X''$ est fini e t fidèlement plat, comme on voit facilement (cf Grothendieck, loc cit). L'assertion duale pour $X'' \to X'$ est encore plus triviale.

Le corollaire 3.6 nous sera utile pour la théorie du groupe fondamental au N° suivant ; il est possible (pour ceux qui n'aiment pas la notion d'épimorphisme strict) de remplacer le corollaire 3.6 par telle variante que le lecteur arrangera à son goût personnal. Profitons seulemsnt de l'oc-
118 casion pour signaler qu'une factorisation $f = f'f''$, avec f'' un épimorphisme strict et f' un monomorphisme, est nécessairement unique à isomorphisme unique près (dans toute catégorie) ; cepandant, il peut exister en même temps une factorisation $f = f_1 f_2$ ayant les propriétés duals : f_2 est un épimorphisme, f_1 un monomorphisme strict, (également unique à isomorphisme unique près), qui ne soit pas isomorphe à la précédente : il suffit de prendre par exemple la catégorie des espaces vectoriels totologiques (séparés, si on y tient), et pour $u\colon X \to X'$ un morphisme tel que $u(X)$ ne soit pas fermé.

Proposition 3.7 *Soient Y un préschéma connexe localement noethérien, y un point de Y, Ω une extention algébriquement close de $\kappa(y)$. Pour tout X sur Y, on désigne par $X(\Omega)$ l'ensenble des points de X à valueurs dans Ω. Soient X,X' des revêtements étales de Y et $u\colon X \to X'$ un Y-morphisme tel que l'application correspondante $X(\Omega) \to X'(\Omega)$ soit un isomorphisme. Alors u est un isomorphisme.*

On est immédiatement ramené au cas où X' est connexe. Comme $X \to X'$ est fini et étale, on sait que le nombre géométrique de points dans une fibre de $X \to X'$ est constant, et égal à 1 si et seulment si le morphisme sonsidéré est un isomorphisme. Or ce nombre est aussi le nombre
part 24 d'éléments dans une fibre de $X(\Omega) \to X'(\Omega)$, d'où la conclusion.

4 Conditions axiomatiques d'une théorie de Galois

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie, F un foncteur covariant de $\mathscr{C}$ dans la catégorie des ensembles finis. Supposons les conditions suivantes satisfaites :

(G 1) $\mathscr{C}$ a un objet final[5] et le produit fibré de deux objets au-dessus d'un troisième dans $\mathscr{C}$ existe (cet axiome peut aussi s'énoncer en disant que dans $\mathscr{C}$ les limites projectives finies existent).

(G 2) Les sommes finies dans $\mathscr{C}$ existent (donc aussi un objet initial $\phi_{\mathscr{C}}$, jouant le rôle de l'ensemble vide), ainsi que le quotient d'un objet de $\mathscr{C}$ par un groupe fini d'automorphismes.

(G 3) Soit $u\colon X \to Y$ un morphisme dans $\mathscr{C}$, alors u se factorise en un produit $X \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{u''} Y$, avec u' un épimorphisme *strict* et u'' un monomorphisme, qui est
119 un isomorphisme sur un sommando direct de Y.

[5]Rappelons qu'un objet e de $\mathscr{C}$ est appelé objet final si pour tout X dans $\mathscr{C}$, $Hom(X, e)$ a exactement un élément. On définit de façon duale un objet initial de $\mathscr{C}$.

(G 4) Le foncteur F est exact à gauche (i.e. transforme unité à droite en unité à droite, et commute aux produits fibrée).

(G 5) F commute aux sommes directes finies, transforme épimorphismes stricts en épimorphismes, et commutee au passage au quotient par un groupe fini d'automorphismes.

(G 6) Soit $u\colon X \to Y$ un morphisme dans $\mathscr{C}$ tel que $F(u)$ soit un isomorphisme, alors u est un isomorphisme.

Notre objet est construire un groupe topologique π , limite projective de groupes finis, et une équivalence de la catégorie $\mathscr{C}$ avec la catégorie $\mathscr{C}(\pi)$ *des ensembles finis où π opère continûment* (i.e. de telle façon que le stabilisateur d'un point soit un sous-goupe ouvert, ou encore qu'il existe un groupe quotient discret qui opère déjà sur l'ensemble envisafé), l'équivalence construite transformant le foncteur donné F en le foncteur d'inclusion évident de $\mathscr{C}(\pi)$ dans la catégorie des ensembles finis. On notera tout de suite que la catégorie $\mathscr{C}(\pi)$ construite à l'aide d'un groupe topologique π , et le foncteur d'inclusion précédent, satisfont bien aux conditions (G 1) à (G 6).

Nous procédons en plusieurs étapes.

a) *Soit $u\colon X \to Y$ dans $\mathscr{C}$. Pour que u soit un monomorphisme, il faut et il suffit $F(u)$ le soit.* (Utilise (G 1), (G 4), (G 6)).

En effet, dire que u est un monomorphisme signifie que la projection $pr_1\colon X \times_Y X \to X$ est un isomorphisme.

b) *Tout objet X de $\mathscr{C}$ est artinien.*

En effet, si $X' \to X'' \to X$ sont des monomorphismes tels que $F(X')$ et $F(X'')$ aient même image dans $F(X)$, alors par a) $F(X') \to F(X'')$ est un isomorphisme, donc $X' \to X''$ est un isomorphisme par (G 6).

c) *Le fonteur F est strictement pro-représentable*. (cf. Grothendieck, Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, II, Séminaire Bourbaki 195, février 1960).

En effet, d'après loc cit prop. 3.1 , cela résulte de b) et (G 4). On peut donc trouver un système projectif sur I ordonné filtrant :

$$P = (P_i)_{i \in I}$$

120 dans $\mathscr{C}$, considéré comme pro-objet de $\mathscr{C}$, et un isomorphisme fonctoriel

$$(*) \qquad F(X) = \operatorname{Hom}_{Pro(\mathscr{C})}(P, X) = \varinjlim_i \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(P_i, X)$$

Cet isomorphisme est réalisé par un élément

$$\varphi \in \varprojlim_i F(P_i) = F(P)$$

On peut supposer de plus que les homomorphismes de transition $\varphi_{ji}\colon P_i \to P_j (i \geq j)$ sont des *épimorphismes*, et que *tout épimorphisme* $P_i \to P'$ soit équivalent à un épimorphisme $P_i \to P_j$ pour $j \leq i$ convenable (ce qui détermine le système projectif P de façon essentiellement unigue).

Un objet $X \in \mathscr{C}$ est dit *connexe* s'il n'est pas isomorphe à la somme de deux objets de $\mathscr{C}$ non isomorphes à l'objet initial $\phi_{\mathscr{C}}$.

d) *Les P_i sont connexes et non isomorphes à $\phi_{\mathscr{C}}$.*

Si X est une unité à gauche, on a $F(X) = \emptyset$ par (G 5) appliqué à la somme directe d'une famille vide, et réciproquement par (G 6). Donc si X' est un objet de $\mathscr{C}$ qui n'est pas unité à gauche, i.e. tel que $F(X') \neq \emptyset$, il n'existe aucun morphisme de X' dans X. Donc si un P_i est unité à gauche, alors i est un plus grand élément de l'snsemble d ;indices ordonné filtrant I, et la formule $(*)$ signifierait $F(X) = \operatorname{Hom}(P_i, X)$ =ensemble réduit à un élément pour tout X, ce qui est absurde puisque $F(\phi_{\mathscr{C}}) = \emptyset$. Donc les P_i sont non isomorphe à $\phi_{\mathscr{C}}$.

Supposons qu'on ait $P_i = F(A) \amalg F(B)$, en particulier l'élément a_i de $F(P_i)$, correspondant par $(*)$ à l'homomorphisme identique $P_i \to P_i$, est dans $F(A) \amalg F(B)$, par exemple dans $F(A)$. Cela signifie qu'il exisre un $j \geq i$ tel que $\varphi_{ij}\colon P_j \to P_i$ se factorise en $P_j \to A \to P_i = A \amalg B$, où la deuxième flèche est le morphisme canonique. Donc $F(P_j) \to F(P_i)$ se factorise en $F(P_j) \to F(A) \to F(P_i) = F(A) \amalg F(B)$, et comme $F(P_j) \to F(P_i)$ est surjectif par (G 5), il s'ensuit que $F(B) = \emptyset$, donc B est isomophe à
121 $\phi_{\mathscr{C}}$.

e) *Tout morphisme $u\colon X \to Y$ dans $\mathscr{C}$, avec X non isomorphe à $\phi_{\mathscr{C}}$ et Y connexe, est un épimorphisme strict. Tout endomorphisme d'un objet connexe est un automorphisme.*

Considérons la factorisation (G 3) de u, comme $X \neq \phi_{\mathscr{C}}$ il résulte de (G 6) que $F(X) \neq \emptyset$ donc $F(Y') \neq \emptyset$ donc $Y' \neq \phi_{\mathscr{C}}$, donc Y étant connexe, Y' s'identifie à Y, donc u est un épimorphisme strict. Supposons que u soit un endomorphisme de l'objet connexe X, prouvons que c'est un automorphisme. En effet, on peut supposer X non isomorphe à $\phi_{\mathscr{C}}$, donc u est un épimorphisme strict par ce qui précède, donc $F(u)$ est un épimorphisme par (G 5), et comme $F(X)$ est un ensemble fini, $F(u)$ est bijectif. Donc u est un automorphisme par (G 6).

En particulier, *tout endomorphisme d'un P_i est un automorphisme.*

f) *Les conditions suivantes sur un P_i sont équivalentes* : (i) L'application unjective naturelle $\operatorname{Hom}(P_i, P_i) \to \operatorname{Hom}(P, P_i) \simeq F(P_i)$ est aussi surjective, i.e. pour tout $u\colon P \to P_i$ il existe un $v\colon P_i \to P_i$ tel que $u = v\varphi_i$ (où φ_i est l'homomorphisme canonique $P \to P_i$). (ii) Le groupe $\operatorname{Aut}(P_i)$ opère de façon transitive sur $F(P_i)$. (iii) Le groupe $\operatorname{Aut}(P_i)$ opère de façon simplement transitive sur $F(P_i)$.

En effet, identifiant $\operatorname{Hom}(P, P_i)$ à $F(P_i)$, l'application envisagée dans (i) n'est autre que $v \rightarrowtail F(v)(\varphi_i)$. L'équivalence des trois conditions provient alors du fait que $\operatorname{Hom}(P_i, P_i) = \operatorname{Aut}(P_i)$ et que l'application précédente est déjà injective.

Un P_i satisfaisant les conditions équivalences (i)(ii)(iii) de f) est appelé *galoisien*.

g) *Pour tout X dans $\mathscr{C}$, il existe un P_i* galoisien *tel que tout $u \in \operatorname{Hom}(P,X)$ se factorise en* $P \xrightarrow{\varphi_i} P_i \longrightarrow X$.

Soit $J = \operatorname{Hom}(P,X) = F(X)$, c'est un ensemble fini, donc il existe un P_j tel que tout $u\colon P \to X$ se factorise en $P \xrightarrow{j} P_j \longrightarrow X$, ou encore tel que le morphisme naturel

$$P \to X^J \qquad (J = \operatorname{Hom}(P,X))$$

se factorise en

$$P \xrightarrow{\varphi_j} P_j \longrightarrow X^J$$

122 En vertu de (G 3), le morphisme $P_j \to X^J$ se factorise en le produit d'un monomorphisme par un épimorphisme strict, que l'on peut prendre de la forme $\varphi_{ij}\colon P_j \to P_i$. On est donc ramené à prouver que P_i est galoisien. Soit k un indice $\geq j$ tel que tout morphisme $P \to P_i$ se factorise par $P \to P_k \to P_i$. Notons que le morphisme naturel $P_k \to X^J$ se factorise encore en le composé

$$P_k \xrightarrow{\varphi_{ik}} P_i \xrightarrow{U} X^J$$

où la première flêche est un épimorphisme strict par e), et la deuxième un monomorphisme. On veut prouver que pour un morphisme donné $\psi\colon P_k \to P_i$, il existe ub endomorphisme v de P_i tel que $\psi = v\varphi_{ik}$. Mais pour tout $u \in \operatorname{Hom}(P_i,X)$, considérons $u\psi \in \operatorname{Hom}(P_k,X)$, il est donc de la forme $u'\varphi_{ik}$ avec un $u' \in \operatorname{Hom}(P_i,X)$ bien déterminé. L'application $u \mapsto u'$ de J dans J ainsi définie par ψ est d'ailleurs injective car ψ est un épimorphisme en vertu de e) ; elle est donc bijective puisque l'ensemble J est fini. L'application bijective $u \mapsto u'$ de J dans J définit donc un isomorphisme $\alpha\colon X^J \to X^J$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} P_k \arrow[r, "\varphi_{ik}"] \arrow[d, equal] & P_i \arrow[r, "U"] & X^J \arrow[d, "\alpha", "\simeq"'] \\ P_k \arrow[r, "\psi"] & P_i \arrow[r, "U"] & X^J \end{tikzcd}$$

D'après les propriétés d'unicité de la factorisation d'un morphisme en produit d'un monomorphisme par un épimorphisme strict, il s'ensuit (puisque ψ lui aussi est un épimorphisme strict par e)) que l'on peut trouver un morphisme $v\colon P_i \to P_i$ qui laisse le diagramme commutatif, cqfd.

On en conclut en particulier que *les P_i galoisiens forment un système cofinal dans le système des* (P_j). On aura donc, puisque pour un objet galoisien P_i on a

$$\operatorname{Hom}(P,P_i) = \operatorname{Hom}(P_i,P_i) = \operatorname{Aut}(P_i),$$

par passage à la limite :

$$\operatorname{Hom}(P,P) = \varprojlim_i \operatorname{Hom}(P,P_i) = \varprojlim_i \operatorname{Hom}(P_i,P_i) = \varprojlim_i \operatorname{Aut}(P_i)$$

123 où la limite projective est prise sur les P_i galoisiens. D'ailleurs, moyennant l'identification

$\mathrm{Hom}(P, P_i) = F(P_i)$, et compte tenu que F transforme épimorphismes en épimorphismes, on voit que les homomorphismes de transition dans le système projectif précédent sont surjectifs. On conclut de tout ceci :

h) *On a*

$$\mathrm{Hom}(P, P) = \mathrm{Aut}(P) = \varprojlim_i F(P_i) = \varprojlim_i \mathrm{Aut}(P_i),$$

où la limite projective est prise sur les P_i galoisiens.

En particulier, $\mathrm{Aut}(P)$ apparaît comme limite projective d'un système projectif de groupes finis (les homomorphismes de transition étant surjectifs), on le munira de la topologie limite projective des topologies discrètes. *On désignera par π et on appellera groupe fondamental* (de $\mathscr{C}$ muni de F) *le groupe opposé à* $\mathrm{Aut}(P)$. Ce groupe opère donc *à droite* sur P , c'est la limite projective de groupes finis π_i opérant à droite sur les P_i galoisiens, π_i étant le groupe opposé à $\mathrm{Aut}(P_i)$.

Compte tenu de l'isomorphisme fonctoriel

$$F(X) = \mathrm{Hom}(P, X)$$

et de la définition de π , on voit donc que π opère *à gauche* sur $F(X)$, et d'ailleurs de façon continue d'après g) (cas avec les notations de g), c'est en fait π_i qui opère sur $F(X)$). Il est trivial que pour tout morphisme $u\colon X \to Y$ dans $\mathscr{C}$, le morphisme $F(u)\colon F(X) \to F(Y)$ est compatible avec les opérations de π. *On peut donc considérer par la suite F comme un foncteur covariant*

$$F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}(\pi)$$

où $\mathscr{C}(\pi)$ est la catégorie des ensembles finis où π opère à gauche continûment.

Nous allons maintenant définir un foncteur en sens inverse :

$$G\colon \mathscr{C} \leftarrow \mathscr{C}(\pi)$$

par la formule

$$G(E) = P \times_\pi E,$$

où $P \times_\pi E$ est défini comme solution du problème univerel résumé par

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P \times_\pi E, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\pi(E, \mathrm{Hom}(P, X))$$

124 (où dans le deuxième membre $\mathrm{Hom}(P, X) = F(X)$ est considéré comme ensemble où π opère à gauche). Il faut prouver l'existence de l'objet $P \times_\pi E$.

i) *Soit Q un objet de $\mathscr{C}$ où un groupe fini G opère à droite, et E un ensemble fini où G opère à gauche. Alors $G \times_G E$ existe, et l'application canonique*

$$F(Q) \times_G E \to F(Q \times_G E)$$

est un isomorphisme.

Comme les sommes directes finies existent dans $\mathscr{C}$ par (G 2), et que F y commute par (G 5), on est ramené aussitôt au cas où G opère transitivement sur E, car si les E_j sont les trajectoires de G dans E, on aura

$$Q \times_G E = \coprod_j Q \times_G E_j.$$

Soit alors $a \in E$, soit H son stabilisateur, on voit aussitôt sur la définition que $Q \times_G E$ s'identifie à Q/H. D'où l'existence, grâce à (G 2), et la propriété de commutation pour grâce à (G 5).

j) *Soit E un objet de $\mathscr{C}(\pi)$, et soit P_i galoisien tel que π_i opère déjà sur E. Alors $P_i \times_{\pi_i} E$ existe et on a un isomorphisme canonique*

$$E \xrightarrow{\sim} F(P_i \times_{\pi_i} E)$$

Si $j \geq i$ est tel que P_j soit galoisien, alors l'homomorphisme canonique $P_j \times_{\pi_j} E \to P_i \times_{\pi_i} E$ est un isomorphisme.

La première assertion est un cas particulier de i), compte tenu que π_i opère de façon simplement transitive sur $F(P_i)$ qui est d'un point marqué φ_i, d'où un isomorphisme $F(P_i) \times_{\pi_i} E \simeq E$. Pour la deuxième assertion on utilise par exemple (G 6).

Soit, pout tout j, $\mathscr{C}_j$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des X tels que $\mathrm{Hom}(P_j, X) \to \mathrm{Hom}(P, X) \simeq F(X)$ soit bijectif. On sait par g) que *$\mathscr{C}$ est réunion filtrante des $\mathscr{C}_j$*. On a donc pour $X \in \mathscr{C}_j$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_\pi(E, \mathrm{Hom}(P, X)) \simeq \mathrm{Hom}_\pi(E, \mathrm{Hom}(P_j, X)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\pi_j}(E, \mathrm{Hom}(P_j, X)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(P_j \times_{\pi_j} E, X)\end{aligned}$$

125 et compte tenu de la dernière assertion dans j) on trouve un isomorphisme fonctoriel en l'objet X de $\mathscr{C}_j$:

$$\mathrm{Hom}_\pi(E, \mathrm{Hom}(P, X)) \simeq \mathrm{Hom}(P_i \times_{\pi_i} E, X)$$

Comme cela est vrai pour tout j et ces isomorphismes fonctoriels, pour j variable, s'induisent mutuellement, on conclut :

k) *Sous les conditions de* j), *le morphisme composé des morphismes canoniques*

$$E \to \mathrm{Hom}(P_i, P_i \times_{\pi_i} E) \to \mathrm{Hom}(P, P_i \times_{\pi_i} E)$$

fait de $P_i \times_{\pi_i} E$ une solution du problème univerel définissant $P \times_\pi E$, i.e. *ce dernier existe et on a un isomorphisme*

$$P \times_\pi E \xrightarrow{\sim} P_i \times_{\pi_i} E$$

Cela achève la construction du foncteur $G(E)$. On a d'autre part un homomorphisme fonctoriel

$$\alpha\colon id_{\mathscr{C}(\pi)} \to FG$$

i.e. un homomorphisme fonctoriel en l'objet E de $\mathscr{C}(\pi)$:

$$\alpha(E)\colon E \to FG(E) = F(P \times_\pi E)$$

savoir le composé des morphismes canoniques

$$E \to F(P) \times_\pi E \to F(P \times_\pi E)$$

(où le premier provient du point marqué $\varphi \in F(P)$). Conjuguant j) et k), on trouve :

l) *L'homomorphisme α est un isomorphisme*

On définit de même un homomorphisme fonctoriel

$$\beta\colon GF \to id_{\mathscr{C}}$$

i.e. un homomorphisme fonctoriel en l'objet X de $\mathscr{C}$:

$$\beta(X)\colon P \times_\pi F(X) \to X$$

126 comme associé au π-homomorphisme

$$F(X) \to \operatorname{Hom}(P, X)$$

inverse de l'isomorphisme canonique $\operatorname{Hom}(P, X) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

m) *Les composés*

$$F(X) \xrightarrow{\alpha(F(X))} FGF(X) \xrightarrow{F(\beta(X))} F(X)$$

$$G(E) \xrightarrow{G(\alpha(E))} GFG(E) \xrightarrow{\beta(G(E))} G(E)$$

sont les isomorphismes identiques.

Ane qui trotte.

Compte tenu de l) il s'ensuit :

n) *L'homomorphisme β est un isomorphisme*

part 25 Nous avons ainsi obtenu le résultat promis :

Théorème 4.1 *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie satisfaisant les conditions* (G 1), (G 2), (G 3) *du début du numéro, et F un foncteur covariant de $\mathscr{C}$ dans la catégorie des ensembles finis, satisfaisant les conditions* (G 4), (G 5) *et* (G 6)*. Alors les constructions canoniques précédentes définissent des équivalences de catégories $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}(\pi)$ et $G\colon \mathscr{C}(\pi) \to \mathscr{C}$ quasi-inverses l'une de l'autre. De façon précise, il existe un pro-objet P de $\mathscr{C}$, et un isomorphisme fonctoriel $F(X) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Hom}(P, X)$, π est le groupe opposé au groupe des automorphismes de P, topologisé de façon convenable, de façon que π opère de façon continue sur les ensembles $\operatorname{Hom}(P, X) \simeq F(X)$. Enfin G est donné par $G(E) \simeq P \times_\pi E$.*

Remarques 4.2 L'énoncé des conditions (G 1) à (G 6) devient plus simple et plus sympathique si on remplace (G 2) et (G 5) respectivement par :

(G' 2) Les limites inductives finies dans C existent.

(G' 5) Le foncteur F est exact à droite (i.e. commute aux limites inductives finies).

Ces conditions sont en apparence plus fortes que (G, 2) et (G 5), mais il résulte aussitôt du théorème de structure 4.1 qu'elles sont entraînées par (G 1) à (G 6). On notera cependant que dans les cas qui nous intéresseront, la vérification de (G 2) et (G 5) semble effectivement plus simple que celle de (G' 2) et (G' 5). J'ignore si dans la condition (G 3), le fait que u'' soit un isomorphisme sur un sommande direct de Y ne pourrait être omis.

5 Catégories galoisiennes

127

Définition 5.1 *On appelle catégorie galoisienne une catégorie $\mathscr{C}$ équivalente à une catégorie $\mathscr{C}(\pi)$, où π est un groupe compact, limite projective de groupes finis (i.e. totalement disconnexe).*

Pour la définition de $\mathscr{C}(\pi)$, cf début du N° 4. En vertu du th. 4.1, $\mathscr{C}$ est galoisienne si et seulement si elle satisfait les conditions (G 1) à (G 3), et s'il existe un foncteur F de C dans la catégorie des ensembles finis satisfaisant les conditions (G 4) à (G 6) (i.e. qui est exact *et* conservatif, *dans une terminologie générale). Un tel foncteur sera appelé* foncteur fondamental *de la catégorie galoisienne $\mathscr{C}$* [6] *; il est pro-représentable par un pro-objet que nous noterons P_F ; un pro-objet P tel que le foncteur associé soit fondamental est appelé* pro-objet fondamental. *De cette facçon, la catégorie des foncteurs fondamentaux sur $\mathscr{C}$ est anti-équivalente à la catégorie des pro-objets fondamentaux ; si F et P se correspondent, le groupe $\operatorname{Aut} F$ est donc isomorphe à l'opposé du groupe $\operatorname{Aut} P$, donc le groupe noté π dans le numéro précédent n'est autre que $\operatorname{Aut} P$. Rappelons qu'au numéro précédent nous avons construit, à partir d'un foncteur fondamental* donné *F, une équivalence de $\mathscr{C}$ avec $\mathscr{C}(\pi)$ (où $\pi = \operatorname{Aut}(F)$) qui transforme le foncteur F en le foncteur canonique de $\mathscr{C}(\pi)_x$ dans la catégorie des ensembles finis. Dans ce cas type $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\pi)$, $F =$ foncteur canonique, le pro-objet fondamental associé à F n'est autre que le système projectif des quotients discrets π_i de π.*

Il peut être utile d'expliciter la catégorie des pro-objets de $\mathscr{C}(\pi)$. On trouve :

Proposition 5.2 *La catégorie $\text{Pro-}\mathscr{C}(\pi)$ est canoniquement équivalente à la catégorie $\mathscr{C}'(\pi)$ des espaces, à groupe topologique π d'opérateurs, qui sont compacts et totalement disconnexes.*

Comme cette dernière contient $\mathscr{C}(\pi)$ comme sous-catégorie pleine (correspondant aux espaces à opérateurs compacts discrets) et que les limites projectives y existent, on a en tous cas un foncteur canonique $g\colon \text{Pro-}\mathscr{C}(\pi) \to \mathscr{C}'(\pi)$, au système projectif $Q = (Q_i)$ correspondant l'objet $X = \varprojlim_i Q_i$ de $\mathscr{C}'(\pi)$. Pour définir un foncteur en sens inverse, il suffit de définir un

[6] Il semble préférable d'adopter le terme plus parlant de "foncteur fibre".

foncteur contravariant de $\mathscr{C}'(\pi)$ dans la catégorie des foncteurs $\mathscr{C} \to (\mathbf{Ens})$ exacts à gauche, et
128 on prendra pour tout $X \in \mathscr{C}'(\pi)$ le foncteur $h(X)(E) = \mathrm{Hom}(X, E)$ (le Hom étant pris dans $\mathscr{C}'(\pi)$). Il est immédiat par définition que les foncteurs h et g sont adjoints l'un de l'autre, et que hg est canoniquement isomorphe au foncteur identique de $\mathrm{Pro}\text{-}\mathscr{C}(\pi)$. Il reste à prouver (pour établir que g et h sont quasi-inverses l'un de l'autre) que tout objet de $\mathscr{C}'(\pi)$ est isomorphe à un objet de la forme $g(Q)$, où $Q \in \mathrm{Pro}\text{-}\mathscr{C}(\pi)$, en d'autres termes : *tout espace X à groupe topologique π d'opérateurs, qui est compact et totalement disconnexe, est isomorphe à une limite projective d'espaces à opérateurs finis discrets*. Comme X est limite projective de ses quotients finis discrets (en tant qu'espace topologique sans opérateurs), on est ramené à montrer que dans l'ensemble de ces quotients, il y a un système cofinal qui est invariant par π. Il suffit pour cela de montrer que pour un tel quotient X', l'ensemble des transformés de ce quotient par les opérations de π est fini, (on prendra alors le sup desdits transformés, qui sera un quotient invariant majorant X'). Ou encore, qu'il y a un sous-groupe invariant ouvert π' de π tel que les éléments de ce sous-groupe invarient X'. Or X' correspond à une partition finie de X en ensembles ouverts X_i. Par raison de continuité et de compacité de π, il existe un voisinage V de l'élément neutre de π tel que $s \in V$ implique $s.X_i \subset X_i$ pour tout i, donc s invarie X'. Or on sait que les sous-groupes invariants ouverts de π forment un système fondamental de voisinage de l'élément neutre, ce qui achève la démonstration.

Remarquons qu'on voit encore plus simplement que la catégorie $\mathrm{Ind}\mathscr{C}(\pi)$ est canoniquement équivalente à la catégorie des ensembles où π opère continûment. Nous n'en aurons pas besoin ici.

Proposition 5.3 *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie galoisienne, F un foncteur fondamental sur C, $P = (P_i)$ le pro-objet associé, normalisé de la façon habituelle. Soit $X \in C$; pour que X soit connexe, il faut et il suffit que π opère transitivement sur $E = F(X)$.*

On est ramené au cas type $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\pi)$, $F =$ foncteur canonique, où c'est trivial.

Corollaire 5.4 *Conditions équivalentes sur X :* (i) *X est connexe et $\not\simeq \emptyset_{\mathscr{C}}$* (ii) *le groupe π est transitif sur $E = F(X)$, et $F(X) \neq \emptyset$* (iii) *X est isomorphe à un P_i.*

129 L'équivalence de (i) et (iii) résulte aussi déjà facilement de N° 4, e).

part 26

Proposition 5.5 *Soit $Q = (Q_i)_{i \in I}$ un pro-objet de C, normalisé de la façon habituelle, et soit G le foncteur correspondant $G(X) = \mathrm{Hom}(Q, X)$ de $\mathscr{C}$ (dans $(\mathbf{Ens})$). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *G commute aux sommes directes finies*

(ii) *G commute à la somme de deux objets*

(iii) *Les Q_i sont connexes et $\not\simeq \emptyset_C$*

(iv) *Q est isomorphe à π/H, où H est un sous-groupe fermé de π.*

(v) *Le foncteur G est isomorphe au foncteur $E \mapsto E^H$ (ensemble des invariants par H) défini par un sous-groupe fermé H de π.*

N.B. dans l'énoncé de (iv) et (v), on suppose choisi un foncteur fondamental, permettant d'identifier $\mathscr{C}$ à la catégorie $\mathscr{C}(\pi)$.

Démonstration. On peut supposer $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\pi)$. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale, (ii) $\Rightarrow$ (iii) se prouve comme la propriété d) du N$^{\text{o}}$ 4. Prouvons (iii) $\Rightarrow$ (iv). En effet, on sait que $\varprojlim_i Q_i$ est non vide comme limite projective d'ensembles finis non vides. Soit a un point de $\varprojlim_i Q_i$, il définit un homomorphisme d'espaces à opérateurs

$$\pi \to Q$$

qui est *surjectif*, car pour tout i le composé $\pi \to Q \to Q_i$ l'est, puisque π est transitif dans Q_i en vertu de 5.3. Si donc H est le sous-groupe de stabilisateur de a, on obtient un isomorphisme $\pi/H \xrightarrow{\sim} Q$. Les implications (iv) $\Rightarrow$ (v) et (v) $\Rightarrow$ (i) sont à nouveau triviales.

Proposition 5.6 *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie galoisienne, P un pro-objet fondamental de $\mathscr{C}$ et F le foncteur fondamental associé. Soit $P' = (P'_i)_{i \in I}$ un pro-objet de $\mathscr{C}$, mis sous forme normale, et F' le foncteur associé $F'(X) = \mathrm{Hom}(P', X)$ et $\mathscr{C}$ dans $(\mathbf{Ens})$. Conditions équivalentes :*

(i) *$P' \simeq P$, ou encore $F' \simeq F$.*

(ii) *P' est fondamental, ou encore que F' est fondamental.*

130 (iii) *F' transforme somme de deux objets en somme, et $X \not\simeq \emptyset_{\mathscr{C}}$ implique $F(X) \neq \emptyset$.*

(iv) *Les objets de $\mathscr{C}$ connexes et $\neq \emptyset_{\mathscr{C}}$ sont exactement les objets isomorphes à un P'_i.*

On a trivialement (i) $\Rightarrow$ (iii) et (i) $\Rightarrow$ (ii), de plus (ii) $\Rightarrow$ (iv) en vertu de 5.4 (appliqué à P' au lieu de P). De plus (iii) ou (iv) implique en vertu de 5.5 que P' est de la forme π/H où H est un sous-groupe fermé de π. Dans le cas (iii), il existe pour tout sous-groupe invariant ouvert π' de π un π-homomorphisme $P' = \pi/H \to \pi/\pi'$, d'où $H \subset \pi'$, d'où $H = (0)$ et par suite (i), cqfd.

Corollaire 5.7 *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie galoisienne. Les pro-objets fondamentaux sont isomorphes, les foncteurs fondamentaux sont isomorphes.*

En d'autres termes, *la catégorie des foncteurs fondamentaux est un groupoïde connexe* Γ, qu'on peut appeler le *groupoïde fondamental* de la catégorie galoisienne $\mathscr{C}$. Si $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\pi)$, le groupe des automorphismes d'un objet du groupoïde fondamental est isomorphe à π, cet isomorphisme étant bien déterminé à automorphisme intérieur près. (N.B. on appelle *groupoïde* une catégorie où tous les morphismes sont des isomorphismes, groupoïde *connexe* groupoïde dont tous les objets sont isomorphes). Les pro-objets fondamentaux de $\mathscr{C}$ forment un groupoïde connexe équivalent à l'*opposé* du groupoïde fondamental. Si F, F' sont deux foncteurs fondamentaux, associés à des pro-objets fondamentaux P, P', alors $\mathrm{Hom}(F, F') = \mathrm{Isom}(F, F')$ est parfois noté $\pi_{F',F}$ et joue le rôle d'un "ensemble de *classes de chemins* de F à F'". En particulier, $\pi_{F,F} = \pi_F$ n'est autre que le *groupe fondamental de $\mathscr{C}$* en F construit dans le numéro précédent. Quant au pro-objet P associé à F, il joue le rôle d'un *revêtement universel en F* de l'objet final $e_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$.

Il peut être commode d'avoir une description de $\mathscr{C}$ (à équivalence près) en termes de son groupoïde fondamental Γ, sans passer par un choix d'un objet particulier F de ce dernier. Or à tout objet X de $\mathscr{C}$ est associé le foncteur E_X sur le groupoïde fondamental, défini par

$$E_X(F) = F(X),$$

à valeurs dans $(\mathbf{Ens})$. (Un tel foncteur est connu en topologie sous le nom de "système local" sur le groupoïde) $F(X) = E_X(F)$ peut être appelé la *fibre* de X en F, et le foncteur
131 E_X le foncteur-fibre associé à X. Le foncteur E_X a la propriété suivante : *pour tout F, $E_X(F)$ est un ensemble fini où le groupe topologique* $\pi_F = \mathrm{Aut}(F)$ *opère continûment*. Pour un foncteur covariant donné ξ du groupoïde fondamental dans $(\mathbf{Ens})$, la condition précédente équivaut d'ailleurs à la même condition pour *un* F fixé quelconque. Ceci posé :

Proposition 5.8 *Le foncteur $X \mapsto E_X$ est une équivalence de la catégorie $\mathscr{C}$ avec la catégorie des foncteurs covariants du groupoïde fondamental Γ de $\mathscr{C}$ dans $(\mathbf{Ens})$, qui satisfont la condition soulignée plus haut.*

En effet, soit F_0 un objet du groupoïde fondamental, et soit $\pi_0 = \mathrm{Aut}(F_0)$, alors le foncteur $\xi \mapsto \xi(F_0)$ est une équivalence de la deuxième catégorie envisagée dans 5.8 avec la catégorie $\mathscr{C}(\pi_0)$, comme on constate aussitôt. D'autre part, le composé de ce dernier et du foncteur $X \mapsto E_X$ est l'équivalence naturelle $\mathscr{C} \to \mathscr{C}(\pi_0)$. Il en résulte que le foncteur $X \mapsto E_X$ lui-même est une équivalence.

Corollaire 5.9 *La catégorie $\mathrm{Pro}\text{-}\mathscr{C}$ est équivalente canoniquement à la catégorie des foncteurs covariants ξ du groupoïde fondamental Γ dans la catégorie des espaces topologiques, satisfaisant la condition : pour tout objet F de Γ, $\xi(F)$ est un espace compact totalement disconnexe à groupe topologique π_F d'opérateurs.*

Ici encore, on peut vérifier cette condition sur ξ, il suffit de la vérifier pour *un* F. La démonstration est la même que pour 5.8.

Remarque 5.10 Soit $(F_s)_{s\in S}$ une famille d'objet du groupoïde fondamental Γ. Posons pour $s, s' \in S$:

$$\mathrm{Hom}(s, s') = \mathrm{Hom}(F_s, F_{s'})$$

de sorte que S devient lui-même un groupoïde connexe et l'application $s \mapsto F_s$ un foncteur pleinement fidèle de S dans Γ, soit f. Considérant alors le foncteur $X \mapsto E_x \circ f$ de $\mathscr{C}$ dans la catégorie de foncteur $\mathrm{Hom}(S, (\mathbf{Ens}))$, on obtient une variante de 5.8 (et 5.9) avec Γ remplacé par S. L'énoncé ainsi obtenu se réduit au théorème 4.1 lorsque S est réduit à un point, et n'est autre que 5.8 lui-même si S est l'ensemble des objets de Γ.

Nous allons utiliser 5.9 pour définir un pro-objet canonique de $\mathscr{C}$. Pour ceci, nous considérons
132 le foncteur de Γ dans la catégorie des espaces topologiques (et même des groupes topologiques) :

$$f\colon F \mapsto \mathrm{Aut}(F) = \pi_F$$

Ce foncteur satisfait la condition envisagée dans 5.8, l'espace à opérateurs $f(F)$ sous π_F n'est autre que π_F, considéré comme espace à opérateurs sous lui-même par les automorphismes intérieurs. Donc le foncteur f correspond à un pro-objet de $\mathscr{C}$ déterminé à isomorphisme unique près, qui est même un pro-groupe de $\mathscr{C}$ et qui est appelé le *pro-groupe fondamental de* $\mathscr{C}$, jouant le rôle d'un système local de groupes fondamentaux. C'est donc un pro-groupe Π de $\mathscr{C}$ défini par la condition qu'on ait un isomorphisme fonctoriel en F

$$F(\Pi) \simeq \pi_F$$

Si X est un pro-objet quelconque de $\mathscr{C}$, on a un morphisme canonique

$$\Pi \times X \to X$$

qui fait de X un objet à groupe d'opérateurs à gauche G dans $\mathrm{Pro}\text{-}\mathscr{C}$. Il suffit pour ceci de noter que pour F variable, on a une application canonique

$$\Pi(F) \times X(F) \to X(F)$$

i.e.

$$\mathrm{Aut}(F) \times E_X(F) \to E_X(F), \quad \text{ou} \quad \pi_F \times F(X) \to F(X)$$

qui est fonctorielle en F. Elle est aussi fonctorielle en X, donc pour tout morphisme $X \to Y$ de pro-objets, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Pi \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi \times Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

correspondant est commutatif.

Remarque 5.11 On se gardera de confondre un pro-objet fondamental P (qui n'est pas muni d'une structure de groupe, et est connexe) avec le pro-groupe fondamental (qui un pro-*groupe*, et en général non connexe). De façon précise, G est connexe si et seulement si π_F opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs est transitif, i.e. si π est réduit à l'élément neutre, ou encore
133 $\mathscr{C}$ équivalente à la catégorie des ensembles finis. Une autre différence essentielle est que G est déterminé à isomorphisme unique près, et P n'est déterminé qu'à isomorphisme non unique près.

Soit E un ensemble fini et considérons le foncteur constant sur le groupoïde Γ, de valeur E : il définit en vertu de 5.8 un objet de $\mathscr{C}$, noté $E_{\mathscr{C}}$, et qui peut aussi s'interpréter comme la somme de E exemplaires de l'objet final $e_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$. On peut considérer $E_{\mathscr{C}}$ comme un foncteur en E, de la catégorie des ensembles finis dans la catégorie $\mathscr{C}$, et ce foncteur est *exact*, donc transforme groupes finis en $\mathscr{C}$-groupes, etc... Si donc X est un objet de $\mathscr{C}$ sur lequel le groupe fini G opère à droite, on voit qu'on peut considérer X comme un objet de $\mathscr{C}$ ayant un $\mathscr{C}$-groupe d'opérateurs à droite $G_{\mathscr{C}}$. On dira donc par extension d'une terminologie générale relative à des objets à $\mathscr{C}$-groupes d'opérateurs, que X est *formellement principal homogène* sous G si X est formellement principal homogène sous $G_{\mathscr{C}}$, i.e. si le morphisme canonique

$$X \times G_{\mathscr{C}} \to X \times X$$

déduit de l'opération de $G_{\mathscr{C}}$ sur X à droite, est un isomorphisme. On dit que X est *principal homogène* sous G s'il l'est sous $G_{\mathscr{C}}$, i.e. s'il l'est formellement, et si de plus le quotient $X/G = X/G_{\mathscr{C}}$ est $e_{\mathscr{C}}$. Si on se fixe un foncteur fondamental, d'où une équivalence de $\mathscr{C}$ avec une catégorie $\mathscr{C}(\pi)$, X correspond à un ensemble sur lequel π opère à gauche continûment, soit $E = F(X)$. Faire opérer G sur X à droite revient alors à faire opérer G sur l'ensemble E à droite, de façon que les opérations de G commutent à celles de π. On constate alors aussitôt que X est principal homogène sous G si et seulement si l'ensemble E est un espace principal homogène sous G i.e. si et seulement si G y opère de façon simplement transitive. (D'ailleurs X est formellement principal homogène sss E principal homogène *ou* vide). Comparant avec 5.3, on voit que si X est principal homogène sous G *et connexe*, alors l'homomorphisme donné de G dans le groupe opposé à $\mathrm{Aut}(X)$ est un *isomorphisme* ; et d'ailleurs pour qu'un objet X de C soit connexe et principal homogène sous le groupe opposé à $\mathrm{Aut}(X)$, il faut et il suffit, avec les notations du N° 4, qu'il soit isomorphe à un P_i *galoisien*. Dans le cas type $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\pi)$, cela signifie que X est isomorphe à un quotient de π par un sous-groupe invariant.

134 Supposons toujours donné un foncteur fondamental F. Alors la donnée d'un X principal homogène sous un groupe fini G opérant à droite, et d'un point $a \in F(X)$, est équivalente à la donnée d'un homomorphisme de π dans le groupe G. En effet, à un tel homomorphisme on fait correspondre l'ensemble $E = G$, en y faisant opérer π à gauche grâce à l'homomorphisme donné $\pi \to G$ et les translations à gauche de G, et en y faisant opérer G à droite par translation à droite, le point marqué a de E étant l'élément unité de G. Grâce à ce qui précède, on obtient ainsi de façon essentiellement unique tout triple (X, G, a) ayant les propriétés envisagées plus haut, puisque un ensemble à point marqué principal homogène sous un groupe G s'identifie à ce dernier. De cette façon, on a une interprétation géométrique directe du foncteur $G \mapsto \mathrm{Hom}(\pi, G)$ de la catégorie des groupes finis dans $(\mathbf{Ens})$, foncteur qui est pro-représentable à l'aide de π, et dont la considération fournirait donc une autre construction du groupe π associé à F.

part 27

6 Foncteurs exacts d'une catégorie galoisienne dans une autre

Proposition 6.1 *Soient $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux catégories galoisiennes, $H : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur covariant, F' un foncteur fondamental sur $\mathscr{C}'$ et $F = F' \circ H$. Conditions équivalentes :*

(i) H est exacte*, i.e. exact à gauche et exacte à droite.*

(ii) H est exacte à gauche, transforme sommes finies en sommes finies, et épimorphismes en épimorphismes (ou encore : objets $\neq \emptyset_{\mathscr{C}}$ en objets $\neq \emptyset_{\mathscr{C}'}$).

(iii) F est un foncteur fondamental sur $\mathscr{C}$.

L'implication (i)⇒(ii) est un fait général aux catégories. D'ailleurs la première forme donnée à (ii) implique la seconde, comme on voit en notant que si X est un objet de $\mathscr{C}$, alors X est $\neq \emptyset_{\mathscr{C}}$ sss le morphisme $X : e_{\mathscr{C}}$ est un épimorphisme ; on notera que F étant supposé exacte à gauche transforme $e_{\mathscr{C}}$ en $e_{\mathscr{C}'}$. La deuxième forme donnée à (ii) implique (iii), car F étant exact à gauche donc pro-représentable est justiciable de 5.6 critère (iii). Enfin (iii) implique (i), comme il résulte du fait que F est exact, et "conservatif" (i.e. satisfait l'axiome (G6) de numéro 4).

135 Soit alors Γ le groupoïde fondamental de $\mathscr{C}$, Γ' celui de $\mathscr{C}'$. Donc si H est exact, alors $F' \mapsto F' \circ H$ est un foncteur du groupoïde Γ' dans le groupoïde Γ, qu'on dénotera par ${}^tH$:

$$ {}^tH(F')(X) = F'(H(X)) $$

qu'on peut aussi écrire, avec la notation $F(X) = E_X(F)$ introduite dans numéro 6 :

$$ E_{H(X)}(F') = E_X({}^tH(F')) $$

Cette dernière formule montre, compte tenu de 5.8 ou 4.1, que le foncteur exact H est déterminé (à isomorphisme unique près) quand on connaît le focteur correspondant ${}^tH$. Fixons-nous un F', soit $F = {}^tH(F')$, alors ${}^tH$ définit un homomorphisme de $\Pi_{F'} = \mathrm{Aut}(F')$ dans $\Pi_F = \mathrm{Aut}(F)$:

$$ {}^tH \colon \Pi_{F'} \to \Pi_F \ \ (F = {}^tH(F') = F' \circ H). $$

D'ailleurs la formule plus haut montre (compte tenu de 5.8) que cet homomorphisme a la propriété suivante : pour tout ensemble fini E où Π_F opère continûment, le groupe $\Pi_{F'}$ opère également *continûment* grâce à l'homomorphisme précédent $\Pi_{F'} \to \Pi_F$. Applicant ceci aux quotients de Π_F par ses sous-groupes invariants ouverts, on voit que la condition précédente signifie aussi que l'homomorphisme considéré est continu. Réciproquement, donnons-nous un objet F de Γ, un objet F' de Γ' et un homomorphisme continu

$$ u \colon \Pi_{F'} \to \Pi_F, $$

il lui correspond donc un foncteur de $\mathscr{C}(\Pi)$ dans $\mathscr{C}(\Pi')$, manifestement exact, donc en vertu de 4.1 il lui correspond un foncteur H de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ qui est exact, et tel que ${}^tH \colon \Pi_{F'} \to \Pi_F$ soit précisément u. On peut aussi, au lieu d'un homomorphisme de groupes, partir d'un *foncteur*

$$ U \colon \Gamma' \to \Gamma $$

qui est tel que pour *tout* $F' \in \Gamma'$ (ou *un* $F' \in \Gamma'$, cela revient au même) l'homomorphisme correspondant $\Pi_{F'} \to \Pi_F$ soit continu : un tel foncteur est isomorphe à un foncteur de la forme
136 ${}^tH$, où $H \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est un foncteur exact déterminé à isomorphisme unique près. Ainsi :

Corollaire 6.2 *Pour qu'un foncteur $H \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ de catégories galoisiennes soit exact, il faut et il suffit qu'il existe des équivalences $\mathscr{C}(\Pi) \to \mathscr{C}$ et $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}(\Pi)$ qui transforme le foncteur H en le foncteur $\mathscr{C}(\Pi) \to \mathscr{C}(\Pi')$ associé à un homomorphisme de groupes topologiques $\Pi' \to \Pi$.*

Corollaire 6.3 *Soient $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux catégories galoisiennes, Γ, Γ' leurs groupoïdes fondamentaux. Alors la catégorie des foncteurs exacts de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ est équivalente à la catégorie des foncteurs $U \colon \Gamma' \to \Gamma$ ayant la propriété suivante : pour tout F' dans Γ' (ou* un *F' dans Γ', cela revient au même), posant $F = U(F')$, l'homomorphisme*

$$ \Pi_{F'} = \mathrm{Aut}(F') \to \Pi_F = \mathrm{Aut}(F) $$

défini par U est continu.

Considérons le groupe fondamental Π de $\mathscr{C}$, alors un foncteur exact H le transforme en un pro-groupe $H(\Pi)$ de $\mathscr{C}'$, nous allons définir un homomorphisme

$$\Pi' \to H(\Pi)$$

(où Π' est le pro-groupe fondamental de $\mathscr{C}'$), par la condition que pour tout objet F' de Γ', l'homomorphisme correspondant

$$F'(\Pi') = \Pi_{F'} \to F'(H(\Pi)) = \Pi_F \quad (\text{où } F = F' \circ H = {}^tH(F'));$$

soit l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{Aut}(F') \to \mathrm{Aut}(F' \circ H).$$

Comme ce dernier est fonctoriel en F', il définit bien en vertu de 5.8 un homomorphisme de pro-objets, et en fait de pro-groupes, de $\mathscr{C}'$. Cet homomorphisme est dit *associé* au foncteur H.

Soit maintenant H' un deuxième foncteur exact, de la catégorie $\mathscr{C}'$ dans une catégorie galoisienne $\mathscr{C}''$. Il est trivial qu'on a

$${}^t(H'H) = {}^tH{}^tH'$$

(N.B. on a là une identité de foncteurs, et non seulement un isomorphisme canonique). On a une propriété de transitivité analogue pour les homomorphismes associés des pro-groupes fondamentaux.

137 Nous allons maintenant interpréter les propriétés du foncteur exact H en termes de l'homomorphisme correspondant

$$u\colon \Pi_{F'} \to \Pi_F \quad (\text{où } F' = F' \circ H).$$

Il est commode d'introduire la notion d'*objet ponctué* de la catégorie galoisienne $\mathscr{C}$ (muni de son foncteur fondamental F) : c'est par définition un objet X de $\mathscr{C}$ muni d'un élément a de $F(X)$. Il s'interprète donc comme un ensemble fini où Π_F opère continûment à gauche, muni d'un point a. Donc les objets ponctués *connexes* de $\mathscr{C}$ s'identifient en vertu de 5.3 aux sous-groupes ouverts de Π_F. Si U et V sont deux tels sous-groupes, correspondants à des objets ponctués connexes X, Y de $\mathscr{C}$, alors il existe un homomorphisme ponctué de X dans Y si et seulement si $U \subset V$, et cet homomorphisme est alors unique. Bien entendu, le foncteur H transforme objets ponctués en objets ponctués (puisque $F = F' \circ H$). Notons d'autre part qu'un sous-groupe fermé d'un groupe tel que Π_F est l'intersection des sous-groupes ouverts qui le contiennent ; par suite, M, N sont deux sous-groupes fermés, alors $M \subset N$ si et seulement si tout sous-groupe ouvert qui contient N contient également M. Grâce à ces remarques, on prouve facilement les résultats qui suivent :

Proposition 6.4 *Soit X un objet ponctué connexe de $\mathscr{C}$, associé à un sous-groupe ouvert U de Π_F. Pour que u contienne $u(\Pi_{F'})$ il faut et il suffit que $H(X)$ admette une section ponctuée (resp. soit complètement décomposé).*

On appellera *section* — sous-entendu : au-dessus de l'objet final — d'un objet X d'une catégorie galoisienne $\mathscr{C}$, un morphisme de l'objet final $e_{\mathscr{C}}$ dans X, ce qui revient à la donnée d'un élément a de $F(X)$ invariant par Π_F ; si X est ponctué, on dit qu'on a une *section ponctuée* si elle est compatible avec les structures ponctuées sur X et $e_{\mathscr{C}}$, i.e. si a est précisément l'objet marqué de $F(X)$. Une telle section est donc unique, et existe si et seulement si l'objet marqué de $F(X)$ est invariant par Π_F. Enfin, un objet d'un catégorie galoisienne est dit *complètement décomposé* s'il est isomorphe à une somme d'objets finaux, i.e. si Π_F opère trivialement dans $F(X)$ - condition évidemment plus forte que l'existence d'une section ponctuée, lorsque X est
138 ponctué. La proposition 6.4 résulte trivialement des définitions et remarques précédentes.

Corollaire 6.5 *Pour que u soit trivial, il faut et il suffit que pour tout objet X de $\mathscr{C}$, $H(X)$ soit complètement décomposé.*

Proposition 6.6 *Soit X' un objet ponctué connexe de $\mathscr{C}'$, associé à un sous-groupe ouvert U' de $\Pi_{F'}$. Pour que U' contienne $\operatorname{Ker} u$, il faut et il suffit qu'il existe un objet ponctué connexe X de $\mathscr{C}$ et un homomorphisme ponctué de la composante connexe ponctuée X'_0 de $H(X)$ dans X' (donc que X soit isomorphe comme objet ponctué à un quotient de la composante connexe neutre de l'image inverse d'un objet ponctué de $\mathscr{C}$). Si u est surjectif, la condition précédente équivaut aussi à la suivante : X est isomorphe à un $H(X)$, où X est un objet ponctué de $\mathscr{C}$.*

(On appelle *composante connexe neutre* d'un objet ponctué X d'une catégorie galoisienne $\mathscr{C}$, l'unique sous-objet connexe ponctué de X ; il correspond à la trajectoire sous Π_F du point marqué de $F(X)$, en vertu de 5.3). Comme le fait que U' contienne $\operatorname{Ker} u$ ne dépend pas de la ponctuation choisie de X' (car une autre ponctuation revient à remplacer U par un sous-groupe conjugué à U), on voit :

Corollaire 6.7 *Pour que U' contienne $\operatorname{Ker} u$, il faut et il suffit qu'il existe un objet X de $\mathscr{C}$ (qu'on peut supposer connexe) et un morphisme d'un composante connexe de $H(X)$ dans X'. Si u est surjectif, cela signifie aussi que X' est isomorphe à un objet de la forme $H(X)$.*

Corollaire 6.8 *Pour que u soit injectif, il faut et il suffit que pour tout objet X' de $\mathscr{C}'$ il existe un objet X de $\mathscr{C}$ et un homomorphisme de d'un composante connexe de $H(X)$ dans X'.*

Proposition 6.9 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'homomorphisme $u\colon \Pi_{F'} \to \Pi_F$ est surjectif.

(ii) Pour tout objet connexe X de $\mathscr{C}$, $H(X)$ est connexe.

(iii) Le foncteur H est pleinement fidèle.

Ce dernier fait signifie que pour deux objets X, Y de $\mathscr{C}$ l'application naturelle

$$\operatorname{Hom}(X,Y) \to \operatorname{Hom}(H(X), H(Y))$$

part 28 est bijective.

139 **Corollaire 6.10** *Pour que u soit un isomorphisme, il faut et suffit que H soit une équivalence de catégories, ou encore que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

1. *pour tout objet connexe X de $\mathscr{C}$, $H(X)$ est connexe*
2. *tout objet de $\mathscr{C}'$ est isomorphe à un objet de la forme $H(X)$.*

Proposition 6.11 *Soient $H\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ et $H'\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}''$ des foncteurs exacts entre catégories galoisiennes, F'' un foncteur fondamental sur $\mathscr{C}''$, posons $F' = F''H'$ et $F = F'H$, et considérons les homomorphismes associés*

$$u'\colon \pi_{F''} \to \pi_{F'} \qquad u\colon \pi_{F'} \to \pi_F$$

Pour que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Im}(u')$ i.e. pour que uu' soit l'homomorphisme trivial, il faut et suffit que pour tout objet X de $\mathscr{C}$, $H'(H(X))$ doit complètement décomposé. Pour que $\operatorname{Ker}(u) \supset \operatorname{Im}(u')$, il faut et il suffit que pour tout objet ponctué connexe X' de $\mathscr{C}'$ tel que $H'(X')$ admette une section ponctuée, il existe un objet X de $\mathscr{C}$ et un homomorphisme d'une composante de $H(X)$ dans X'.

La première assertion résulte de la dernière affirmation de 6.4. La deuxième résulte de la conjonction de 6.4 et 6.6.

Remarque 6.12 Il n'est pas vrai en général, sous les conditions de 6.8 que X' soit isomorphe à un objet de la forme $H(X)$. On peut montrer que pour que tout objet connexe (donc tout objet) de $\mathscr{C}'$ soit isomorphe à un objet de la forme $H(X)$, il faut et il suffit que u soit un isomorphisme de $\pi_{F'}$ sur un sous-groupe *facteur direct* de π_F. En pratique cependant, on construit directement un homomorphisme $\pi_F \to \pi_{F'}$ inverse à droite de u à l'aide d'un foncteur exact convenable de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$.

Proposition 6.13 *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie galoisienne munie d'un foncteur fondamental F, S un objet connexe de $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ la catégorie des objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S. Alors $\mathscr{C}'$ est une catégorie galoisienne, et le foncteur $X \mapsto H(X) = X \times S$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ est exact. Soit $a \in F(S)$, et soit F' le foncteur de $\mathscr{C}'$ dans la catégorie des ensembles finis défini par*

$$F'(X') = \textit{image inverse de } a \textit{ par } F(X') \to F(S)$$

Alors on a un isomorphisme $F \cong F' \circ H$, et l'homomorphisme correspondant

$$u : \pi_{F'} \to \pi_F$$

140 *est un isomorphisme de $\pi_{F'}$ sur le sous-groupe ouvert U de π_F stabilisateur de l'élément marqué a de $F(X)$.*

La démonstration est laissée au lecteur.

7 Cas des préschémas

Soit S un préschéma localement noethérien et *connexe*, et soit

$$a\colon \operatorname{Spec}(\Omega) \to S$$

un point géométrique de S, à valeurs dans un corps algébriquement clos Ω. On posera

$$\mathscr{C} = \text{catégorie des revêtements étales de } S$$

et pour un objet X de $\mathscr{C}$, i.e. un revêtement étale X de S, on pose

$$F(X) = \text{ensemble des points géométriques de } X \text{ au-dessus de } a.$$

Ainsi, F devient un foncteur sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans la catégorie des ensembles finis. Les propriétés (G 1) à (G 6) sont satisfaites : pour (G 1), c'est contenu dans les sorites de I.4.6, (G 2) résulte de 3.4, (G 3) de 3.5 et du début du N° 2, enfin (G 6) est prouvé dans 3.7. On peut donc appliquer les résultats des N° 4,5,6. Cela permet en particulier de définir un pro-objet P de $\mathscr{C}$ représentant F, appelé *revêtement universel de S au point a*, et un groupe topologique $\pi = \operatorname{Aut}(F) = \operatorname{Aut}^0(P)$, appelé *groupe fondamental de S en a*, et noté $\pi_1(S, a)$. Le foncteur F définit alors une équivalence de la catégorie $\mathscr{C}$ avec la catégorie des ensembles finis où $\pi = \pi_1(S, a)$ opère continûment. Cette équivalence permet donc d'interpréter les opérations courantes de limites projectives et limites inductives finies sur des revêtements (produits, produits fibrés, sommes, passage au quotient, etc...) en termes des opérations analogues dans $\mathscr{C}(\pi)$, i.e. en termes des opérations évidentes sur des ensembles finis où π opère. Notons d'ailleurs, puisque les composantes connexes topologiques d'un revêtement étale sont également des revêtements étales, qu'*un objet X de $\mathscr{C}$ est connexe dans $\mathscr{C}$ si et seulement si il est topologiquement connexe* ;
141 en vertu de 5.3, cela signifie donc que π_1 opère transitivement dans $F(X)$. Notons que pour qu'un objet X de $\mathscr{C}$ soit fidèlement plat et quasi-compact sur S (comme il est déja plat et quasi-compact sur S), il faut et suffit que $X \to S$ soit surjectif i.e. soit un épimorphisme dans $\mathscr{C}$, ou encore que $X \neq \emptyset$. On conclut alors du critère 2.6 (iii) que X *est un revêtement principal de X de groupe G si et seulement si il est un espace principal homogène sous G dans la catégorie $\mathscr{C}$*, (tel qu'il a été défini dans N° 5).

Si a' est un autre point géométrique de S (correspondant à un corps algébriquement clos Ω', qui peut être différent de Ω et qui peut même avoir une caractéristique différente), il définit un foncteur fibre $F' = F_{a'}$ de $\mathscr{C}$ dans la catégorie des ensembles finis, qui est encore exact, donc isomorphe à $F = F_a$. Par suite, les groupes fondamentaux $\pi_1(S; a)$ pour a variable sont isomorphes entre eux. On désigne par $\pi_1(S; a, a')$ l'ensemble des isomorphismes (où ce qui revient au même, l'ensembles des homomorphismes) $F_a \to F_{a'}$ des foncteurs fibres associés, on obtient ainsi un *groupoïde* dont l'ensemble des objets est l'ensemble des points géométriques de S, les groupes fondamentaux étant les groupes d'automorphismes des objets dudit groupoïde. L'ensemble $\pi_1(S; a', a)$ peut être appelé l'*ensemble des classes de chemins de a à a'*. Ces classes se composent donc de façon évidente. Enfin, on peut définir un pro-groupe Π_1^S de $\mathscr{C}$, qu'on pourra appeler *pro-groupe fondamental de* S ou *système local des groupes fondamentaux sur* S, défini à isomorphisme unique près par la condition qu'on ait un isomorphisme, fonctoriel en le point géométrique a de S :

$$F_a(\Pi_1^S) = \pi_1(S;a)$$

(cf. remarque 5.10). En particulier, si s est un point ordinaire de S, la fibre de G en s est un pro-groupe sur $k(s)$, limite projective de groupes finis étales sur $k(s)$; on pourrait appeler ce pro-groupe *le groupe fondamental de S en le point ordinaire* s *de* S, le noter $\pi_1(S,s)$. Par définition, ses points à valeurs dans une extension algébriquement close Ω de $k(s)$ sont les éléments de $\pi_1(S;a)$, où a est le point géométrique de S défini par ladite extension. En particulier, (prenant pour S le spectre d'un corps) à tout corps k est associé canoniquement et fonctoriellement un pro-groupe sur k, qu'on pourrait noter $\pi_1(k)$, limite projective de groupes finis étales sur k, et
142 dont les points dans une extension algébriquement close Ω de k s'indentifient aux éléments du groupe de Galois topologique de $\bar{k}/k$, où $\bar{k}$ est la clôture galoisienne de k dans Ω (cf. 8.1). Ce groupe $\pi_1(k)$ ne semble pas encore avoir retenu l'attention des algébristes.

Soit maintenant

$$f\colon S' \to S$$

un morphisme d'un préschéma connexe localement noethérien dans un autre, soit a' un point géométrique de S' et soit $a = f(a')$ son image directe dans S. Alors le foncteur "image inverse" induit un foncteur de la catégorie $\mathscr{C}(S)$ des revêtements étales de S, dans la catégorie $\mathscr{C}(S')$ des revêtements étales de S' :

$$f^\bullet : \mathscr{C}(S) \to \mathscr{C}(S')$$

On a d'ailleurs un isomorphisme de foncteurs

$$F_a \cong F_{a'} \circ f^\bullet,$$

de sorte que $f^\bullet$ est un foncteur *exact*, auquel s'appliquent les résultats du N° 6. On a en particulier un homomorphisme canonique

$$u = \pi_1(f;a') : \pi_1(S',a') \to \pi_1(S;a)(a' = f(a))$$

qui permet de reconstituer le foncteur image inverse, comme une opération de restriction des groupes d'opérateurs. Les propriétés du foncteur $f^\bullet$ s'expriment de façon simple par les propriétés de l'homomorphisme de groupes associés, comme il a été explicité dans le N° 6. Si en particulier S' est un revêtement étale de S, alors l'homomorphisme u est un isomorphisme de $\pi_1(S',a')$ sur le sous-groupe ouvert de $\pi_1(S,a)$ qui définit le revêtement étale connexe ponctué S' de S (i.e. le stabilisateur U de $a' \in F_a(S')$ dans $\pi_1(S;A)$).

Si on désire interpréter les homomorphismes $\pi_1(f;a')$ pour un point géométrique variable a', on doit, conformément à ce qui a été dit dans le N° 6, considérer un homomorphisme

$$\Pi_1(f) : \Pi_1^{S'} \to f^\bullet(\Pi_1^S)$$

de pro-groupes sur S, et prendre l'homomorphisme correspondant pour les fibres géométriques.

8 Cas d'un préschéma de base normale

143

Proposition 8.1 *Soit S le spectre d'un corps k, et soit Ω une extension algébriquement close de k, définissant un point géométrique a de S à valeurs dans Ω. Soit $\bar{k}$ la clôture séparable de k dans Ω. Alors il existe un isomorphisme canonique de $\pi_1(S, a)$ sur le groupe de Galois topologique de $\bar{k}/k$.*

Soit k' la clôture algébrique de k dans Ω, il correspond donc à un point géométrique b de S, à valeurs dans k'. L'homomorphisme naturel de foncteurs $F_b \to F_a$ est évidemment un isomorphisme, car un k-homomorphisme d'une extension finie séparable de k dans Ω prend nécessairement ses valeurs dans $\bar{k}$ et à fortiori dans k'. D'autre part, le groupe π' des k-automorphismes de k'/k opère de façon évidente sur F_b, d'où un homomorphisme $\pi' \to \mathrm{Aut}(F_b) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(F_a) = \pi_1(S; a)$. D'autre part, il est bien connu que l'homomorphisme naturel de π' dans le groupe π des automorphismes de $\bar{k}/k$ est un isomorphisme. On obtient ainsi un homomorphisme canonique $\pi \to \pi_1(S; a)$, reste à montrer que c'est un isomorphisme. En effet, cet homomorphisme est injectif, car un élément du noyau est un automorphisme de $\bar{k}/k$ qui induit l'identité sur toute sous-extension séparable finie, donc est trivial. Cet homomorphisme est surjectif, car si X est un revêtement étale connexe *de S, donc défini par une extension finie séparable L/k, alors π est transitif sur l'ensemble des k-homomorphismes de L dans k', comme bien connu.*

Proposition 8.2 *Soient S un préschéma connexe, localement noethérien et normal, $K = k(s)$ son corps de fonctions = le corps résiduel en son point générique s, Ω une extension algébriquement close de K, définissant un point géométrique a' de $S' = \mathrm{Spec}(K)$ et un point géométrique a de S. Alors l'homomorphisme $\pi_1(S'; a') \to \pi_1(S; a)$ est surjectif. Lorsqu'on identifie le premier groupe au groupe de Galois de la clôture séparable $\bar{K}$ de K dans Ω (cf. 8.1) alors le noyau de l'homomorphisme précédent correspond par la théorie de galois à la sous-extension de $\bar{K}/K$ composée des extensions finies de K dans Ω qui sont non ramifiées sur S.*

La première assertion signifie que l'image inverse sur S' d'un revêtement étale connexe X de S est connexe, i.e. que X est intègre, ce n'est autre que (I.10.1). Le noyau de l'homomorphisme précédent s'interprète alors comme formé des automorphismes de $\bar{K}/K$ qui induisent l'identité
144 sur les ensembles $F_a(X)$, où on peut supposer le revêtement étale X de S connexe. Mais cela signifie que cet automorphisme induit l'identité sur les sous-extensions finies de $\bar{K}/K$ qui sont non ramifiées sur S, ce qui prouve la dernière assertion.

Remarque. Grâce à cette interprétation du groupe fondamental du préschéma normal S en termes de théorie des Galois habituelle, la définition était connue dans ce cas depuis longtemps.

part 29

9 Cas des préschémas non connexes : catégories multigaloisiennes

Soit S un préschéma localement noethérien, et soient $(S_i)_{i \in I}$ ses composantes connexes. Alors la catégorie $\mathscr{C}(S)$ des revêtements étales de S est équivalente à la catégorie produit des $\mathscr{C}(S_i)$, qui s'interprètent en termes des groupes fondamentaux des S_i, une fois choisie un point géométrique dans chaque S_i. Dans l'application de la théorie de la descente pour les morphismes étales, il est parfois malcommode de faire choix pour tout S_i d'un point géométri que de S_i. Il est plus commode alors de recourir à la généralisation naturelle de 5.8 pour interpréter $\mathscr{C}(S)$ comme une catégorie de foncteurs sur le groupoïde des points géométriques de S, considéré comme somme des groupoïdes correspondants aux composantes connexes de S ; les foncteurs en question sont les foncteurs à valeurs dans la catégorie des ensembles finis, satisfaisant la propriété de continuité analogue à celle invoquée dans 5.8. En pratique, on aura une famille $(a_t)_{t \in E}$ de points géométriques de S, telle que toute composante connexe S_i de S en contienne au moins un, et on pourra alors, comme dans 5.10, remplacer le groupoïde de tous les points géométriques de S par le groupoïde analogue dont l'ensemble sous-jacent est E. Bien entendu, ces considérations devraient s'insérer dans des définitions générales concernant les catégories qui sont équivalentes à des catégories produits de catégories de la forme $\mathscr{C}(\pi)$, et qu'on pourra appeler *catégories multigaloisiennes*. Nous en laisserons le détail au lecteur.

Exposé VI

Catégories fibrées et descente

145 0 Introduction

Contrairement à ce qui avait été annoncé dans l'introduction de l'exposé précédent, il s'est avéré impossible de faire de la descente dans la catégorie des préschémas, même dans des cas particuliers, sans avoir développé au préalable avec assez de soin le langage de la descente dans les catégories générales.

La notion de "descente" fournit le cadre général pour tous les procédés de "recollement" d'objets, et par conséquent de "recollement" de catégories. Le cas le plus classique de recollement est relatif à la donnée d'un espace topologique X et d'un recouvrement de X par des ouverts X_i ; si on se donne pour tout i un espace fibré (disons) E_i au-dessus de X_i, et pour tout couple (i, j) un isomorphisme f_{ji} de $E_i|X_{ij}$ sur $E_j|X_{ij}$ (où on pose $X_{ij} = X_i \cap X_j$), satisfaisant une condition de transitivité bien connue (qu'on écrit de façon abrégée $f_{kj}f_{ji} = f_{ki}$), on sait qu'il existe un espace fibré E sur X, défini à isomorphisme près par la condition que l'on ait des isomorphismes $f_i \colon E|X_i \xrightarrow{\sim} E_i$, satisfaisant les relations $f_{ji} = f_j f_i^{-1}$ (avec l'abus d'écriture habituel). Soit X' l'espace somme des X_i, qui est donc un espace fibré au-dessus de X (i.e. muni d'une application continue $X' \to X$). On peut interpréter de façon plus concise la donnée des E_i comme un espace fibré E' sur X', et la donnée des f_{ji} comme un isomorphisme entre les deux images inverses (par les deux projections canoniques) E''_1 et E''_2 de E' sur $X'' = X' \times_X X'$, la condition de recollement pouvant alors s'écrire comme une identité entre isomorphismes d'espaces fibrés E'''_1 et E'''_3 sur le produit fibré triple $X''' = X' \times_X X' \times_X X'$ (où E'''_i désigne l'image inverse de E' sur X''' par la projection canonique d'indice i). La construction de E, à partir de
146 E' et de f, est un cas typique de procédé de "descente". D'ailleurs, partant d'un espace fibré E sur X, on dit que X est "localement trivial", de fibre F, s'il existe un recouvrement ouvert (X_i) de X tel que les $E|X_i$ soient isomorphes à $F \times X_i$, ou ce qui revient au même, tel que l'image inverse E' de E sur $X' = \coprod_i X_i$ soit isomorphe à $X \times F$.

Ainsi, la notion de "recollement" d'objets comme celle de "localisation"d'une propriété, sont liées à l'étude de certains types de "changements de base" $X' \to X$. En Géométrie Algébrique, bien d'autres types de changement de base, et notamment les morphismes $X' \to X$ fidèlements plats, doivent être considérés comme correspondant à un procédé de "localisation" relativement aux préschémas, ou autres objets, "au-dessus" de X. Ce type de localisation est utilisé tout autant que la simple localisation topologique (qui en est un cas particulier d'ailleurs). Il en est de même (dans une moindre mesure) en Géométrie Analytique.

La plupart des démonstrations, se réduisant à des vérifications, sont omises ou simplement esquissées ; le cas échéant nous précisons les diagrammes moins évidents qui s'introduisent dans une démonstration.

1 Univers, catégories, équivalence de catégories

Pour éviter certaines difficultés logiques, nous admettrons ici la notion d'*Univers*, qui est un ensemble "assez gros" pour qu'on n'en sorte pas par les opérations habituelles de la théorie des ensembles ; un "*axiome des Univers*" garantit que tout objet se trouve dans un Univers. Pour des détails, voir un livre en préparation par C. Chevalley et le conférencier [1]. Ainsi, le sigle $(\mathbf{Ens})$ désigne, non pas la catégorie de tous les ensembles (notion qui n'a pas de sens), mais la catégorie des ensembles qui se trouvent dans un Univers donné (que nous ne préciserons pas ici dans la notation). De même, $(\mathbf{Cat})$ désignera la catégorie des catégories se trouvant dans l'Univers en question, les "morphismes" d'un objet X de $(\mathbf{Cat})$ dans un autre Y, étant par définition les *foncteurs* de X dans Y.

147 Si $\mathscr{C}$ est une catégorie, nous désignons par $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ *l'ensemble des objets* de $\mathscr{C}$, par $\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ *l'ensemble des flèches* de $\mathscr{C}$ (ou morphismes de $\mathscr{C}$). Nous écrirons donc $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ en évitant l'abus de notation courant $X \in \mathscr{C}$. Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux catégories, un *foncteur* de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ sera toujours ce qu'on appelle communément un foncteur *covariant* de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$; sa donnée implique celle de la catégorie d'arrivée et la catégorie de départ, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Les foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ forment un ensemble, noté $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$, qui est l'ensemble des objets d'une catégorie notée $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$. Par définition, un *foncteur contravariant de* $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ est un foncteur de la *catégorie opposée* $\mathscr{C}^\circ$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$.

Nous admettrons la notion de *limite projective* et de *limite inductive* d'un foncteur

$$F : \mathscr{I} \to \mathscr{C},$$

et en particulier les cas particuliers les plus courants de cette notion : produits cartésiens et produits fibrés, notions duales de sommes directes et de sommes amalgamées, et les propriétés formelles habituelles de ces opérations.

Par exemple, dans la catégorie $(\mathbf{Cat})$ introduite plus haut, les limites projectives (relatives à des catégories $\mathscr{I}$ se trouvant dans l'Univers choisi) existent ; l'ensemble d'objets (resp. l'en-

[1]Les auteurs définitifs sont C. Chevalley et P. Gabriel. Le livre doit sortir en l'an 2000. Cf. aussi SGA 4 VI.7.1

semble de flèches) de la catégorie limite projective $\mathscr{C}$ des $\mathscr{C}_i$, s'obtient en prenant la limite projective des ensembles d'objets (resp. des ensemble des flèches) des catégories $\mathscr{C}_i$. Le cas le plus connu est celui du produit d'une famille de catégories. Nous utiliserons constamment par la suite le produit fibré de deux catégories sur une troisième.

Pour tout ce qui concerne les catégories et foncteurs, en attendant le livre en préparation déjà signalé, voir [1] (qui est nécessairement fort incomplet, même en ce qui concerne les généralités esquissées dans le présent numéro).

Prenons cette occasion pour expliciter la notion d'équivalence de catégories, qui n'est pas exposée de façon satisfaisante dans [1]. Un foncteur $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est dit *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple d'objets S, T de $\mathscr{C}$, l'application $u \mapsto F(u)$ de $\operatorname{Hom}(F(S), F(T))$
148 est injective (resp. bijective). On dit que F est une *équivalence* de catégories si F est pleinement fidèle, et si de plus tout objet S' de $\mathscr{C}'$ est isomorphe à un objet de la forme $F(S)$. On montre qu'il revient au même de dire qu'il existe un foncteur G de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$ *quasi-inverse de* F, i.e., tel que GF soit isomorphe à $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$. Lorsqu'il en est ainsi, la donnée d'un foncteur $G\colon \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ et d'un isomorphisme $\varphi\colon GF \to \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ équivaut à la donnée, pour tout $S' \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C}')$, d'un couple (S, u) formé d'un objet S de $\mathscr{C}$ et d'un isomorphisme $u\colon F(S) \to S'$, soit $(G(S), \varphi(S))$. (Avec ces notations, il existe un foncteur unique $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ ayant l'application donnée $S \mapsto G(S)$ comme application-objets, et tel que l'application $S \mapsto \varphi(S)$ soit un homomorphisme de foncteurs $FG \to \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$). Enfin, si G est un foncteur quasi-inverse de F, et si on choisit des isomorphismes $\varphi\colon FG \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ et $\psi\colon GF \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, alors les deux conditions de compatibilités sur φ, ψ énoncées dans [1, I.1.2] sont en fait équivalentes l'une à l'autre, et pour tout isomorphisme φ
part 30 choisi, il existe un isomorphisme ψ unique tel que lesdites conditions soient satisfaites.

2 Catégories sur une autre

Soit $\mathscr{E}$ une catégorie dans $\mathbf{Univ}$, c'est donc un objet de $\mathbf{Cat}$, et on peut considérer la catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ des "objets de $\mathbf{Cat}$ au-dessus de $\mathscr{E}$". Un objet de cette catégorie est donc un foncteur

$$p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$$

On dit aussi que la catégorie $\mathscr{F}$, munie d'un tel foncteur, est une *catégorie au-dessus de* $\mathscr{E}$, ou une $\mathscr{E}$*-catégorie*. On appellera donc $\mathscr{E}$-foncteur d'une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ dans une catégorie $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{E}$, un foncteur

$$f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$$

tel que

$$qf = p$$

où p et q sont les foncteurs-projection pour $\mathscr{F}$ resp. $\mathscr{G}$. L'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs f de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ est donc en correspondance biunivoque avec l'ensemble des flèches d'origine $\mathscr{F}$ et d'extrémité
149 $\mathscr{G}$ dans $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$, sans pourtant qu'on ait là une identité (puisque la donnée d'un f comme dessus ne détermine pas $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ en tant que catégories sur $\mathscr{E}$) ; mais bien enendu, comme dans toute

autre catégorie $\mathscr{C}_{/S}$, on fera couramment l'abus de langage consistant à identifier les $\mathscr{E}$-foncteurs (au sens explicité plus haut) à des flèches dans une catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$.

On désignera par

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$$

l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$. Bien entendu, un composé de $\mathscr{E}$-foncteurs est un $\mathscr{E}$-foncteur (la composition en question correspondant par définition à la composition des flèches dans $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$).

Considérons maintenant deux $\mathscr{E}$-foncteurs

$$f, g \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$$

et un homomorphisme de foncteurs :

$$u \colon f \to g$$

On dit que u est un *$\mathscr{E}$-homomorphisme* ou un "*homomorphisme de $\mathscr{E}$-foncteurs*", si pour tout $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$, on a

$$q(u(\xi)) = \mathrm{id}_{p(\xi)} ,$$

en paroles : posant $S = p(\xi) = qf(\xi) = qg(\xi) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$, le morphisme

$$u(\xi) \colon f(\xi) \to g(\xi)$$

dans $\mathscr{G}$ est un id_S-morphisme. (De façon générale, pour tout morphisme $\alpha \colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, et toute catégorie $\mathscr{G}$ au-dessus de $\mathscr{E}$, un morphisme v dans $\mathscr{G}$ est appelé un *α-morphisme* si $q(v) = \alpha$, q désignant le foncteur projection $\mathscr{G} \to \mathscr{E}$). Si on a un troisième $\mathscr{E}$-foncteur $h \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et un $\mathscr{E}$-homomorphisme $v \colon g \to h$, alors vu est également un $\mathscr{E}$-homormorphisme.
150 Ainsi, *les $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$, et les $\mathscr{E}$-homomorphismes de tels, forment une sous-catégorie de la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ de tous les foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$, qu'on appellera la catégorie des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ et qu'on notera*

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$$

C'est aussi la sous-catégorie noyau du couple de foncteurs

$$R, S \colon \mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \rightrightarrows \mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E}) ,$$

où R est le foncteur constant défini par l'objet p de $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})$, et où S est le foncteur $f \mapsto q \circ f$ défini par $q \colon \mathscr{G} \to \mathscr{E}$.

Pour finir ces généralités, il reste à définir les accouplements naturels entre les catégories $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ par composition de $\mathscr{E}$-foncteurs. En d'autres termes, on veut définir un "foncteur composition" :

(i) $$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \times \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G},\mathscr{H}) \to \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{H})$$

lorsque $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ sont trois catégories sur $\mathscr{E}$, de telle façon que ce foncteur induise, pour les objets, l'application de composition $(f, g) \mapsto gf$ de $\mathscr{E}$-foncteurs $f \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et $g \colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$. Pour ceci, rappelons qu'on définit un foncteur canonique :

(ii) $$\mathbf{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \times \mathbf{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{H}) \to \mathbf{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{H})$$

qui, pour les objets, n'est autre que l'application de composition $(f, g) \mapsto gf$ de foncteurs, et qui transforme une flèche (u, v), où

$$u \colon f \to f' \quad , \quad v \colon g \to g'$$

sont des flèches dans $\mathbf{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ resp. dans $\mathbf{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{H})$, en la flèche

$$v * u \colon gf \to g'f'$$

151 définie par la relation :

$$v * u(\xi) = v(f'(\xi)).g(u(\xi)) = g'(u(\xi)).v(f(\xi))$$

Il est bien connu que l'on obtient bien ainsi un homomorphisme de gf dans $g'f'$, et que (pour f, g et u, v variables) on obtient ainsi un foncteur (ii), i.e. qu'on a

(I) $$\mathrm{id}_g * \mathrm{id}_f = \mathrm{id}_{gf} \quad ,$$

(II) $$(v' * u') \circ (v * u) = (v' \circ v) * (u' \circ u)$$

Rappelons aussi qu'on a une formule d'associativité pour les accouplements canoniques (ii), qui s'exprime d'une part par l'associativité $(hg)f = h(gf)$ de la composition de foncteurs, et d'autre part par la formule

(III) $$(w * v) * u = w * (v * u)$$

pour les produits de composition d'homomorphismes de foncteurs (où $u \colon f \to f'$ et $v \colon g \to g'$ sont comme dessus, et où on suppose donné de plus un homorphisme $w \colon h \to h'$ de foncteurs $h, h' \colon \mathscr{H} \to \mathscr{K}$). Je dis maintenant que *lorsque $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{E}$-catégories, le foncteur composition canonique* (ii) *induit un foncteur* (i). Comme on sait déjà que le composé de deux $\mathscr{E}$-foncteurs est un $\mathscr{E}$-foncteurs, cela revient à dire que *lorsque $u \colon f \to f'$ et $v \colon g \to g'$ sont des homomorphismes de $\mathscr{E}$-foncteurs, alors $v * u \colon gf \to g'f'$ est également un homomorphisme de $\mathscr{E}$-foncteurs.* Cela résulte en effet trivialement des définitions. Comme les accouplements (i) sont induits par les accouplements (ii), ils satisfont à la même propriété d'associativité, exprimée aussi dans les formules $(hg)f = h(gf)$ et $(w * v) * u = w * (v * u)$ pour des $\mathscr{E}$-foncteurs et des $\mathscr{E}$-homomorphismes de $\mathscr{E}$-foncteurs.

Pour compléter le formulaire (I), (II), (III), rappelons aussi les formules :

(IV) $$v * \mathrm{id}_{\mathscr{F}} = v \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_{\mathscr{G}} * u = u \ ,$$

152 où pour simplifier on écrit $v * f$ ou $u * g$ au lieu de $v * u$, lorsque u resp. v est l'automorphisme identitique de f resp. g.

De la définition des accouplements (i) résulte que $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ *est un foncteur en $\mathscr{E}$, $\mathscr{G}$, de la catégorie produit* $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}{}^{\circ} \times \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ *dans la catégorie* $\mathbf{Cat}$. Si en effet $g\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}_1$ est un $\mathscr{E}$-foncteur, i.e. un objet de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G},\mathscr{G}_1)$, alors faisant dans (i) $\mathscr{H} = \mathscr{G}_1$, il lui correspond un foncteur

$$g_*\colon\ \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G}_1)$$

On définit de la façon analogue, pour un $\mathscr{E}$-foncteur $f\colon\ \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}$, un foncteur

$$f^*\colon \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F}_1,\mathscr{G})$$

Pour abréger, on désigne ces foncteurs aussi par les sigles $f \mapsto g \circ f$ resp. $g \mapsto g \circ f$ (qui désignent seulement, en fait, les applications correspondantes sur les ensembles d'objets). Il résulte de la propriété d'associativité indiquée plus haut que de cette façon, on obtient bien comme annoncé
part 31 un foncteur $\mathbf{Cat}^{\circ}_{/\mathscr{E}} \times \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}} \to \mathbf{Cat}$.

3 Changement de base dans les catégories sur $\mathscr{E}$

Comme dans $\mathbf{Cat}$ les limites projectives (relativement à des catégories $\mathscr{I}$ éléments de $\mathbf{Univ}$) existent, il en est de même dans $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$, en particulier les produits cartésiens y existent, qui s'interprètent comme des produits fibrés dans $\mathbf{Cat}$. Conformément aux notations générales, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des catégories au-dessus de $\mathscr{E}$, on désigne par

$$\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}$$

153 leur produit dans $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$, i.e. leur produit fibré au-dessus de $\mathscr{E}$ dans $\mathbf{Cat}$, en tant que catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$. Ainsi, $\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}$ est muni de deux $\mathscr{E}$-foncteurs pr_1 et pr_2, qui définissent, pour toute catégorie $\mathscr{H}$ au-dessus de $\mathscr{E}$, une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{H},\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{H},\mathscr{F}) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{H},\mathscr{G})\ .$$

Cette bijection provient d'ailleurs d'un isomorphisme de catégories

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H},\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H},\mathscr{F}) \times \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H},\mathscr{G})$$

en prenant les ensembles d'objets des deux membres, où le foncteur écrit est celui qui a pour composantes les foncteurs $h \mapsto pr_1 \circ h$ et $h \mapsto pr_2 \circ h$ du premier membre dans les deux facteurs du second. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'on obtient bien ainsi un isomorphisme (le fait analogue étant vrai, plus généralement, chaque fois qu'on a une limite projective de catégories – et non seulement dans le cas d'un produit fibré).

Rappelons d'ailleurs qu'on a (comme il a été dit dans le N° 1) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}) &= \mathrm{Ob}(\mathscr{F}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathscr{E})} \mathrm{Ob}(\mathscr{G}) \\ \mathrm{Fl}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{G}) &= \mathrm{Fl}(\mathscr{F}) \times_{\mathrm{Fl}(\mathscr{E})} \mathrm{Fl}(\mathscr{G}) \quad , \end{aligned}$$

la composition des flèches se faisant d'ailleurs composante par composante.

Dans la suite, nous considérons un foncteur

$$\lambda\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$$

et pour toute catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$, on considère $\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ comme une catégorie au-dessus de $\mathscr{E}'$ grâce à pr_2 ; en d'autres termes, nous interprétons l'opération "produit fibré" comme une opération *"changement de base"*, le foncteur $\lambda\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ prenant le nom de *"foncteur de changement de base"*. Conformément aux faits généraux bien connus, on obtient ainsi un
154 foncteur, dit *foncteur changement de base* pour λ :

$$\lambda^*\colon \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}} \to \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}'} \quad ,$$

(adjoint du foncteur "restriction de la base" qui, à toute catégorie $\mathscr{F}'$ au-dessus de $\mathscr{E}'$, de foncteur projection p', associe $\mathscr{F}'$, considéré comme catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$ par le foncteur $p = \lambda p'$). Comme il est bien connu dans le cas général d'un foncteur changement de base dans une catégorie, le foncteur changement de base "commute aux limites projectives", et en particulier "transforme" produits fibrés sur $\mathscr{E}$ en produits fibrés sur $\mathscr{E}'$.

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux catégories au-dessus de $\mathscr{E}$, on va définir un *isomorphisme canonique* :

(i) $\quad \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}',\mathscr{G}') \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}',\mathscr{G}) \quad$ où $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}', \mathscr{G}' = \mathscr{G} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$.

Pour ceci, considérons le foncteur

$$pr_1\colon \mathscr{G}' = \mathscr{G} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}' \to \mathscr{G} \quad ,$$

et définissons (i) par

$$F \mapsto pr_1 \circ F \quad ,$$

qui a priori désigne un foncteur

(ii) $$\mathbf{Hom}(\mathscr{F}',\mathscr{G}') \to \mathbf{Hom}(\mathscr{F}',\mathscr{G})$$

Il faut donc vérifier seulement que ce dernier induit un foncteur pour les sous-catégories (i), et que ce dernier est un isomorphisme. Que (ii) induise une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}',\mathscr{G}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}',\mathscr{G})$$

155 est la propriété caractéristique du foncteur changement de base. Il reste donc à prouver que si F, G sont des $\mathscr{E}'$-foncteurs $\mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$, alors *l'application*

$$u \mapsto pr_1 \circ u$$

induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}'}(F,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(pr_1 \circ F, pr_1 \circ G) \quad .$$

La vérification de ce fait est immédiate, et laissée au lecteur.

Il résulte de cet isomorphisme (i), et de la fin du numéro précédent, que

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/\_}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}', \mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}')$$

peut-être considéré comme un foncteur en $\mathscr{E}'$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, *de la catégorie* $\mathbf{Cat}^{\circ}_{/\mathscr{E}}\times\mathbf{Cat}^{\circ}_{/\mathscr{E}}\times\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ *dans la catégorie* $\mathbf{Cat}$, isomorphe au foncteur défini par l'expression $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/\_}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}', \mathscr{G})$. En particulier, pour $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ fixés, on obtient un foncteur en $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}'\to\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}''/\_}(\mathscr{F}', \mathscr{G}') = \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/\_}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}', \mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}')$, et en particulier le $\mathscr{E}$-foncteur de projection $\lambda\colon\mathscr{E}'\to\mathscr{E}$ définit un morphisme i.e. un foncteur

$$\lambda^*_{\mathscr{F},\mathscr{G}}\colon\ \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/\_}(\mathscr{F}, \mathscr{G})\to\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/\_}(\mathscr{F}', \mathscr{G}')$$

que nous allons expliciter. Pour les ensembles d'objets des deux membres, c'est l'aplication

$$f\mapsto f' = f\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'$$

qui exprime la dépendance fonctorielle de $\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'$ de l'objet $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$. D'autre part, considérons deux $\mathscr{E}$-foncteurs

$$f, g\colon\mathscr{F}\to\mathscr{G}$$

et un homomorphisme de $\mathscr{E}$-foncteurs

$$u\colon f\to g \quad ,$$

156 on va expliciter l'homomorphisme de $\mathscr{E}'$-foncteurs correspondant :

$$u'\colon f'\to g' \quad .$$

Pour tout

$$\xi' = (\xi, S')\in\mathrm{Ob}(\mathscr{F}')$$

avec

$$\xi\in\mathrm{Ob}(\mathscr{F}),\quad S'\in\mathrm{Ob}(\mathscr{E}'),\quad p(\xi) = \lambda(S') = S$$

le morphisme

$$u'(\xi')\colon f'(\xi') = (f(\xi), S')\to g'(\xi') = (g(\xi), S')\quad \text{dans } \mathscr{G}'$$

est défini par la formule

$$u'(\xi') = (u(\xi), \mathrm{id}_{S'})$$

(ce qui est bien un S'-morphisme dans $\mathscr{G}'$, car $q(u(\xi)) = \lambda(\mathrm{id}_{S'}) = \mathrm{id}_S$).

Considérons maintenant un $\mathscr{E}$-foncteur quelconque

$$\lambda'\colon\mathscr{E}''\to\mathscr{E}'$$

et le foncteur correspondant

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}',\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}')\to\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}''/-}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'',\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'')\,,$$

je dis que ce foncteur n'est autre que le foncteur qu'on obtient par le procédé précédent, en partant de $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{G}'$ sur $\mathscr{E}'$ et en considérant $\mathscr{E}''$ comme une catégorie sur $\mathscr{E}'$, compte tenu des isomorphismes de *"transitivité de changement de base"* :

$$\mathscr{F}'\times_{\mathscr{E}'}\mathscr{E}''\xrightarrow{\sim}\mathscr{F}''=\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}''\quad\text{et}\quad\mathscr{G}'\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}''\xrightarrow{\sim}\mathscr{G}''=\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}''\quad,$$

qui impliquent un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}''/-}(\mathscr{F}'\times_{\mathscr{E}'}\mathscr{E}'',\mathscr{G}'\times_{\mathscr{E}'}\mathscr{E}'')\xrightarrow{\sim}\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}''/-}(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'',\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'')$$

157 La vérification de cette compatibilité est immédiate, et laissée au lecteur.

Les foncteurs qu'on vient de définir sont compatibles avec les accouplements définis au numéro précédent, de façon précise, si $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ sont des catégories au-dessus de $\mathscr{E}$ et si on pose

$$\mathscr{F}'=\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'\quad,\quad\mathscr{G}'=\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'\quad,\quad\mathscr{H}'=\mathscr{H}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'\quad,$$

on a commutativité dans le diagramme de foncteurs suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})\times\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G},\mathscr{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda^*_{\mathscr{F},\mathscr{G}}\times\lambda^*_{\mathscr{G},\mathscr{H}}"'] & \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{H}) \arrow[d, "\lambda^*_{\mathscr{F},\mathscr{H}}"] \\
\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F}',\mathscr{G}')\times\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{G}',\mathscr{H}') \arrow[r] & \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'/-}(\mathscr{F}',\mathscr{H}')
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs-composition définis au numéro précédent. Cette commutativité s'exprime par les formules

$$(gf)'=g'f'$$

pour $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{G},\mathscr{H})$, (formule qui exprime simplement la fonctorialité du changement de base), et la formule

$$(v*u)'=v'*u'$$

lorsque $u\colon f\to f_1$ est une flèche de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ et $v\colon g\to g_1$ une flèche de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G},\mathscr{H})$. La vérification de cette formule résulte facilement des définitions.

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout à $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ (et certaines sous-catégories remarquables de celle-ci) lorsque $\mathscr{F}=\mathscr{E}$, et introduisons pour cette raisons une notation spéciale :

$$\mathbf{\Gamma}(\mathscr{G}/\mathscr{E})=\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{E},\mathscr{G})\quad,\quad\Gamma(\mathscr{G}/\mathscr{E})=\mathrm{Ob}(\mathbf{\Gamma}(\mathscr{G}/\mathscr{E}))=\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{G},\mathscr{E})\,.$$

158

Remarques. Lorsque $\mathscr{E}$ est une catégorie ponctuelle, i.e. $\mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ et $\mathrm{Fl}(\mathscr{E})$ réduits à un seul élément, ce qui signifie aussi que $\mathscr{E}$ est un objet final de la catégorie $\mathbf{Cat}$, alors la donnée d'une catégorie sur $\mathscr{E}$ est équivalente à la donnée d'une catégorie tout court, (car il y aura un foncteur unique de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{E}$). De façon plus précise, $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ est alors isomorphe à $\mathbf{Cat}$. De plus, les catégories $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ ne sont alors autres que les $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$. Rappelons alors que la formule fondamentale

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{H},\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathscr{F}\times\mathscr{H},\mathscr{G})$$

(isomorphisme fonctoriel en les trois arguments qui y figurent), permet d'interpréter

$$\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$$

axiomatiquement, en termes internes à la catégorie $\mathbf{Cat}$, de sorte que le formulaire connu des catégories $\mathbf{Hom}$ apparaît comme un cas particulier d'un formulaire valable dans les catégories telles que $\mathbf{Cat}$, où des "objets $\mathbf{Hom}$" (définis par la formule précédente) existent. Il y a une interprétation analogue de $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ lorsqu'on suppose à nouveau $\mathscr{E}$ quelconque, par la formule

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{H},\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}\times\mathscr{H},\mathscr{G})$$

(isomorphisme fonctoriel en les trois arguments). De cette façon, les propriétés formelles exposées dans les N° 2, 3 sont des cas particuliers de résultats plus généraux, valables dans les catégories où les objets $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ (lorsque $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ sont deux objets de la catégorie au-dessus d'un troisième $\mathscr{E}$) existent.

part 32

4 Catégories-fibres ; équivalence de $\mathscr{E}$-catégories

Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$, et soit $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$. On appelle *catégorie-fibre de $\mathscr{F}$ en S* la
159 sous-catégorie $\mathscr{F}_S$ de $\mathscr{F}$ image réciproque de la sous-catégorie ponctuelle de $\mathscr{E}$ définie par S. Donc les objets de $\mathscr{F}_S$ sont les objects ξ de $\mathscr{F}$ tels que $p(\xi) = S$, ses morphismes sont les morphismes u de $\mathscr{F}$ tels que $p(u) = \mathrm{id}_S$, i.e. les S-morphismes dans $\mathscr{F}$. Bien entendu, $\mathscr{F}_S$ est canoniquement isomorphe au produit fibré $\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\{S\}$, où $\{S\}$ désigne la sous-catégorie ponctuelle de $\mathscr{E}$ définie par S, munie de son foncteur d'inclusion dans $\mathscr{E}$. Il en résulte (compte tenu de la transitivité du changement de base) que si on fait le changement de base $\lambda\colon \mathscr{E}'\to\mathscr{E}$, alors pour tout $S'\in\mathrm{Ob}(\mathscr{E}')$, *la projection* $\mathrm{pr}_1\colon \mathscr{F}'=\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'\to\mathscr{F}$ *induit un isomorphisme*

$$\mathscr{F}'_{S'}\to\mathscr{F}_S \qquad (\text{où } S=\lambda(S')).$$

Proposition 4.1 *Soit $f\colon \mathscr{F}\to\mathscr{G}$ un $\mathscr{E}$-foncteur. Si f est pleinement fidèle, alors pour tout changement de base $\mathscr{E}'\to\mathscr{E}$, le foncteur correspondant $f'\colon \mathscr{F}'=\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'\to\mathscr{G}'=\mathscr{G}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'$ est pleinement fidèle.*

La vérification est immédiate ; plus généralement, on peut montrer que toute limite projective de foncteur pleinement fidèle (ici, f et les foncteurs identiques dans $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$) est un foncteur pleinement fidèle.

On notera que l'assertion analogue à 4.1, ou "pleinement fidèle" est remplacée par "équivalence de catégories", est fausse, déjà pour $\mathscr{G} = \mathscr{E}$. Cependant :

Proposition 4.2 *Soit $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un $\mathscr{E}$-foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un $\mathscr{E}$-foncteur $g\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ et des $\mathscr{E}$-isomorphismes

$$gf \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{F}},\ fg \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{G}}.$$

(ii) Pout toute catégorie $\mathscr{E}'$ sur $\mathscr{E}$, le foncteur

$$f' = f \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'\colon \mathscr{F}' = \mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}' \to \mathscr{G}' = \mathscr{G} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$$

160 *est une équivalence de catégories.*

(iii) f est une équivalence de catégories, et pout tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$, le foncteur $f_S\colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{G}_S$ induit par f est une équivalence de catégories.

(iii bis) f est pleinement fidèle, et pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ et tout $\eta \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{G}_S$, il existe un $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_S)$ et un S-isomorphisme $u\colon f((\xi) \to \eta$.

Démonstration. Evidemment (i) implique que f est une équivalence de catégories (notion qui se définit par la même condition, mais où les isomorphismes de foncteurs ne sont pas astreints à être des $\mathscr{E}$-morphismes). D'autre part, il résulte des fonctorialités du numéro précédent que la condition (i) est conservée après changement de base $\mathscr{E}' \to \mathscr{E}$. Il s'ensuit que (i) $\Rightarrow$ (ii). Evidemment (ii) $\Rightarrow$ (iii), car il suffit de faire $\mathscr{E}' = \mathscr{E}$ et $\mathscr{E}' = \{S\}$. Il est encore plus trivial que (iii) $\Rightarrow$ (iii bis), reste à prouver que (iii bis) $\Rightarrow$ (i). Pour ceci, choisissons pour tout $\eta \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G})$ un $g(\eta) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F})$ et un isomorphisme $u(\eta)\colon f(g(\eta)) \to \eta$ qui soit tel que $q(u(\eta)) = \mathrm{id}_S$, où $S = q(\eta)$. C'est possible grâce à la deuxième condition (iii bis). Comme il est connu et immédiat, le fait que f est pleinement fidèle implique que g peut de façon unique être considéré comme un foncteur de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}$, de façon que les $u(\eta)$ définissent un homomorphisme (donc un isomorphisme) fonctoriel $u\colon fg \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{G}}$. De plus, par construction g est un $\mathscr{E}$-foncteur et u un $\mathscr{E}$-homomorphisme. Aux données précédentes correspond alors un isomorphisme fonctoriel $v\colon gf \to \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$, défini par la condition que $f * v = u * f$, et on constate tout de suite que c'est également un $\mathscr{E}$-morphisme, cqfd.

Définition 4.3 *Si les conditions précédentes sont vérifiées, on dit que f est une équivalence de catégories sur $\mathscr{E}$, ou une $\mathscr{E}$-équivalence.*

Corollaire 4.4 *Supposons que le foncteur projection $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ soit un foncteur transportable, i.e. que pour tout isomorphisme $\alpha\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$ et tout objet ξ dans $\mathscr{F}_T$, il existe un isomorphisme u dans $\mathscr{F}$ de source ξ tel que $p(u) = \alpha$. Alors tout $\mathscr{E}$-foncteur $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ qui est une équivalence de catégories, est une $\mathscr{E}$-équivalence.*

161 Résulte du critère (iii bis).

Corollaire 4.5 *Soit $f\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ une $\mathscr{E}$-équivalence. Alors pour toute catégorie $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{E}$, les foncteurs correspondants :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{G}, \mathscr{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F}, \mathscr{H})$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H}, \mathscr{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{H}, \mathscr{G})$$

(cf. N° 2) sont des équivalences de catégories.

Cela résulte du critère (i) par le raisonnement habituel.

5 Morphismes cartésiens, images inverses, foncteurs cartésiens

Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$, de foncteur-projection p.

Définition 5.1 *Considérons un morphisme*

$$\alpha\colon \eta \to \xi$$

dans $\mathscr{F}$, et soient

$$S = p(\xi),\ T = p(\eta),\ f = p(\alpha)$$

On dit que α est un morphisme cartésien *si pour tout $\eta' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_T)$ et tout f-morphisme $u\colon \eta' \to \xi$, il existe un T-morphisme unique $\overline{u}\colon \eta' \to \eta$ tel que $u = \alpha \circ \overline{u}$.*

Cela signifie donc que pour tout $\eta' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_T)$, l'application $v \mapsto \alpha \circ v$:

(i) $$\mathrm{Hom}_T(\eta', \eta) \to \mathrm{Hom}_f(\eta', \xi)$$

est bijective. Cela signifie aussi que le couple (η, α) *représente le foncteur en η' $\mathscr{F}_T^\circ \to$* **Ens** du deuxième membre. Si pour un morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$ donné, et un $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_S)$ donné,
162 il existe un tel couple (η, α), i.e. un morphisme cartésien α dans $\mathscr{F}$ de but ξ, tel que $p(\alpha) = f$, alors η est déterminé dans $\mathscr{F}_T$ à isomorphisme unique près. On dit alors que *l'image inverse de ξ par f existe*, et un objet η de $\mathscr{F}_T$ muni d'un f-morphisme cartésien $\alpha\colon \eta \to \xi$ est appelé *une image inverse de ξ par f*. Souvent on suppose choisi une telle image inverse chaque fois qu'elle existe ($\mathscr{F}$ étant fixé) ; on notera alors l'image inverse par des symboles tels que $f^*_{\mathscr{F}}(\xi)$, ou simplement $f^*(\xi)$ où $\xi \times_S T$ lorsque ces notations n'entraînent pas des confusions ; le morphisme canonique $\alpha\colon \eta \to \xi$ sera alors noté, dans ce qui suit, par $\alpha_f(\xi)$. Si pour tout $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_S)$, l'image inverse de ξ par f existe, on dira aussi que *le foncteur image inverse par f dans $\mathscr{F}$ existe*, et $f^*(\xi)$ devient alors un *foncteur covariant en ξ*, de $\mathscr{F}_S$ dans $\mathscr{F}_T$. Ceci provient du fait que le deuxième membre dans (i) dépend de façon covariante de ξ, i.e. de façon précise désigne

un foncteur de $\mathscr{F}_T^\circ \times \mathscr{F}_S$ dans $\mathbf{Ens}$. Cette dépendance fonctorielle pour $f^*(\xi)$ s'explicite ainsi : considérons des f-morphismes cartésiens

$$\alpha\colon \eta \to \xi,\ \alpha'\colon \eta' \to \xi'$$

et un S-morphisme $\lambda\colon \xi \to \xi'$, alors il existe un T-morphisme et un seul $\mu\colon \eta \to \eta'$ tel que l'on ait

$$\alpha'\mu = \lambda\alpha$$

(comme il résulte du fait que α' est cartésien).

Notons aussi le fait immédiat suivant : considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[d, "\lambda"'] & \eta \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\mu"] \\ \xi' & \eta' \arrow[l, "\alpha'"'] \end{tikzcd}$$

163 dans $\mathscr{F}$, où α et α' sont des f-morphismes, et λ un S-isomorphisme, μ un T-isomorphism. *Pour que α soit cartésien, il faut et il suffit que α' le soit.*

Définition 5.2 *Un $\mathscr{E}$-foncteur $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est appelé un* foncteur cartésien *s'il transforme morphismes cartésiens en morphismes cartésiens. On désigne par* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ *formée des foncteurs cartésiens.*

Par exemple, considérant $\mathscr{E}$ comme une catégorie sur $\mathscr{E}$ grâce au foncteur identique, tout morphisme de $\mathscr{E}$ est cartésien, donc un foncteur cartésien de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est un foncteur section $F\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ qui transforme tout morphisme de $\mathscr{E}$ en un morphisme cartésien ; un tel foncteur s'appelle une section cartésienne *de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$.*

Proposition 5.3 *(i) Un foncteur $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ qui est une $\mathscr{E}$-équivalence, est un foncteur cartésien. (ii) Soient F, G deux $\mathscr{E}$-foncteurs* isomorphes *$\mathscr{F} \to \mathscr{G}$. Si l'un est cartésien, l'autre l'est. (iii) Le composé de deux foncteurs cartésiens $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et $\mathscr{G} \to \mathscr{H}$ est un foncteur cartésien.*

L'assertion (iii) est triviale sur la sur la définition, (ii) résulte de la remarque précédant 5.2, (i) résulte facilement de la définition et du critère 4.2 (iii) ; plus précisément, un morphisme α
part 33 dans $\mathscr{F}$ est cartésien si et seulement si $F(\alpha)$ l'est.

Corollaire 5.4 *Soit $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ une $\mathscr{E}$-équivalence. Alors pour toute catégorie $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{E}$, les foncteurs correspondants $G \mapsto G \circ F$ et $G \mapsto F \circ G$ induisent des équivalences de catégories :*

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G}, \mathscr{H}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F}, \mathscr{H})$$
$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{H}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{H}, \mathscr{G})$$

164 Cela se déduit de la façon habituelle de 4.2 critère (i) et de 5.3 (i) (ii) (iii). On peut préciser

que *le $\mathscr{E}$-foncteur $G\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ est cartésien si et seulement si $G \circ F$ l'est*, et de même *un $\mathscr{E}$-foncteur $G\colon \mathscr{H} \to \mathscr{F}$ est cartésien si et seulement si $F \circ G$ l'est.*

Il résulte de 5.4 (iii) que si on considère la sous-catégorie $\mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}$ de $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$ dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}$, et dont les morphismes sont les foncteurs *cartésiens* alors on a comme au N° 2 des accouplements :

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \times \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G},\mathscr{H}) \to \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F},\mathscr{H})$$

induit par ceux du N° 2, permettant de considérer $\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ comme un foncteur en $\mathscr{F},\mathscr{G}$, de la catégorie $\left(\mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}\right)^{\circ} \times \mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}$ dans $\mathbf{Cat}$). Nous aurons besoin de cette remarque surtout pour le cas où $\mathscr{F} = \mathscr{G}$:

Définition 5.5 *Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$. On désigne par*

$$\underset{\leftarrow}{\mathrm{Lim}}\,\mathscr{F}/\mathscr{E}$$

la catégorie des $\mathscr{E}$-foncteurs cartésiens $\mathscr{E} \to \mathscr{F}$, i.e. des sections cartésiennes de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$.

D'après ce qu'on vient de dire, $\underset{\leftarrow}{\mathrm{Lim}}\,\mathscr{F}/\mathscr{E}$ est un foncteur en $\mathscr{F}$, de la catégorie $\mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}$ dans la catégorie $\mathbf{Cat}$.

Nous verrons plus bas les relations entre cette opération $\underset{\leftarrow}{\mathrm{Lim}}$ et la notion de limite projective de catégories, ainsi que de nombreux exemples.

6 Catégories fibrées et catégories préfibrées. Produits et changement de base dans icelles

Définition 6.1 *Une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ est appelée une* catégorie fibrée *(et on dit alors que le foncteur $\mathscr{F} \to \mathscr{E}$ est* fibrant*) si elle satisfait les deux axiomes suivants :*

165 – $\mathrm{Fib}_{\mathrm{I}}$ *Pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, le foncteur image inverse par f dans $\mathscr{F}$ existe.*

– $\mathrm{Fib}_{\mathrm{II}}$ *Le composé de deux morphismes cartésiens est cartésien.*

Une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ satisfaisant la condition $\mathrm{Fib}_{\mathrm{I}}$ *est appelée une* catégorie préfibrée sur *$\mathscr{E}$.*

Si $\mathscr{F}$ est une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur $\mathscr{E}$, une sous-catégorie $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ est appelée une *sous-catégorie fibrée* (resp. une *sous-catégorie préfibrée*) si c'est une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur $\mathscr{E}$, et si de plus le foncteur d'inclusion est cartésien. Si par exemple $\mathscr{G}$ est une sous-catégorie *pleine* de $\mathscr{F}$, on voit que cela signifie que pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$ et pour tout $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{G}_S)$, $f^*_{\mathscr{F}}(\xi)$ est T-isomorphe à un objet de $\mathscr{G}_T$. Un autre cas intéressant est le suivant : $\mathscr{F}$ étant une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$, considérons la sous-catégorie $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ ayant mêmes objets, et dont les morphismes sont les morphismes *cartésiens* de $\mathscr{F}$; en particulier les morphismes de $\mathscr{G}_S$ sont les isomorphismes de $\mathscr{F}_S$. On voit de suite que c'est bien une sous-catégorie fibrée de $\mathscr{F}$, car dans la bijection

$$\mathrm{Hom}_T(\eta', \eta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_f(\eta', \xi)$$

relative à un f-morphisme cartésien α dans $\mathscr{F}$, aux T-isomorphismes du premier membre correspondent les morphismes cartésiens du second. Par définition, les sections cartésiennes $\mathscr{E} \to \mathscr{F}$ (correspondent alors biunivoquement aux $\mathscr{E}$-foncteurs quelconques $\mathscr{E} \to \mathscr{G}$ (mais on notera que le foncteur naturel

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{E}, \mathscr{G}) \to \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) = \varprojlim(\mathscr{F}/\mathscr{E})$$

est fidèle, mais en général n'est pas pleinement fidèle, i.e. n'est pas un isomorphisme).

Remarques. Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) Tous les morphismes de $\mathscr{F}$ sont cartésiens (ii) $\mathscr{F}$ est une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$, et les $\mathscr{F}_S$ sont des groupoïdes, (i.e. tout morphisme dans $\mathscr{F}_S$ est un isomorphisme). On dit alors que $\mathscr{F}$ est une
166 catégorie *fibrée en groupoïdes* sur $\mathscr{E}$. Ce sont elles qu'on rencontre surtout en "théorie des modules". Si $\mathscr{E}$ est un groupoïde, on montre que les conditions (i) et (ii) équivalent aussi à la suivante : (iii) $\mathscr{F}$ est un groupoïde, et le foncteur projection $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ est transportable (cf. 4.4). Par exemple, si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont des groupoïdes tels que $\mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$ et $\mathrm{Ob}\,\mathscr{F}$ soient réduits à un point, de sorte que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont définis, à isomorphisme près, par des groupes E et F, et le foncteur $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ est défini par un homomorphisme de groupes $p\colon F \to E$, alors $\mathscr{F}$ est fibré sur $\mathscr{E}$ si et seulement si p est surjectif, i.e. si p définit une extension du groupe E par le groupe $G = \mathrm{Ker}\, p$.

Proposition 6.2 *Soit $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ une $\mathscr{E}$-équivalence. Pour que $\mathscr{F}$ soit une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur $\mathscr{E}$, il faut et il suffit que $\mathscr{G}$ le soit.*

Résulte facilement des définitions et de la remarque signalée plus haut qu'un morphisme αx dans $\mathscr{F}$ est cartésien si et seulement si $F(\alpha)$ l'est.

Proposition 6.3 *Soient $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ deux catégories sur $\mathscr{E}$, et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ un morphisme dans $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2$. Pour que α soit cartésien, il faut et il suffit que ses composantes le soient.*

Soit en effet ξ_i le but et η_i la source de α_i, et soit $f : T \to S$ le morphisme de $\mathscr{E}$ tel que α_1 et α_2 soient des f-morphismes. Pour tout $\eta' = (\eta'_1, \eta'_2)$ dans $\mathscr{F}_T$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_T(\eta', \eta) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_f(\eta', \xi) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_T(\eta'_1, \eta_1) \times \mathrm{Hom}_T(\eta'_2, \eta_2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_f(\eta'_1, \xi_1) \times \mathrm{Hom}_f(\eta'_2, \xi_2)
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des bijections. Donc si l'une des flèches horizontales est une bijection, il en est de même de l'autre. Cela montre déjà que si α_1, α_2 sont cartésiens (donc la deuxième flèche horizontale est bijective) alors α l'est. La réciproque se voit en faisant dans le diagramme ci-dessus $\eta'_i = \eta_i$ d'où $\mathrm{Hom}_T(\eta'_i, \eta_i) \neq \emptyset$, d'abord pour $i = 2$ ce qui prouve que α_1 est cartésien, puis pour $i = 1$ ce qui prouve que α_2 est cartésien.

167

Corollaire 6.4 *Soit $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2$, et soit $F = (F_1, F_2)$ un $\mathscr{E}$-foncteur $\mathscr{G} \to \mathscr{F}$. Pour que $\mathscr{F}$ soit cartésien, il faut et il suffit que F_1 et F_2 le soient. On obtient ainsi un isomorphisme de catégories*

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}_1) \times \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}_2)$$

et en particulier (faisant $\mathscr{G} = \mathscr{E}$) un isomorphisme de catégories

$$\varprojlim(\mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2/\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim(\mathscr{F}_1/\mathscr{E}) \times \varprojlim(\mathscr{F}_2/\mathscr{E})$$

Corollaire 6.5 *Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux catégories fibrées (resp. préfibrées) au-dessus de $\mathscr{E}$, alors leur produit fibré $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times_{\mathscr{E}} \mathscr{F}_2$ est une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur $\mathscr{E}$.*

Ces résultats s'étendent d'ailleurs au cas du produit fibré d'une famille quelconque de catégories sur $\mathscr{E}$.

Proposition 6.6 *Soient $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$, de foncteur-projection p, et soit $\lambda\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ un foncteur, considérons $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ comme une catégorie sur $\mathscr{E}'$ par le foncteur-projection $p' = p \times_{\mathscr{E}} \mathrm{id}_{\mathscr{E}'}$. Soit α' un morphisme de $\mathscr{F}'$, pour que α' soit un morphisme cartésien, il faut et il suffit que son image α dans $\mathscr{F}$ le soit.*

La démonstration est immédiate et laissée au lecteur.

Corollaire 6.7 *Pour tout foncteur cartésien $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de catégories sur $\mathscr{E}$, le foncteur $F' = F \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ de $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ dans $\mathscr{G}' = \mathscr{G} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}'$ est cartésien.*

Par suite, le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathbf{Hom}_{\mathscr{E}'}(\mathscr{F}', \mathscr{G}')$ considéré dans N° 3 induit un foncteur

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F}', \mathscr{G}');$$

en d'autres termes, pour $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ fixés, *on peut considérer*

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}', \mathscr{G} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}')$$

168 *comme un foncteur en $\mathscr{E}'$ de la catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}{}^{\circ}$ dans $\mathbf{Cat}$*. Si on laisse varier également $\mathscr{F}, \mathscr{G}$, on trouve, un foncteur de la catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}{}^{\circ} \times \big(\mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}\big)^{\circ} \times \mathbf{Cat}^{\mathrm{cart}}_{/\mathscr{E}}$ dans $\mathbf{Cat}$. Lorsqu'on tient compte de l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}'}(\mathscr{F}', \mathscr{G}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}', \mathscr{G})$$

envisagé au N° 4, alors les $\mathscr{E}'$-foncteurs cartésiens de $\mathscr{F}'$ dans $\mathscr{G}'$ correspondent aux $\mathscr{E}$-foncteurs $\mathscr{F} \times_{\mathscr{E}} \mathscr{E}' \to \mathscr{G}$ qui transforment tout morphisme dont la première projection est un morphisme cartésien de $\mathscr{F}$, en un morphisme cartésien de $\mathscr{G}$. Faisant $\mathscr{F} = \mathscr{E}$, on trouve (après changement de notation) :

Corollaire 6.8 $\varprojlim(\mathscr{F}'/\mathscr{E}')$ *est isomorphe à la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{E}',\mathscr{F})$ *formée des* $\mathscr{E}$*-foncteurs* $\mathscr{E}' \to \mathscr{F}$ *qui transforment morphismes quelconques en morphismes cartésiens. En particulier, si* $\mathscr{F}$ *est une catégorie fibrée et si* $\tilde{\mathscr{F}}$ *est la sous-catégorie de* $\mathscr{F}$ *dont les morphismes sont des morphismes cartésiens de* $\mathscr{F}$*, alors on a une bijection*

$$\mathrm{Ob}\varprojlim(\mathscr{F}'/\mathscr{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{E}',\tilde{\mathscr{F}}).$$

Cela précise la façon dont l'expression $\varprojlim(\mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'/\mathscr{E}')$ doit être considérée comme un foncteur en $\mathscr{E}'$ et en $\mathscr{F}$, de la catégorie $\mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}{}^{\circ} \times \mathbf{Cat}_{/\mathscr{E}}^{\mathrm{cart}}$ dans la catégorie $\mathbf{Cat}$. On verra ultérieurement une dépendance fonctorielle plus complète par rapport à $\mathscr{E}'$, lorsque $\mathscr{F}$ est astreint à être une catégorie fibrée.

Corollaire 6.9 *Soit* $\mathscr{F}$ *une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur* $\mathscr{E}$*, alors* $\mathscr{F}' = \mathscr{F}\times_{\mathscr{E}}\mathscr{E}'$ *est une catégorie fibrée (resp. préfibrée) sur* $\mathscr{E}'$*.*

part 34

Proposition 6.10 *Soient* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *des catégories préfibrées sur* $\mathscr{E}$, F *un* $\mathscr{E}$*-foncteur cartésien de*
169 $\mathscr{F}$ *dans* $\mathscr{G}$*. Pour que* F *soit fidèle, resp. pleinement fidèle, (resp. une* $\mathscr{E}$*-équivalence) il faut et il suffit que pour tout* $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$*, le foncteur induit* $F_S\colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{G}_S$ *soit fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence).*

Démonstration immédiate à partir des définitions.

Pour finir ce numéro, nous donnons quelques propriétés des catégories fibrées, utilisant l'axiome $\mathrm{Fib}_{\mathrm{II}}$.

Proposition 6.11 *Soit* $\mathscr{F}$ *une catégorie préfibrée sur* $\mathscr{E}$*. Pour que* $\mathscr{F}$ *soit fibrée, il faut et il suffit qu'elle satisfasse la condition suivante :*

$\mathrm{Fib}_{\mathrm{II}'}$ *: Soit* $\alpha\colon \eta \to \xi$ *un morphisme cartésien dans* $\mathscr{F}$ *au-dessus du morphisme* $f : T \to S$ *de* $\mathscr{E}$*. Pour tout morphisme* $g\colon U \to T$ *dans* $\mathscr{E}$*, et tout* $\zeta \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}_U$*, l'application* $u \mapsto \alpha\circ u$ *:*

$$\mathrm{Hom}_g(\zeta,\eta) \to \mathrm{Hom}_{fg}(\zeta,\xi)$$

est bijective.

En d'autres termes, dans une catégorie *fibrée* sur $\mathscr{E}$, les diagrammes cartésiens sont caractérisés par une propriété, plus forte a priori que celle de la définition, (qu'on obtient en faisant $g = \mathrm{id}_T$ dans l'énoncé qui précède).

Corollaire 6.12 *Soient* $\mathscr{F}$ *une catégorie sur* $\mathscr{E}$*,* α *un morphisme dans* $\mathscr{F}$*. Pour que* α *soit un isomorphisme, il faut que* $p(\alpha) = f$ *soit un isomorphisme et que* α *soit cartésien ; la réciproque est vraie si* $\mathscr{F}$ *est fibrée sur* $\mathscr{E}$*.*

En effet, si α est un isomorphisme il en est évidemment de même de $f = p(\alpha)$; pour tout $\eta' \in \operatorname{Ob} \mathscr{F}_T$, l'application $u \mapsto \alpha \circ u$

$$\operatorname{Hom}(\eta', \eta) \to \operatorname{Hom}(\eta', \xi)$$

est bijective ; comme f est un isomorphisme, on voit de suite que un élément du premier membre est un T-morphisme si et seulement si son image dans le second est un f-morphisme, donc on obtient ainsi une bijection

$$\operatorname{Hom}_T(\eta', \eta) \to \operatorname{Hom}_f(\eta', \xi)$$

170 ce qui prouve la première assertion. Réciproquement, supposons que f soit un isomorphisme et que α satisfasse la condition énoncée dans $\mathrm{Fib}_{\mathrm{II}'}$ (ce qui signifie donc, lorsque $\mathscr{F}$ est fibrée sur $\mathscr{E}$, que α est cartésien), alors on voit tout de suite que pour tout $\zeta \in \operatorname{Ob} \mathscr{F}$, l'application $u \mapsto \alpha \circ u$ de $\operatorname{Hom}(\zeta, \eta)$ dans $\operatorname{Hom}(\zeta, \xi)$ est bijective, donc α est un isomorphisme.

Corollaire 6.13 *Soient $\alpha \colon \eta \to \xi$ et $\beta \colon \zeta \to \eta$ deux morphismes composables dans la catégorie $\mathscr{F}$ fibrée sur $\mathscr{E}$. Si α est cartésien alors β l'est si et seulement si $\alpha\beta$ l'est.*

On utilise la définition des morphismes cartésiens sous la forme renforcée de 6.11.

7 Catégories clivées sur $\mathscr{E}$

Définition 7.1 *Soit $\mathscr{F}$ une catégorie sur $\mathscr{E}$. On appelle* clivage *de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ une fonction qui attache à tout $f \in \mathrm{Fl}(\mathscr{E})$ un foncteur image inverse pour f dans $\mathscr{F}$, soit f^*. Le clivage est dit* normalisé *si $f = \mathrm{id}_S$ implique $f^* = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_S}$. On appelle* catégorie clivée *(resp.* catégorie clivée normalisée*) une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ munie d'un clivage (resp. d'un clivage normalisé).*

Il est évident que $\mathscr{F}$ admet un clivage si et seulement si $\mathscr{F}$ est préfibrée sur $\mathscr{E}$, et alors $\mathscr{F}$ admet un clivage normalisé. L'ensemble des clivages sur $\mathscr{F}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des parties K de $\mathrm{Fl}(\mathscr{F})$ satisfaisant les conditions suivantes :

a) Les $\alpha \in K$ sont des morphismes cartésiens.
b) Pour tout morphisme $f \colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$ et tout $\xi \in \operatorname{Ob}(\mathscr{F}_S)$, il existe un f-morphisme unique dans K, de but ξ.

Pour que le clivage défini par K soit normalisé, il faut et il suffit que K satisfasse de plus la condition

c) Les morhismes identiques dans $\mathscr{F}$ appartiennent à K.

171 Les morphismes éléments de K pourront être appelés les *morphismes de transport* pour le clivage envisagé.

La notion d'isomorphisme de catégories clivées sur $\mathscr{E}$ est claire. Plus généralement, on peut définir les morphismes de $\mathscr{E}$-catégories clivées comme les foncteurs de $\mathscr{E}$-catégories $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$

qui appliquent morphismes de transport en morphismes de transport. (Ce sont en particulier des foncteurs cartésiens). De cette façon les catégories clivées sur $\mathscr{E}$ sont les objets d'une catégorie, la *catégorie des catégories clivées sur* $\mathscr{E}$. Le lecteur explicitera l'existence de produits, liée au fait que si une catégorie sur $\mathscr{E}$ est produit de catégories $\mathscr{F}_i$ sur $\mathscr{E}$ munies chacune d'un clivage, alors $\mathscr{F}$ est muni d'un clivage naturel correspondant. On laisse également au lecteur d'expliciter la notion de changement de base dans les catégories clivées.

Nous désignerons par $\alpha_f(\xi)$ le morphisme canonique

$$\alpha_f(\xi)\colon f^*(\xi) \to \xi.$$

Il est, on l'a dit, fonctoriel en ξ, i.e. on a un homomorphisme fonctoriel

$$\alpha_f\colon i_T f^* \to i_S,$$

où pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$, i_S désigne le foncteur d'inclusion

$$i_S\colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{F}$$

Considérons maintenant des morphismes

$$f\colon T \to S \quad \text{et} \quad g\colon U \to T$$

dans $\mathscr{E}$, et soit $\xi \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}_S)$, il existe alors un unique U-morphisme

$$c_{f,g}(\xi)\colon g^* f^*(\xi) \to (fg)^*(\xi)$$

172 rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} f^*(\xi) \arrow[d, "\alpha_f(\xi)"'] & g^*(f^*(\xi)) \arrow[l, "\alpha_g(f^*(\xi))"'] \arrow[d, "c_{f,g}(\xi)"] \\ \xi & (fg)^*(\xi) \arrow[l, "\alpha_{fg}(\xi)"] \end{tikzcd}$$

(en vertu de la définition de $(fg)^*(\xi)$). Pour ξ variable, cet homomorphisme est fonctoriel, i.e. : on a un homomorphisme

$$c_{f,g}\colon g^* f^* \to (fg)^*$$

de foncteurs $\mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_U$. Notons tout de suite :

Proposition 7.2 *Pour que la catégorie clivée $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ soit fibrée, il faut et il suffit que les $c_{f,g}$ soient des isomorphismes.*

On en conclut, prenant pour f un isomorphisme, pour g son inverse, et en considérant les isomorphismes $c_{f,g}$ et $c_{g,f}$:

Corollaire 7.3 *Si $\mathscr{F}$ est une catégorie* fibrée *clivée sur $\mathscr{E}$, alors pour tout isomorphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, f^* est une équivalence de catégories $\mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_T$.*

Proposition 7.4 *Soit $\mathscr{F}$ une catégorie clivée sur $\mathscr{E}$. On a*

$$A)\qquad \begin{cases} c_{f,\mathrm{id}_T}(\xi) &= \alpha_{\mathrm{id}_T}(f^*(\xi)) \\ c_{\mathrm{id}_S,f}(\xi) &= f^*(\alpha_{\mathrm{id}_S}(\xi)) \end{cases}$$

$$B)\qquad c_{f,gh}(\xi)\cdot c_{g,h}(f^*(\xi)) = c_{fg,h}(\xi)\cdot h^*(c_{f,g}(\xi))$$

173 *(Dans ces formules, f, g, h désignent des morphismes*

$$V \to U \to T \to S$$

et ξ un objet de $\mathscr{F}_S$).

La première et seconde relation, dans le cas d'un clivage normalisé, prennent la forme plus simple

$$A')\qquad c_{f,\mathrm{id}_T} = \mathrm{id}_{f^*},\quad c_{\mathrm{id}_S,f} = \mathrm{id}_{f^*}.$$

Quant à la troisième, elle se visualise par la commutativité du diagramme

$$(D)\qquad \begin{array}{ccc} h^*g^*f^*(\xi) & \xrightarrow{c_{g,h}(f^*(\xi))} & (gh)^*(f^*(\xi)) \\ {\scriptstyle h^*(c_{f,g}(\xi))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{f,gh}(\xi)} \\ h^*(fg)^*(\xi) & \xrightarrow{c_{fg,h}(\xi)} & (fgh)^*(\xi) \end{array}\quad .$$

Dans le cas des catégories fibrées, (où les $c_{f,g}$ sont des isomorphismes), cette commutativité peut s'exprimer intuitivement par le fait que *l'utilisation successive des isomorphismes de la forme $c_{f,g}$ ne conduit pas à des "identifications contradictoires"*. On peut écrire également cette formule sans argument ξ, par l'utilisation du produit de convolution de homomorphismes de foncteurs :

$$c_{fg,h}\circ(h^* * c_{f,g}) = c_{f,gh}\circ(c_{g,h} * f^*).$$

La démonstration des deus premières formules 7.4 est triviale, esquissons celle de la troisième. Pour ceci, considérons, en plus du carré (D), le carré d'homomorphismes :

$$(D')\qquad \begin{array}{ccc} g^*f^*(\xi) & \xrightarrow{\alpha_g(f^*(\xi))} & f^*(\xi) \\ {\scriptstyle c_{f,g}(\xi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_f(\xi)} \\ (fg)^*(\xi) & \xrightarrow{\alpha_{fg}(\xi)} & \xi \end{array}$$

174 qui est commutatif par définition de $c_{f,g}(\xi)$. Considérons le diagramme obtenu en joignant les sommets de (D) aux sommets correspondants de (D') par les homomorphismes de la forme α :

$$\begin{array}{ll} \alpha_h(g^*f^*(\xi)), & \alpha_{gh}(f^*(\xi)) \\ \alpha_h((fg)^*(\xi)), & \alpha_{fgh}(\xi). \end{array}$$

Les quatre faces latérales du cube ainsi obtenu sont également commutatives : pour celle de gauche, cela provient du fait que la colonne gauche de (D) se déduit de la colonne gauche de (D')

par application de h, et que α_h est un homomorphisme fonctoriel ; pour les trois autres, ce n'est autre que la définition des opérations c des trois ctés restants de (D). Ainsi les cinq faces du cube autres que la face supérieure sont commutatives. Il en résulte que les deux (fgh)-morphismes $h^*g^*f^*(\xi) \to (fgh)^*(\xi)$ définis par (D) ont un même composé avec $\alpha_{fgh}(\xi)\colon (fgh)^*(\xi) \to \xi$, donc ils sont égaux par définition de $(fgh)^*$.

Bornons-nous pour la suite aux catégories clivées *normalisées*. Une telle catégorie donne naissance aux objets suivants :

a) Une application $S \mapsto \mathscr{F}_S$ de $\mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ dans $\mathbf{Cat}$.

b) Une application $f \mapsto f^*$, associant à toute $f \in \mathrm{Fl}(\mathscr{E})$, de source T et de but S, une foncteur $f^*\colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_T$.

c) Une application $(f, g) \mapsto c_{f,g}$, associant à tout couple de flèches (f, g) de $\mathscr{E}$, un homomorphisme fonctoriel $c_{f,g}\colon g^*f^* \to (fg)^*$.

D'ailleurs ces données satisfont aux conditions exprimées dans les formules $A')$ et $B)$ données plus haut. (N.B. Si on ne s'était pas borné au cas d'un clivage normalisé, il aurait fallu introduire un objet supplémentaire, savoir une fonction $S \mapsto \alpha_S$ qui associe à tout objet S de $\mathscr{E}$ un homomorphisme fonctoriel $\alpha_S\colon (\mathrm{id}_S)^* \to \mathrm{id}_{\mathscr{F}_S}$; la condition $A')$ se remplacerait alors par la condition $A)$).

175 Nous allons montrer maintenant comment on peut reconstituer (à isomorphisme unique près)
part 35 la catégorie clivée normalisée $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ à l'aide des objets précédents.

8 Catégorie clivée définie par un pseudo-foncteur $\mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$

Appelons, pour abréger, *pseudo-foncteur* de $\mathscr{E}^\circ$ dans $\mathbf{Cat}$ (il faudrait dire, pseudo-foncteur *normalisé*), un ensemble de données a),b),c) comme ci-dessus, satisfaisant les conditions $A')$ et $B)$. Au numéro précédent, nous avons associé, à une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$, un pseudo-foncteur $\mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$, ici nous allons indiquer la construction inverse. Nous laisserons au lecteur la vérification de la plupart des détails, ainsi que du fait que ces constructions sont bien "inverses" l'une de l'autre. De façon précise, il y aurait lieu de considérer les pseudo-foncteurs $\mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$ comme les objets d'une nouvelle catégorie, et de montrer que nos constructions fournissent des équivalences, quasi-inverses l'une de l'autre, entre cette dernière et la catégorie des catégories clivées au-dessus de $\mathscr{E}$, définie au numéro précédent.

On pose

$$\mathscr{F}_\circ = \coprod_{S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})} \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}(S),$$

ensemble somme des ensembles $\mathrm{Ob}\,\mathscr{F}(S)$ (N.B. nous noterons ici $\mathscr{F}(S)$ et non $\mathscr{F}_S$ la valeur en l'objet S de $\mathscr{E}$ du pseudo-foncteur donné, pour éviter des confusions de notation par la suite). On a donc une application évidente :

$$p_\circ\colon \mathscr{F}_\circ \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{E}.$$

Soient

$$\overline{\xi} = (S, \xi), \quad \overline{\eta} = (T, \eta) \qquad \text{(avec } \xi \in \operatorname{Ob} \mathscr{F}(S), \eta \in \operatorname{Ob} \mathscr{F}(T))$$

deux éléments de $\mathscr{F}_\circ$, et soit $f \in \operatorname{Hom}(T, S)$, on posera

$$h_f(\overline{\eta}, \overline{\xi}) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(T)}(\eta, f^*(\xi)).$$

176 Si on a de plus un morphisme $g \colon U \to T$ dans $\mathscr{E}$, et un $\zeta \in \operatorname{Ob} \mathscr{F}(U)$, on définit une application, notée $(u, v) \mapsto u \circ v$:

$$h_f(\overline{\eta}, \overline{\xi}) \times h_g(\overline{\zeta}, \overline{\eta}) \to h_{fg}(\overline{\zeta}, \overline{\xi}),$$

i.e. une application

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(T)}(\eta, f^*(\xi)) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(\zeta, g^*(\eta)) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(\zeta, (fg)^*(\xi)),$$

par la formule

$$u \circ v = c_{f,g}(\xi) \cdot g^*(u) \cdot v,$$

i.e. $u \circ v$ est le composé de la séquence

$$\zeta \xrightarrow{u} g^*(\eta) \xrightarrow{g^*(u)} g^* f^*(\xi) \xrightarrow{c_{f,g}(\xi)} (fg)^*(\xi).$$

On posera d'autre part

$$h(\overline{\eta}, \overline{\xi}) = \coprod_{f \in \operatorname{Hom} T, S} h_f(\overline{\eta}, \overline{\xi}),$$

et les accouplements précédents définissent des accouplements

$$h(\overline{\eta}, \overline{\xi}) \times h(\overline{\zeta}, \overline{\eta}) \to h(\overline{\zeta}, \overline{\xi}),$$

tandis que la définition des $h(\overline{\eta}, \overline{\xi})$ implique une application évidente :

$$p_{\overline{\eta}, \overline{\xi}} \colon h(\overline{\eta}, \overline{\xi}) \to \operatorname{Hom}(T, S).$$

Ceci dit, on vérifie les points suivants :

177 1) La composition entre éléments des $h(\overline{\eta}, \overline{\xi})$ est *associative*.

2) Pour tout $\overline{\xi} = (\xi, S)$ dans $\mathscr{F}_\circ$, considérons l'élément de

$$h_{\mathrm{id}_S}(\overline{\xi}, \overline{\xi}) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{F}_S}(\mathrm{id}_S^*(\xi), \xi) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{F}_S}(\xi, \xi),$$

et son image dans $h(\overline{\xi}, \overline{\xi})$. Cet objet est une *unité* à gauche et à droite pour la composition entre éléments des $h(\overline{\eta}, \overline{\xi})$.

Cela montre déjà que *l'on obtient une catégorie* $\mathscr{F}$, en posant

$$\operatorname{Ob} \mathscr{F} = \mathscr{F}_\circ, \quad \operatorname{Fl} \mathscr{F} = \coprod_{\xi, \overline{\eta} \in \mathscr{F}_\circ} h(\overline{\eta}, \overline{\xi}).$$

(N.B. on ne peut prendre simplement pour $\operatorname{Fl} \mathscr{F}$ la *réunion* des ensembles $h(\overline{\eta}, \overline{\xi})$, car ces derniers ne sont pas nécessairement disjoints). De plus :

3) Les applications $p_\circ\colon \operatorname{Ob}\mathscr{F} \to \operatorname{Ob}\mathscr{E}$ et $p_1 = (p_{\overline{\eta},\overline{\xi}})\colon \operatorname{Fl}\mathscr{F} \to \operatorname{Fl}\mathscr{E}$ définissent un *foncteur* $p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E}$. De cette façon, $\mathscr{F}$ devient une catégorie sur $\mathscr{E}$, de plus l'application évidente $h_f(\overline{\eta},\overline{\xi}) \to \operatorname{Hom}(\overline{\eta},\overline{\xi})$ induit une *bijection*

$$h_f(\overline{\eta},\overline{\xi}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_f(\overline{\eta},\overline{\xi}).$$

4) Les applications évidentes

$$\operatorname{Ob}\mathscr{F}(S) \to \mathscr{F}_\circ = \operatorname{Ob}\mathscr{F}, \qquad \operatorname{Fl}\mathscr{F}(S) \to \operatorname{Fl}\mathscr{F},$$

où la deuxième est définie par les applications évidentes

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(S)}(\xi,\xi') = h_{\mathrm{id}_S}(\overline{\xi},\overline{\xi}') \to \operatorname{Hom}(\overline{\xi},\overline{\xi}')$$

définissent un *isomorphisme*

$$i_S\colon \mathscr{F}(S) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_S.$$

178 5) Pour tout objet $\overline{\xi} = (S,\xi)$ de $\mathscr{F}$, et tout morphisme $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$, considérons l'élément $\overline{\eta} = (T,\eta)$ de $\mathscr{F}_T$, avec $\eta = f^*(\xi)$, et l'élément $\alpha_f(\xi)$ de $\operatorname{Hom}(\overline{\eta},\overline{\xi})$, image de $\mathrm{id}_{f^*(\xi)}$ par le morphisme $\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(T)}(f^*(\xi), f^*(\xi)) = h_f(\overline{\eta},\overline{\xi}) \to \operatorname{Hom}_f(\overline{\eta},\overline{\xi})$. *Cet élément est cartésien, et c'est l'identité dans* $\overline{\xi}$ *si* $f = \mathrm{id}_S$, en d'autres termes, l'ensemble des $\alpha_f(\xi)$ définit un *clivage normalisé de* $\mathscr{F}$ *sur* $\mathscr{E}$. De plus, par construction, on a commutativité dans le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(S) & \xrightarrow{f^*} & \mathscr{F}(T) \\ i_S \downarrow & & \downarrow i_T \\ \mathscr{F}_S & \xrightarrow{f^*_{\mathscr{F}}} & \mathscr{F}_T \end{array}$$

où $f^*_{\mathscr{F}}$ est le foncteur image inverse par f, relatif au clivage considéré sur $\mathscr{F}$. Enfin :

6) les homomorphismes $c_{f,g}$ donnés avec le pseudo-foncteur sont transformés, par les isomorphismes i_S, en les homomorphismes fonctoriels $c_{f,g}$ associés au clivage de $\mathscr{F}$.

Nous nous bornons à donner la vérification de 1) (qui est, si possible, mons triviale que les autres). Il suffit de prouver l'associativité de la composition entre les objets d'ensembles de la forme $h_f(\overline{\eta},\overline{\xi})$. Considérons donc dans $\mathscr{E}$ des morphismes

$$S \xleftarrow{f} T \xleftarrow{g} U \xleftarrow{h} V$$

et des objets

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau$$

dans $\mathscr{F}(S), \mathscr{F}(T), \mathscr{F}(U), \mathscr{F}(V)$, enfin des éléments

$$\begin{aligned} u \in h_f(\overline{\eta},\overline{\xi}) &= \operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(T)}(\eta, f^*(\xi)) \\ v \in h_g(\overline{\zeta},\overline{\eta}) &= \operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(U)}(\zeta, g^*(\eta)) \\ w \in h_h(\overline{\tau},\overline{\zeta}) &= \operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(V)}(\tau, h^*(\zeta)). \end{aligned}$$

179 On veut prouver la formule

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w),$$

qui est une égalité dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(V)}(\tau, (fgh)^*(\xi))$. En vertu des définitions les deux membres de cette égalité s'obtiennent par composition suivant le contour supérieur et inférieur du diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
h^*(u\circ v)\colon\ h^*(\zeta) \arrow[r, "h^*(v)"] & h^*g^*(\eta) \arrow[r, "h^*g^*(u)"] \arrow[d, "c_{g,h}(\eta)"'] & h^*g^*f^*(\xi) \arrow[r, "h^*(c_{f,g}(\xi))"] \arrow[d, "c_{g,h}(f^*(\xi))"] & h^*(fg)^*(\xi) \arrow[d, "c_{fg,h}(\xi)"] \\
\tau \arrow[u, "w"] \arrow[r, "v\circ w"] & (gh)^*(\eta) \arrow[r, "(gh)^*(u)"] & (gh)^*f^*(\xi) \arrow[r, "c_{f,gh}(\xi)"] & (fgh)^*(\xi)
\end{tikzcd}$$

Or le carré médian est commutatif parce que $c_{g,h}$ est un homomorphisme fonctoriel, et le carré de droite est commutatif en vertui de la condition $B)$ pour un pseudo-foncteur. D'où le résultat annoncé.

Bien entendu, il reste à preciser, lorsque le pseudo-foncteur envisagé provient déjà d'une catégorie clivée normalisée $\mathscr{F}'$ sur $\mathscr{E}$, comment on obtient un isomorphisme naturel entre $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}$. Nous en laissons le détail au lecteur.

Nous laissons également au lecteur d'interpréter, en termes de pseudo-foncteurs, la notion
part 36 d'image inverse d'une catégorie clivée $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ par un foncteur changement de base $\mathscr{E}' \to \mathscr{E}$.

9 Exemple : catégorie clivée définie par un foncteur $\mathscr{E}^\circ \to$ Cat ; catégories scindées sur $\mathscr{E}$

Supposons qu'on ait un foncteur

$$\phi\colon \mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat},$$

il définit alors un pseudo-foncteur en posant

$$\mathscr{F}(S) = \phi(S), \quad f^* = \varphi(f), \quad c_{f,g} = \mathrm{id}_{(fg)^*}$$

180 Donc la construction du numéro précédent nous donne une catégorie $\mathscr{F}$ clivée sur $\mathscr{E}$, dite associée au foncteur φ. Pour qu'une catégorie clivée sur $\mathscr{E}$ soit isomorphe à une catégorie clivée définie par un foncteur $\varphi : \mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$, il faut et il suffit manifestement qu'elle satisfasse les conditions :

$$(fg)^* = g^*f^*, \quad c_{f,g} = \mathrm{id}_{(fg)^*}.$$

En termes de l'ensemble K des morphismes de transport, cela signifie aussi simplement que *le composé de deux morphismes de transport est un morphisme de transport*. Un clivage d'une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ satisfaisant la condition précédente est appelée un *scindage* de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$, et une catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ munie d'un scindage est appelée une *catégorie scindée sur* $\mathscr{E}$. C'est donc un cas particulier de la notion de catégorie clivée. La catégorie des catégories scindées sur $\mathscr{E}$

est donc équivalente à $\mathbf{Hom}(\mathscr{E}^\circ, \mathbf{Cat})$. Noter qu'une catégorie scindée sur $\mathscr{E}$ est a fortiori une catégorie clivée sur $\mathscr{E}$.

Si $\mathscr{F}$ est une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$, il n'existe pas toujours de scindage sur $\mathscr{F}$. Supposons par exemple que $\mathrm{Ob}\,\mathscr{E}$ et $\mathrm{Ob}\,\mathscr{F}$ soient réduits à un élément, et que l'ensemble des endomorphismes dudit est un groupe E resp. F, de sorte que le foncteur projection p est donné par un homomorphisme de groupes $p\colon F \to E$, surjectif puisque p est fibrant. On vérifie alors aussitt que l'ensemble des clivages de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ est en correspondence biunivoque avec l'ensemble des applications $s\colon E \to F$ telles que $ps = \mathrm{id}_E$ (i.e. l'ensemble des "systèmes de représentants" pour les classes mod le sous-groupe G noyau de l'homomorphisme surjectif $p\colon F \to E$). Un clivage est un scindage si et seulement si s est un homomorphisme de groupes. Dire qu'il existe un scindage signifie donc que l'extension de groupes F de E par G est triviale, ce qui s'exprime, lorsque G est commutatif, par la nullité d'une certaine classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^2(E, G)$ (où G est considéré comme un groupe où E opère).

181 Supposons cependant que $\mathscr{F}$ soit une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$ telle que les $\mathscr{F}_S$ soient des catégories *rigides*, i.e. le groupe des automorphismes de tout objet de $\mathscr{F}_S$ est réduit à l'identité. Il est facile alors de prouver que $\mathscr{F}$ admet un scindage sur $\mathscr{E}$. En effet, on constate d'abord que la question d'existence d'un scindage n'est pas modifiée si on remplace $\mathscr{F}$ par une catégorie $\mathscr{E}$-équivalente, ce qui nous ramène en l'occurrence au cas où les $\mathscr{F}_S$ sont des catégories rigides *et réduites* (i.e.deux objets isomorphes dans $\mathscr{F}_S$ sont identiques). Mais si G est une catégorie rigide et réduite, tout isomorphisme de deux foncteurs $H \to G$ (où H est une catégorie quelconque) est une identité. Il s'ensuit que si $\mathscr{F}$ est une catégorie fibrée sur $\mathscr{E}$, telle que les catégories-fibres soient rigides et réduites, alors il existe un clivage *unique* de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$, qui est nécessairement un scindage. Donc $\mathscr{F}$ est isomorphe à la catégorie définie par un foncteur $\varphi\colon \mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$, tel que les $\varphi(S)$ soient des catégories rigides et discrètes, et le foncteur φ est défini à isomorphisme près.

10 Catégories co-fibrées, catégories bi-fibrées

Considérons une catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$, avec le foncteur projection

$$p\colon \mathscr{F} \to \mathscr{E},$$

elle définit une catégorie $\mathscr{F}^\circ$ au-dessus de $\mathscr{E}^\circ$, par le foncteur projection

$$p^\circ\colon \mathscr{F}^\circ \to \mathscr{E}^\circ.$$

Un morphisme $\alpha\colon \eta \to \xi$ dans $\mathscr{F}$ est dit *co-cartésien* si c'est un morphisme cartésien pour $\mathscr{F}^\circ$ sur $\mathscr{E}^\circ$. Explicitant, on voit que cela signifie que pour tout objet ξ' de $\mathscr{F}_S$, l'application $u \mapsto u \circ \alpha$

$$\mathrm{Hom}_S(\xi, \xi') \to \mathrm{Hom}_f(\eta, \xi')$$

est bijective. On dit alors aussi que (ξ, α) est une *image directe de* η par f, dans la catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$. Si elle existe pour tourt η dans $\mathscr{F}_T$, on dit que le foncteur image directe par f existe, et on

182 note ce foncteur $f_*^{\mathscr{F}}$ ou f_*, une fois choisi. Il est donc défini par un isomorphisme de bifoncteurs sur $\mathscr{F}_T^\circ \times \mathscr{F}_S$:

$$\mathrm{Hom}_S(f_*(\eta), \xi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_f(\eta, \xi).$$

Si donc f_* existe, pour que f^* existe, il faut et il suffit que f_* admette un foncteur adjoint, i.e. qu'il existe un foncteur $f^*\colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_T$ et un isomorphisme de bifoncteurs

$$\mathrm{Hom}_E(f_*(\eta), \xi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_T(\eta, f^*(\xi)).$$

Soit $g\colon U \to T$ un autre morphisme dans $\mathscr{E}$, et supposons que les images inverses et directes par f, g et fg existent. Considérons alors les homomorphismes fonctoriels

$$\begin{array}{cccc} c^{f,g}\colon & f_*g_* & \leftarrow & (fg)_* \\ c_{f,g}\colon & g^*f^* & \to & (fg)^*. \end{array}$$

On constate que si on considère f_*g_* et g^*f^* comme un couple de foncteurs adjoints, ainsi que $(fg)_*$ et $(fg)^*$, les deux homomorphismes précédents sont adjoints l'un de l'autre. Donc l'un est un isomorphisme si et seulement si l'autre l'est. En particulier :

Proposition 10.1 *Supposons que la catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ soit préfibrée et co-préfibrée. Pour qu'elle soit fibrée, il faut et il suffit qu'elle soit co-fibrée.*

Bien entendu, on dit que $\mathscr{F}$ est co-préfibrée resp. co-fibrée sur $\mathscr{E}$, si $\mathscr{F}^\circ$ est préfibrée resp.
part 37 fibrée sur $\mathscr{E}$. Nous dirons que $\mathscr{F}$ est bi-fibrée sur $\mathscr{E}$, si elle est à la fois fibrée et co-fibrée sur $\mathscr{E}$.

11 Exemples divers

a) **Catégories des flèches de $\mathscr{E}$.** Soit $\mathscr{E}$ une catégorie. Désignons par $\mathbf{\Delta^1}$ la catégorie associée
183 à l'ensemble totalement ordonné à deux éléments $[0, 1]$; elle a donc deux objets 0 et 1, et en plus des deux morphismes identiques une flèche $(0, 1)$ de source 0 et but 1. Soit

$$\mathbf{Fl}(\mathscr{E}) = \mathbf{Hom}(\mathbf{\Delta^1}, \mathscr{E})$$

on l'appelle la *catégorie des flèches de $\mathscr{E}$*. L'objet 1 de $\mathbf{\Delta^1}$ définit un foncteur canonique, appelé *foncteur-but*

$$\mathbf{Fl}(\mathscr{E}) \to \mathscr{E}$$

(le foncteur défini par l'objet 0 de $\mathbf{\Delta^1}$ est appelé *foncteur-source*). Pour tout objet S de $\mathscr{E}$, la catégorie-fibre $\mathbf{Fl}(\mathscr{E})_S$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $\mathscr{E}_{/S}$ des objets de $\mathscr{E}$ au-dessus de S.

Considérons un morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, alors il lui correspond un foncteur canonique

$$f_*\colon \mathscr{E}_{/T} = \mathscr{F}_T \to \mathscr{E}_{/S} = \mathscr{F}_S$$

et un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_S(f_*(\eta), \xi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_f(\eta, \xi)$$

qui fait donc de f_* un foncteur image directe pour f dans $\mathscr{F}$. On a d'ailleurs ici

$$(\mathrm{id}_S)_* = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_S}, \quad (fg)_* = f_* g_*, \quad c^{f,g} = \mathrm{id}_{(fg)},$$

i.e. $\mathscr{F}$ est muni d'un co-scindage sur $\mathscr{E}$. A fortiori, $\mathscr{F}$ est co-fibrée sur $\mathscr{E}$. Notons maintenant que l'ensemble des morphismes dans $\mathscr{F}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des diagrammes carrés commutatifs dans $\mathscr{E}$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f'} & Y \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ S & \xleftarrow{f} & T \end{array}$$

184 Par définition, le morphisme en question est cartésien si le carré est cartésien dans $\mathscr{E}$, i.e. s'il fait de Y un produit fibré de X et T sur S. Le foncteur image inverse f^* existe donc si et seulement si pour tout objet X sur S, le produit fibré $X \times_S T$ existe. Il résulte de 10.1 que si le produit de deux objets sur un troisième existe toujours dans $\mathscr{E}$, i.e. si $\mathscr{F}$ est préfibrée sur $\mathscr{E}$, alors $\mathscr{F}$ est même fibrée sur $\mathscr{E}$.

b) **Catégorie des préfaisceaux ou faisceaux sur des espaces variables**

Soit $\mathscr{E} = \mathbf{Top}$ la catégorie des espaces topologiques. Si T est un espace topologique, nous noterons $\mathscr{U}(T)$ la catégorie des ouverts de T, où les morphismes sont les applications d'inclusion. Si $\mathscr{C}$ est une catégorie, un foncteur $\mathscr{U}(T)^\circ \to \mathscr{C}$ s'appelle un *préfaisceau* sur T à valeurs dans $\mathscr{C}$, et un *faisceau* s'il satisfait une condition d'exactitude à gauche que nous ne répétons pas ici. La *catégorie* $\mathscr{P}(T)$ *des préfaisceaux sur* T *à valeurs dans* $\mathscr{C}$, est par définition la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{U}(T)^\circ, \mathscr{C})$, et la catégorie $\mathscr{F}(T)$ des faisceaux sur T à valeurs dans $\mathscr{C}$ est la sous-catégorie pleine dont les objets sont les objets de $\mathbf{Hom}(\mathscr{U}(T)^\circ, \mathscr{C})$ qui sont des faisceaux. Si $f\colon T \to S$ est un morphisme dans $\mathscr{E}$, i.e. une application continue d'espaces topologiques, il lui correspond par l'application croissante $U \mapsto f^{-1}(U)$ un foncteur $\mathscr{U}(S) \to \mathscr{U}(T)$, d'où un foncteur

$$f_*\colon\ \mathbf{Hom}(\mathscr{U}(T)^\circ, \mathscr{C}) \to \mathbf{Hom}(\mathscr{U}(S)^\circ, \mathscr{C})$$

appelé *foncteur image directe de préfaisceaux par* f. On voit aussitôt que l'image directe d'un faisceau est un faisceau, donc le foncteur $f_*\mathscr{P}(T) \to \mathscr{P}(S)$ induit un foncteur, également noté $f_*\colon \mathscr{P}(T) \to \mathscr{P}(S)$. On vérifie de plus trivialement (par l'associativité de la composition des foncteurs) qu'on a, pour une deuxième application continue $g\colon U \to T$, l'identité

$$(gf)_* = g_* f_*, \qquad \text{de même } (\mathrm{id}_S)_* = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(S)}.$$

De cette façon, on a obtenu un foncteur

$$S \mapsto \mathscr{P}(S)$$

resp.

$$S \mapsto \mathscr{F}(S)$$

185 de $\mathscr{E}$ dans $\mathbf{Cat}$. En fait, nous nous intéressons au foncteur correspondant

$$S \mapsto \mathscr{P}(S)^{\circ}, \qquad \text{resp. } S \mapsto \mathscr{F}(S)^{\circ}.$$

Il définit une catégorie co-fibrée, et même co-scindée, sur la catégorie des espaces topologiques qu'on appelle la *catégorie co-fibrée des préfaisceaux* (resp. *faisceaux*) *à valeurs dans* $\mathscr{C}$ (sous-entendu : sur des espaces variables). Explicitant la construction du N° 8, on voit qu'un morphisme d'un préfaisceau B sur T dans un préfaisceau A sur S est un couple (f, u) formé d'une application continue de T dans S, et d'un morphisme $u\colon A \to f_*(B)$ dans la catégorie $\mathscr{P}(S)$. Cette description vaut également pour les morphismes de faisceaux, $\mathscr{F}$ étant une sous-catégorie pleine de $\mathscr{P}$.

Dans les cas les plus importants, la catégorie $\mathscr{P}$ et la catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$ sont aussi des catégories fibrées, i.e. pour toute application continue, les foncteurs image directe $\mathscr{P}(T) \to \mathscr{P}(S)$ et $\mathscr{F}(T) \to \mathscr{F}(S)$ ont un foncteur adjoint, qui est alors noté f^* et appelé foncteur image inverse de préfaisceaux resp. foncteur image inverse de faisceaux, par l'application continue f. Ce foncteur existe par exemple si $\mathscr{C} = \mathbf{Ens}$. On peut montrer que le foncteur $f^*\colon \mathscr{P}(S) \to \mathscr{P}(T)$ existe chaque fois que dans $\mathscr{C}$ les limites inductives (relatives à des diagrammes dans l'Univers considéré) existent. La question est moins facile pour $\mathscr{F}$; on notera en effet que (même dans le cas $\mathscr{C} = \mathbf{Ens}$) l'image inverse d'un préfaisceau qui est un faisceau n'est en géneral pas un faisceau, en d'autres termes le foncteur image invers de faisceau n'est pas isomorphe au foncteur induit par le foncteur image inverse de préfaisceaux (malgré la notation commune f^*). Ainsi, $\mathscr{F}$ est une sous-catégorie co-fibrée de $\mathscr{P}$, mais pas une sous-catégorie fibrée, i.e. *le foncteur d'inclusion* $\mathscr{F} \to \mathscr{P}$ *n'est pas fibrant*.

La catégorie co-fibrée $\mathscr{P}$ peut se déduire d'une catégorie co-fibrée (ou plutôt fibrée) plus génerale, obtenue ainsi. Pour toute catégorie $\mathscr{U}$ (dans l'Univers fixé), on pose

$$\mathscr{P}(\mathscr{U}) = \mathbf{Hom}(\mathscr{U}, \mathscr{C})$$

186 et on note que $\mathscr{U} \mapsto \mathscr{P}(\mathscr{U})$ est de façon naturelle un foncteur contravariant en $\mathscr{U}$, de la catégorie $\mathbf{Cat}$ dans $\mathbf{Cat}$. Il définit donc une catégorie scindée au-desus de $\mathscr{E} = \mathbf{Cat}$, que nous noterons $\mathbf{Cat}_{//\mathscr{C}}$. Les objets de cette catégorie sont les couples $(\mathscr{U}, p)$ d'une catégorie $\mathscr{U}$ et d'un foncteur $p\colon \mathscr{U} \to \mathscr{C}$, et un morphisme de $(\mathscr{U}, p)$ dans $(\mathscr{V}, q)$ est essentiellement un couple (f, u), où f est un foncteur $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$ et u un homomorphisme de foncteurs $u\colon p \to qf$. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter la composition des morphismes dans $\mathbf{Cat}_{//\mathscr{C}}$. Le foncteur-projection

$$\mathscr{F} = \mathbf{Cat}_{//\mathscr{C}} \to \mathscr{E} = \mathbf{Cat}$$

associe au couple $(\mathscr{U}, p)$ l'objet $\mathscr{U}$; la catégorie-fibre en $\mathscr{U}$ est la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{U}, \mathscr{C})$ (à isomorphisme près). Lorsque dans $\mathscr{C}$ les limites inductives existent, on montre facilement que la catégorie fibrée $\mathbf{Cat}_{//\mathscr{C}}$ sur $\mathbf{Cat}$ est également co-fibrée sur $\mathbf{Cat}$, i.e. on peut définir la notion d'*image directe d'un foncteur* $p\colon \mathscr{U} \to \mathscr{C}$ par un foncteur $f\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$. La catégorie des préfaisceaux se déduit de la catégorie fibrée précédente par le changement de base

$$\mathbf{Top}^\circ \to \mathbf{Cat}$$

(foncteur $S \mapsto \mathscr{U}(S)$ défini plus haut), ce qui donne une catégorie fibrée sur $\mathbf{Top}^\circ$, et en passant à la catégorie opposée, on obtient la catégorie co-fibrée $\mathscr{P}$ des préfaisceaux au-dessus de $\mathbf{Top}$. La notion d'image inverse d'un foncteur correspond à celle d'image directe de préfaisceau, la notion d'image directe d'un foncteur à celle d'image inverse d'un préfaisceau.

c) **Objets à opérateurs au-dessus d'un objet à opérateurs**

Soit $\mathscr{F}$ une categorie sur $\mathscr{E}$, et soit S un objet de $\mathscr{E}$ où un groupe G opère, à gauche pour fixer les idées. Cet objet à opérateurs peut s'interpréter comme correspondant à un foncteur $\lambda\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ de la catégorie (à un seul objet, ayant G comme groupe d'endomorphismes) $\mathscr{E}'$ définie par G, dans la catégorie $\mathscr{E}$, et définie donc par changement de base une catégorie
187 $\mathscr{F}'$ au-dessus de $\mathscr{E}'$, qui est fibrée resp. co-fibrée lorsque $\mathscr{F}$ l'est sur $\mathscr{E}$. Une section de $\mathscr{E}'$ sur $\mathscr{F}'$ (nécessairement cartésienne, car $\mathscr{E}'$ est un groupoïde, et tout isomorphisme dans $\mathscr{F}'$ est cartésien en vertu de 6.12), peut aussi s'interpréter comme un $\mathscr{E}$-foncteur $\mathscr{E}' \to \mathscr{F}$ au-dessus de λ, ou aussi comme un objet à opérateurs ξ dans $\mathscr{F}$ "au-dessus" de l'objet à opérateurs S.

d) **Couples de foncteurs adjoints quasi-inverses ; autodualités**

Lorsque la catégorie-base $\mathscr{E}$ est réduite à deux objets a, b et, en plus des flèches identiques, à deux isomorphismes $f\colon a \to b$ et $g\colon b \to a$ invers l'un de l'autre (i.e $\mathscr{E}$ est un groupoïde connexe rigide avec deux objets), une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$ est essentiellement la même chose que le système formé par deux catégories $\mathscr{F}_a$ et $\mathscr{F}_b$ et un *couple de foncteurs adjoints* $G\colon \mathscr{F}_a \to \mathscr{F}_b$ et $F\colon \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_a$, qui soient des équivalences de catégories (donc quasi-inverses l'un de l'autre). On prendra pour $\mathscr{F}_a$ et $\mathscr{F}_b$ les catégories fibres de $\mathscr{F}$, pour F et G les foncteurs f^* et g^*, et les deux isomorphismes

$$u\colon FG \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{F}_a} \qquad v\colon GF \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{F}_b}$$

sont $c_{g,f}$ et $c_{f,g}$. Les deux conditions usuelles de compatibilité entre u et v ne sont autres que la condition 7.4 $B)$ pour les composés fgf et gfg. Il est facile de montrer que ces conditions suffisent à impliquer qu'on a bien un pseudo-foncteur $\mathscr{E}^\circ \to \mathbf{Cat}$.

Un cas interessant est celui où l'on a

$$\mathscr{F}_b = \mathscr{F}_a^\circ, \quad G = F^\circ, \quad v = u^\circ.$$

On appelle *autodualité* dans une catégorie $\mathscr{C}$, la donnée d'un foncteur $D\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^\circ$, et d'un isomorphisme $u\colon DD^\circ \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, tels que u et l'isomorphisme $u^\circ\colon D^\circ D \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{C}^\circ}$ fassent de (D, D°) un couple de foncteurs adjoints, (nécessairement quasi-inverses l'un de l'autre). Cette condition s'écrit :

$$D(u(x)) = u(D(x)) \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}).$$

188

e) **Catégories au-dessus d'une catégorie discrète $\mathscr{E}$.** On dit que $\mathscr{E}$ est une *catégorie discrète* si toute flèche y est une flèche identique, de sorte que $\mathscr{E}$ est défini à isomorphisme unique près par la connaissance de l'ensemble $I = \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$. La donnée d'une catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$ équivaut donc (à isomorphisme unique près) à la donnée d'une famille de catégories $\mathscr{F}_i (i \in I)$, les catégories fibres. Toute catégorie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ est fibrée, tout $\mathscr{E}$-foncteur $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est cartésien, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}/-}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathbf{Hom}(\mathscr{F}_i, \mathscr{G}_i).$$

En particulier, on obtient

$$\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F}/\mathscr{E}) = \varprojlim \mathscr{F}/\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \prod_i \mathscr{E}_i.$$

f) **Supposons que $\mathscr{E}$ ait exactement deux objets S et T,** et en plus des **morphismes identiques, un morphisme** $f \colon T \to S$. Alors une catégorie $\mathscr{F}$ au-dessus de $\mathscr{E}$ est définie, à $\mathscr{E}$-isomorphisme unique près, par la donnée de deux catégories $\mathscr{F}_S$ et $\mathscr{F}_T$ et d'un bifoncteur $H(\eta, \xi)$ sur $\mathscr{F}^{\circ}_{\mathscr{T}} \times \mathscr{F}_{\mathscr{S}}$, à valeurs dans $\mathbf{Ens}$. En effet, si $\mathscr{F}$ est une catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$, on lui associe les deux catégories-fibres $\mathscr{F}_S$ et $\mathscr{F}_T$ et le bifoncteur $H(\eta, \xi) = \mathrm{Hom}_f(\eta, \xi)$. On laisse au lecteur le soin d'expliciter la construction en sense inverse. Pour que la catégorie envisagée soit fibrée (ou préfibrée, cela revient au même) il faut et il suffit que le foncteur H soi représentable par rapport à l'argument ξ. Pour qu'elle soit co-fibrée, il faut et il suffit que H soit représentable par rapport a l'argument η.

g) Soit $\mathscr{F} = \mathscr{C} \times \mathscr{E}$, considérée comme catégorie au-dessus de $\mathscr{E}$ grce à pr_2. Alors $\mathscr{F}$ est fibrée et co-fibrée sur $\mathscr{E}$, et est même munie d'un scindage et d'un co-scindage canonique, correspondant au foncteur constant sur $\mathscr{E}$, resp. sur $\mathscr{E}^{\circ}$, à valeurs dans $\mathbf{Cat}$, de valeur $\mathscr{C}$. On a

$$\mathbf{\Gamma}(\mathscr{F}/\mathscr{E}) \simeq \mathbf{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{C})$$

189 et $\varprojlim \mathscr{F}/\mathscr{E}$ correspond à la sous-catégorie pleine formée des foncteurs $F \colon \mathscr{E} \to \mathscr{C}$ transformant morphismes quelconques en isomorphismes.

part 38

12 Foncteurs sur une catégorie clivée

Soit $\mathscr{F}$ une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$. Pour tout objet S de $\mathscr{E}$ on désigne par

$$i_S \colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{F}$$

le foncteur d'inclusion. On a donc un homomorphisme fonctoriel, pour tout morphisme $f \colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$:

$$\alpha_f \colon i_T f^* \to i_S,$$

où f^* est le foncteur changement de base $\mathscr{F}_S \to \mathscr{F}_T$ pour f défini par le clivage. Soit maintenant

$$F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}$$

un foncteur de $\mathscr{F}$ dans une catégorie $\mathscr{C}$, posons, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$,

$$F_S = F \circ i_S\colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{C}$$

et pour tout $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$,

$$\varphi_f = F * \alpha_f\colon F_T f^* \to F_S$$

On a ainsi, à tout foncteur $F\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}$, associé une famille (F_S) de foncteurs $\mathscr{F}_S \to \mathscr{C}$, et une famille (φ_f) d'homomorphismes de foncteurs $F_T f^* \to F_S$. Ces familles satisfont aux conditions suivantes :

a) $\varphi_{\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{F_S}$.

b) Pour deux morphismes $f\colon T \to S$ et $g\colon U \to T$ dans $\mathscr{E}$, on a commutativité dans le carré d'homomorphismes fonctoriels :

$$\begin{tikzcd}
F_U g^* f^* \arrow[r, "F_U * c_{f,g}"] \arrow[d, "\varphi_g * f^*"'] & F_U(fg)^* \arrow[d, "\varphi_{fg}"] \\
F_T f^* \arrow[r, "\varphi_f"] & F_S.
\end{tikzcd}$$

190 La première relation est triviale, et la deuxième relation s'obtient en appliquant le foncteur F au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
g^* f^*(\xi) \arrow[r, "c_{f,g}(\xi)"] \arrow[d, "\alpha_g(f^*(\xi))"'] & (fg)^*(\xi) \arrow[d, "\alpha_{fg}(\xi)"] \\
f^*(\xi) \arrow[r, "\alpha_f(\xi)"] & \xi
\end{tikzcd}$$

pour un objet variable ξ dans $\mathscr{F}_S$.

Si G est un deuxième foncteur $\mathscr{F} \to \mathscr{C}$, donnant naissance à des foncteurs $G_S\colon \mathscr{F}_S \to \mathscr{C}$ et des homomorphismes fonctoriels $\psi_f\colon G_T f \to G_S$, et si $u\colon F \to G$ est un homomorphisme fonctoriel, alors il lui correspond des homomorphismes fonctoriels $u * i_S$:

$$u_S\colon F_S \to G_S$$

et on constate aussitôt que pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, on a commutativité dans les carrés

c)

$$\begin{tikzcd}
F_T f^* \arrow[r, "\phi_f"] \arrow[d, "u_T * f^*"'] & F_S \arrow[d, "u_S"] \\
G_T f^* \arrow[r, "\psi_f"] & G_S
\end{tikzcd}$$

Proposition 12.1 *Soit $\mathscr{H}(\mathscr{F},\mathscr{C})$ la catégorie dont les objets sont les couples de familles (F_S) $(S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}))$ de foncteurs $\mathscr{F}_S \to \mathscr{C}$, et de familles (φ_f) $(f \in \mathrm{Fl}(\mathscr{F}))$ d'homomorphismes fonctoriels $F_T f^* \to F_S$, satisfaisant les conditions* a) et b)*, et où les morphismes sont les familles (u_S)*
191 *$(S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{F}))$ d'homomorphismes $F_S \to G_S$, vérifiant la condition de commutativité* c) *écrite plus haut, (la composition des morphismes se faisant par la composition des homomorphismes de foncteurs $\mathscr{F}_S \to \mathscr{C}$). Alors les deux lois explicitées plus haut définissent un* isomorphisme K *de la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{C})$ avec la catégorie $\mathscr{H}(\mathscr{F},\mathscr{C})$.*

Il est trivial qu'on a bien là un *foncteur* de la première catégorie dans la seconde. Ce foncteur est pleinement fidèle, car pour F, G donnés, $\mathrm{Hom}(F,G) \to \mathrm{Hom}(K(F),K(G))$ est trivialement injectif ; pour montrer que c'est surjectif, il suffit de noter que la condition de commutativité c) exprime la fonctorialité des applications $u(\xi) = u_S(\xi)\colon F(S) = F_S(\xi) \to G(\xi) = G_S(\xi)$ pour les homomorphismes de la forme $\alpha_f(\xi)$ dans $\mathscr{F}$, d'autre part on a la fonctorialité sur chaque catégorie fibre i.e. pour les morphismes dans $\mathscr{F}$ qui sont des T-morphismes ($T \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$), d'où la fonctorialité pour tout morphisme dans $\mathscr{F}$, puisque un f-morphisme (où $f\colon T \to S$ est un morphisme dans $(\mathscr{E})$ est de façon unique) un composé d'un morphisme $\alpha_f(\xi)$ et d'un T-morphisme. Il reste donc à prouver que le foncteur K est bijectif pour les objets. L'argument précédent montre déjà que K est injectif pour les objets, reste à prouver qu'il est surjectif, i.e. que si on part d'un système $(F_S), (\varphi_f)$, satisfaisant a) et b) ; et si on définit une application $\mathrm{Ob}\,\mathscr{F} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ par

$$F(\xi) = F_S(\xi) \ \text{ pour } \ \xi \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}_S \subset \mathrm{Ob}\,\mathscr{F}$$

et une application $\mathrm{Fl}(\mathscr{F}) \to \mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ par

$$F(\alpha_f(\xi)u') = \varphi_f(\xi)\ F_T(u')$$

pour tout morphisme $f\colon T \to S$ dans $\mathscr{E}$, tout objet ξ de $\mathscr{F}_S$ et tout T-morphisme u' de but $f^*(\xi)$, alors on obtient un *foncteur* F de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{C}$. En effet, la relation $F(\mathrm{id}_\xi) = \mathrm{id}_{F(\xi)}$ est triviale, il reste à prouver la multiplicativité $F(uv) = F(u)F(v)$ lorsqu'on a un f-morphisme $u\colon \eta \to \xi$ et un g-morphisme $v\colon \zeta \to \nu$, avec $f\colon T \to S$ et $g\colon U \to T$ des morphismes de $\mathscr{E}$. Posant $w = uv$, on aura

$$u = \alpha_f(\xi)u'\ ,\ v = \alpha_g(\eta)v'\ ,\ w = \alpha_{fg}(\xi)w'$$

192 avec

$$w' = c_{f,g}(\xi)g^*(u')v' \quad (cf.\ N^{\mathrm{o}}\ 8).$$

Avec ces notations, il faut prouver la commutativité du contour extérieur du diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
F_U(\zeta) \arrow[r, "F_u(v')"] \arrow[rrr, bend left, "F(w')"] \arrow[dr, "F(v)"'] & F_U g^*(\eta) \arrow[r, "F_u g^*(u')"] \arrow[d, "\varphi_g(\eta)"] & F_U g^* f^*(\xi) \arrow[r, "F_U(c_{f,g}(\xi))"] \arrow[d, "\varphi_g(f^*(\xi))"] & F_U(fg)^*(\xi) \arrow[d, "\varphi_{fg}(\xi)"] \\
 & F_T(\eta) \arrow[r, "F_T(u')"'] \arrow[rr, bend right, "F(u)"'] & F_T f^*(\xi) \arrow[r, "\varphi_f(\xi)"'] & F_S(\xi)
\end{tikzcd}$$

Or le triangle gauche est commutatif par définition de $F(v)$, le carré médian est commutatif car déduit de l'homomorphisme $u' : \xi \to f(\eta)$ par l'homomorphisme fonctoriel α_g, enfin le carré de droite est commutatif en vertu de la condition b). La conclusion voulue en résulte.

Supposons maintenant que $\mathscr{C}$ soit également une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$, que nous appellerons dorénavant $\mathscr{G}$, et que nous nous intéressons aux $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$. Si F est un tel foncteur, il induit des foncteurs

$$F_S : \mathscr{F}_S \to \mathscr{G}_S$$

pour les catégories fibres. D'autre part, pour tout morphisme $f : T \to S$ dans $\mathscr{E}$, et tout objet ξ dans $\mathscr{F}_S$, le f-morphisme $F(\alpha_f(\xi))$ se factorise de façon unique par un T-morphisme

$$\varphi_f(\xi) : F_T(f^*_{\mathscr{F}}(\xi)) \to f^*_{\mathscr{G}}(F_S(\xi))$$

(où le $\mathscr{F}$ ou le $\mathscr{G}$ en indice indique la catégorie clivée pour laquelle on prend le foncteur image inverse), d'où un homomorphisme fonctoriel de foncteurs de $\mathscr{F}_S$ dans $\mathscr{G}_T$:

$$\varphi_f : F_T f^*_{\mathscr{F}} \to f^*_{\mathscr{G}} F_S.$$

193 Les deux systèmes (F_S) et (φ_f) satisfont les conditions suivantes :

a') $\varphi_{\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{F_S}$.

b') Pour deux morphismes $f : T \to S$ et $g : U \to T$ dans $\mathscr{E}$, on a commutativité dans le diagramme d'homomorphismes fonctoriels suivant :

$$\begin{tikzcd}
F_U g^*_F f^*_F \arrow[rr, "F_U * c_{f,g}\mathscr{F}"'] \arrow[d, "\varphi_{g^*} f^*_{\mathscr{F}}"] & & F_U(fg)^*_F \arrow[dd, "\varphi_{fg}"'] \\
g^*_{\mathscr{G}} F_T f^*_F \arrow[d, "g^*_{\mathscr{G}} * \varphi_f"] & & \\
g^*_{\mathscr{G}} f^*_{\mathscr{G}} F_S \arrow[rr, "c_{f,g}\mathscr{G} * F_S"'] & & (fg)^*_{\mathscr{G}} F_S .
\end{tikzcd}$$

Nous en laissons la vérification au lecteur, ainsi que l'énoncé et la démonstration de l'analogue de la proposition 12.1, impliquant que l'on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$, et l'ensemble des systèmes (F_S),(φ_f) satisfaisant les conditions a') et b') ci-dessus. Bien entendu, dans cette correspondance, les foncteurs cartésiens sont caractérisés par la propriété que les homomorphismes φ_f sont des isomorphismes.

Remarque. Bien entendu, il y a intérêt le plus souvent à raisonner directement sur des catégories fibrées sans utiliser des clivages explicites, ce qui dispense en particulier de faire appel, pour la notion simple de $\mathscr{E}$-foncteur ou de $\mathscr{E}$-foncteur cartésien, à une interprétation pesante comme ci-dessus. C'est pour éviter des lourdeurs insupportables, et pour obtenir des énoncés
194 plus intrinsèques, que nous avons dû renoncer à partir comme dans [2] de la notion de catégorie

clivée (appelée "catégorie fibrée" dans loc. cit.), qui passe au second rang au profit de celle de catégorie fibrée. Il est d'ailleurs probable que, contrairement à l'usage encore prépondérant maintenant, lié à d'anciennes habitudes de pensée, il finira par s'avérer plus commode dans les problèmes universels, de ne pas mettre l'accent sur *une* solution supposée choisie une fois pour toutes, mais de mettre toutes les solutions sur un pied d'égalité.

13 Bibliographie

[1] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. Journal, pp. 119–221, Vol. 9, 1957.

[2] A. Grothendieck, Technique de descente et Théorèmes d'existence, I, Séminaire Bourbaki 190, décembre 1959.

Exposé VIII

Descente fidèlement plate

195
part 39

1 Descente des Modules quasi-cohérents

Soit $\mathbf{Sch}$ la catégorie des préschémas. Procédant comme dans VI 11.b, on trouve que la catégorie des couples (X, F) d'un préschéma X et d'un Module F sur X, (où les morphismes sont définis comme dans loc.cit. à l'aide de la notion d'image directe de Module par un morphisme d'espaces annelés) peut être considérée comme une catégorie fibrée au-dessus de $\mathbf{Sch}$, le foncteur de changement de base relativement à un morphisme $f\colon X \to Y$ dans $\mathbf{Sch}$ étant le foncteur image inverse de Modules par f. (On notera que la catégorie fibre en $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sch})$ de la catégorie précédente est la catégorie *opposée* à la catégorie des Modules sur X). Comme l'image inverse d'un Module quasi-cohérent est quasi-cohérent, on voit que la sous-catégorie pleine de la catégorie des couples (X, F), formée des couples pour lesquels F est quasi-cohérent, est une sous-catégorie fibrée de la catégorie fibrée précédente. (Par contre, si on ne fait pas d'hypothèses sur f, l'image directe d'un Module quasi-cohérent n'est pas en général un Module quasi-cohérent). On appellera simplement cette catégorie fibrée la *catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur les préschémas*.

Rappelons d'autre part qu'un morphisme $f\colon X \to Y$ d'espaces annelés est dit *fidèlement plat* s'il est *plat* (i.e. pour tout $x \in X$, $\mathscr{O}_{X,x}$ est un module plat sur $\mathscr{O}_{Y,f(x)}$, (SGA IV)), et *surjectif*. On dit que f est un morphisme *quasi-compact* si l'image inverse par f de toute partie quasi-compacte est quasi-compacte ; lorsque f est un morphisme de préschémas, cela signifie aussi
196 que l'image inverse par f d'un ouvert affine de Y est réunion *finie* d'ouverts affines de X.

Théorème 1.1 *Soit $\mathscr{F}$ la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur les préschémas. Soit $g\colon S'' \to S$ un morphisme de préschémas, fidèlement plat et quasi-compact. Alors g est un morphisme de $\mathscr{F}$-descente effective.*

Rappelons[1] que cela signifie deux choses :

[1]Nous admetterons ici la théorie générale de la descente exposée exposée en détail dans l'article de J. GIRAUD

Corollaire 1.2 *(Descente d'homomorphismes de Modules). Soient $g\colon S' \to S$ un morphisme de préschémas, fidèlement plat et quasi-compact, F et G deux Modules quasi-cohérents sur S, F' et G' leurs images inverses sur S', enfin F'' et G'' leurs images inverses sur $S'' = S' \times_S S'$. Considérons le diagramme d'applications d'ensembles défini par les foncteurs changement de base par g, p_1, p_2 (où $p_1, p_2 \colon S' \times_S S' \rightrightarrows S'$ sont les deux projections) :*

$$\mathrm{Hom}_S(F, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(F', G') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(F'', G'').$$

Ce diagramme est exact, i.e. définit une bijection du premier ensemble sur l'ensemble des coïncidences des deux applications écrites du deuxième dans le troisième.

En d'autres termes, le foncteur changement de base par f, $F \mapsto F'$, définit un foncteur *pleinement fidèle* de la catégorie des Modules quasi-cohérents sur S dans la catégorie des Modules quasi-cohérents sur S' munis d'une donné de descente relativement à f. De plus :

Corollaire 1.3 *(Descente de Modules). Pour tout Module quasi-cohérent F' sur S', toute donnée de descente sur F' relativement à g est* effective, *i.e. F' est isomorphe avec sa donnée de descente à l'image inverse par g d'un Module quasi-cohérent sur S (déterminé à isomorphisme unique près en vertu de 1.2).*

En d'autres termes, le foncteur pleinement fidèle précédent est même une *équivalence*. Pratiquement, cela signifie qu'il revient au même de se donner un Module quasi-cohérent sur S, ou un Module quasi-cohérent sur S' muni d'une donné de descente relativement à g.

197 **Démonstration** de 1.1. Soit d'abord T un S-préschéma qui est S-isomorphe à la somme d'une famille de ouverts induits S_i de S qui recouvrent S. Alors il est évident que le morphisme structural $T \to S$ est un morphisme de $\mathscr{F}$-descente effective (cela signifie précisément que la donnée d'un Module quasi-cohérent F sur S équivaut à la donnée de Modules quasi-cohérents F_i sur les S_i, et d'isomorphismes de recollement $\varphi_{ji}\colon F_i|S_i \cap S_j \to F_j|S_i \cap S_j$ satisfaisant la condition de cochaines bien connue). En vertu de VII, il s'ensuit que pour vérifier que $g\colon S' \to S$ est un morphisme de $\mathscr{F}$-descente effective, il suffit de le vérifier pour le morphisme $g_T\colon T' = T \times_S S' \to T$ déduit de g par le changement de base $T \to S$. (Remarquer que l'hypothèse sur $T \to S$ reste stable par changement de base quelconque, donc que $T \to S$ est en fait un morphisme de $\mathscr{F}$-descente effective *universel*). Prenant pour S_i des ouverts affines qui recouvrent S, on est donc ramené au cas où S est affine.

Alors S' est réunion finie d'ouverts affines, et prenant le S-schéma somme de ces derniers, on trouve un S-schéma affine S_1 et un S-morphisme $S_1 \to S'$ plat et surjectif. Donc S_1 est aussi fidèlement plat sur S. Si donc on prouve qu'un morphisme fidèlement plat et affine est un morphisme de $\mathscr{F}$-descente effective, donc un morphisme de $\mathscr{F}$-descente strict universel,

cité dans la note en bas de page de l'Avertissement, travail que nous citerons [D] par la suite. Cf. aussi [ ] pour un exposé succinct.

(l'hypothèse étant en effet stable par changement de base), on en conclut en particulier que le morphisme structural $S_1 \to S$ est un morphisme de $\mathscr{F}$-descente strict universel, et comme il existe un S-morphisme $S_1 \to S'$, il en résultera bien, par [D], que $g\colon S' \to S$ est un morphisme de $\mathscr{F}$-descente strict.

Cela nous ramène donc au cas où g est un morphisme affine, et comme on a vu on peut alors de plus supposer S affine, donc *on peut supposer S et S' affines*. Dans ce cas, 1.2 équivaut au

Lemme 1.4 *Soient A un anneau, A' une A-algèbre fidèlement plate, M et N deux A-modules, M' et N' les A'-modules déduits par changement d'anneau $A \to A'$, et M'',N'' les $A'' = A' \otimes_A A'$-modules déduits par changement d'anneau $A \to A''$. Alors la suite d'applications ensemblistes*

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A'}(M',N') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{A''}(M'',N'')$$

est exacte.

198 Comme l'homomorphisme $N \to N'$ est injectif (A' étant fidèlement plat sur A) on voit que la première flèche est injective. Il reste à prouver que si un A' homomorphisme $u'\colon M' \to N'$ est compatible avec les données de descente, alors il provient d'un A-homomorphisme $u\colon M \to N$. Or cela signifie aussi simplement que u' applique le sous-ensemble M de M' dans le sous-ensemble N de N' (l'application $u\colon M \to N$ induite sera alors automatiquement A-linéaire puisque u' est A'-linéaire, et on voit de même que u' est nécessairement égal à $u \otimes_A A'$). Or si $x \in M$, alors $u'(x)$ est un élément dans le noyau du couple d'applications $N' \rightrightarrows N''$. On est donc ramené pour prouver 1.4 au cas particulier suivant (correspondant au cas où $M = A$) :

Corollaire 1.5 *Soit N un A-module, alors la suite d'applications ensemblistes*

$$N \longrightarrow N' \rightrightarrows N''$$

est exacte.

Soit en effet A_1 une A-algèbre fidèlement plate. Pour montrer que la suite envisagée est exacte, il suffit de prouver que la suite qui s'en déduit par le changement d'anneau $A \to A_1$ l'est. Or cette dernière, comme on voit de suite, est celle relative au A -module $N_1 = N \otimes_A A_1$ est à la A_1-algèbre $A'_1 = A_1 \otimes_A A'$. Il suffit donc de trouver un A_1 fidèlement plat sur A, tel que $\mathrm{Spec}(A'_1) \to \mathrm{Spec}(A_1)$ soit un morphisme de $\mathscr{F}$-descente strict. Or il suffit en effet de prendre $A_1 = A'$, car alors le morphisme précédent admet un morphisme inverse à droite, donc en vertu de [D] c'est un morphisme de descente effective pour n'importe quelle catégorie fibrée sur **Sch**.

Il reste enfin à montrer que si N' est un A'-module muni d'une donnée de descente pour $A \to A'$, i.e. muni d'un isomorphisme

$$\varphi\colon N'_1 \xrightarrow{\sim} N'_2$$

entre les deux modules déduits de N par les changements d'anneaux $A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$, alors
199 N' est isomorphe avec sa donnée de descente à un module $N \otimes_A A'$. On voit facilement, compte
part 40 tenu de 1.5, que cet énoncé équivaut au suivant :

Lemme 1.6 *Soit N' un A'-module muni d'une donnée de descente pour $A \to A'$ (où A' est une A-algèbre). Soit N le sous-A-module de N' formé des x tels que $\varphi(x \otimes_{A'} 1_{A'}) = 1_{A'} \otimes_{A'} x$, et considérons l'homomorphisme canonique*

$$N \otimes_A A' \to N' \quad ,$$

(qui est alors compatible avec les données de descente). Si A' est fidèlement plat sur A, cet homomorphisme est un isomorphisme.

Démontrons ce lemme. Soit encore A_1 une A-algèbre fidèlement plate, pour montrer que le morphisme envisagé est un isomorphisme, il suffit de prouver qu'il le devient après le changement d'anneau $A_1 \to A$. Or, utilisant la platitude de A_1 sur A, on voit que l'homomorphisme ainsi obtenu n'est autre que celui qu'on obtiendrait directement en termes du module $N' \otimes_A A_1$ sur $A'_1 = A' \otimes_A A_1$, muni de la donnée de descente relativement à $A_1 \to A'_1$ qui se déduit canoniquement par changement d'anneau de celle qui était donnée sur N'. Ainsi il suffit de trouver un A_1 fidèlement plat sur A tel que $\mathrm{Spec}(A'_1) \to \mathrm{Spec}(A_1)$ soit un morphisme de $\mathscr{F}$-descente effective. On prend alors comme ci-dessus $A_1 = A'$. Cela achève la démonstration de 1.6, et par là la démonstration de 1.1.

Corollaire 1.7 *(Descente de sections de Modules). Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme de préschémas, fidèlement plat et quasi-compact. Pour tout Module quasi-cohérent G sur S, soient G' et G'' ses images inverses sur S' et $S'' = S' \times_S S'$, et considérons le diagramme d'homomorphismes de Modules sur S :*

$$G \longrightarrow g_*G' \rightrightarrows h_*G''$$

(où $h\colon S'' \to S$ est le morphisme structural). Ce diagramme est exact.

200 En effet, cela signifie que pour tout ouvert U dans S, le diagramme correspondant formé par les sections sur U est exact. On peut évidemment supposer alors $U = S$, et l'exactitude en question est alors un cas particulier de 1.2, obtenu en faisant $F = \mathscr{O}_S$.

Comme le foncteur image inverse de Modules est exact à droite, on conclut formellement à partir de 1.1 :

Corollaire 1.8 *(Descente de Modules quotients). Avec les notations de 1.7, soit de plus, pour tout Module quasi-cohérent F sur un préschéma, $\mathrm{Quot}(F)$ l'ensemble des Modules quasi-cohérents quotients de F. Avec cette convention, le diagramme d'applications d'ensembles :*

$$\mathrm{Quot}(G) \longrightarrow \mathrm{Quot}(G') \rightrightarrows \mathrm{Quot}(G'')$$

est exact.

(On aurait évidemment le même énoncé avec les sous-Modules au lieu de Modules quotients, puisque les deux se correspondent biunivoquement). Faisant en particulier $G = \mathscr{O}_S$, on trouve :

Corollaire 1.9 *(Descente des sous-préschémas fermés). Pour tout préschéma X, soit $\mathrm{H}(X)$ l'ensemble des sous-préschémas fermés de X. Avec cette notation, et sous les conditions de 1.7, le diagramme d'applications d'ensembles suivant*

$$\mathrm{H}(S) \longrightarrow \mathrm{H}(S') \rightrightarrows \mathrm{H}(S'')$$

est exact.

Il y a lieu de compléter le théorème 1.1 par le résultat suivant :

Proposition 1.10 *(Descente de propriétés de Modules). Soient $g\colon S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, F un module quasi-cohérent sur S. Pour que F soit de type fini, resp. de présentation finie, resp. localement libre et de type fini, il faut et il suffit que son image inverse F' sur S' le soit.*

201 Il n'y a qu'à prouver le "il suffit". On peut évidemment supposer S affine, et en remplaçant alors S' par la somme d'ouverts affines recouvrant S', on est ramené au cas où S' est également affine. Alors notre énoncé équivaut au suivant :

Corollaire 1.11 *Soient A un anneau, A' une A-algèbre fidèlement plate, M un A-module, M' le A'-module $M \otimes_A A'$. Pour que M soit de type fini (resp. de présentation finie, resp. localement libre et de type fini) il faut et il suffit que M' le soit.*

En effet, on a $M = \varinjlim_i M_i$, où les M_i sont les sous-modules de type fini de M. Par suite $M' = \varinjlim_i M'_i$, et si M' est de type fini, M' est égal à l'un des M'_i, donc par fidèle platitude M est égal à M_i, donc M est de type fini. Par suite il existe une suite exacte

$$0 \to R \to L \to M \to 0 \quad ,$$

avec L libre de type fini, d'où une suite exacte

$$0 \to R' \to L' \to M' \to 0 \quad ,$$

avec L' libre de type fini. Si donc M' est de présentation finie, R' est de type fini, donc d'après ce qui précède R est de type fini, donc M est de présentation finie. Enfin, dire que M est localement libre et de type fini, signifie qu'il est de présentation finie et plat (cf. IV dans le cas noethérien ; le cas général est laissé au lecteur). Comme chacune de ces propriétés se descend bien, il en est de même de leur conjonction, ce qui achève la démonstration.

Remarque 1.12 La conjonction de 1.1 et de 1.10 montre que l'énoncé 1.1 reste encore valable, quand on remplace la catégorie fibrée $\mathscr{F}$ par la sous-catégorie fibrée formée des Modules quasi-cohérents de type fini, resp. de présentation finie, resp. localement libres de type fini, resp. localement libres de rang donné n.

2 Descente des préschémas affines sur un autre

202

Comme le foncteur image inverse de Modules est compatible avec le produit tensoriel et d'autres opérations tensorielles, le théorème 1.1 implique diverses variantes, obtenues en envisageant, au lieu d'un seul Module quasi-cohérent, un Module quasi-cohérent ou un système de Modules quasi-cohérents muni de structures supplémentaires diverses s'exprimant à l'aide d'opérations tensorielles. Par exemple, la donnée de trois Modules quasi-cohérents F, G, H sur S et d'un accouplement

$$F \otimes G \to H \quad ,$$

équivaut à la donnée de trois Modules quasi-cohérents F', G', H' sur S', munis de données de descente relativement à $g\colon S' \to S$, et munis d'un accouplement

$$F' \otimes G' \to H' \quad ,$$

"compatible" avec ces données de descente, au sens évident du terme. Par exemple, si $F = G = H$, on voit que la donnée d'un Module quasi-cohérent F sur S muni d'une loi d'algèbre (dont pour l'instant nous ne supposons pas qu'elle satisfasse à aucun axiome d'associativité, commutativité ou d'existence d'une section unité), équivaut à la même donnée sur S', munie en plus d'une donnée de descente. En utilisant les résultats du numéro précédent, on constate aussitôt que pour que F satisfasse à l'un des axiomes habituels auxquels on vient de faire allusion, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi pour F'. Par exemple, la donnée d'une Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}$ sur S (par quoi nous sous-entendons désormais : associative, commutative, à section unité) équivaut à la donnée d'une Algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}'$ sur S', munie d'une donnée de descente relativement à $G\colon S' \to S$. Si on se rappelle l'équivalence entre la catégorie duale des Algèbres quasi-cohérentes sur S, et de la catégorie des S-préschémas affines sur S, (EGA II par.1), on trouve aussitôt :

Théorème 2.1 *Soit $\mathscr{F}'$ la catégorie fibrée des morphismes affines de préschémas $f\colon X \to S$,*
203 *considérée comme sous-catégorie fibrée de la catégorie fibrée des flèches dans la catégorie des préschémas* **Sch** *(VI 11.a). Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme de préschémas fidèlement plat et quasi-compact. Alors g est un morphisme de $\mathscr{F}'$-descente effective.*

3 Descente de propriétés ensemblistes et de propriétés de finitude de morphismes[2]

Proposition 3.1 *Soient $f\colon X \to Y$ un S-morphisme, $g\colon S' \to S$ un morphisme surjectif, $f'\colon X' = X \times_S S' \to Y' = Y \times_S S'$ le morphisme déduit de f par le changement de base à l'aide de $g\colon S' \to S$. Pour que f soit surjectif (resp. radiciel), il faut et il suffit que f' le soit.*

[2]Pour d'autres résultats comme ceux traités dans les numéros 3 et 4, Cf. EGA IV 2.3, 2.6, 2.7.

On note que f' peut aussi s'obtenir par le changement de base $Y' \to Y$, qui est également surjectif puisque déduit de $g\colon S' \to S$ qui l'est. D'autre part, pour tout $y \in Y$ et tout $y' \in Y'$ au-dessus de y, on a un isomorphisme

$$X'_{y'} \xleftarrow{\sim} X_y \otimes_{\mathrm{k}(y)} \mathrm{k}(y') \quad ,$$

où X_y désigne la fibre de X en y, et $X'_{y'}$ celle de X' en y'. Il en résulte que X_y est non vide (resp. a au plus un point, et ce dernier correspond à une extension résiduelle radicielle) si et seulement si $X'_{y'}$ a la même propriété. Cela prouve 3.1.

Corollaire 3.2 *Sous les conditions de 3.1, si f' est injectif (resp. bijectif), alors f l'est également.*

Cela provient du fait que si $X'_{y'}$ a au plus un point (resp. exactement un point) il en est de même de X_y ; il en est bien ainsi, puisque le morphisme $X'_{y'} \to X_y$ est surjectif (car déduit de
part 41 $\mathrm{Spec}(\mathrm{k}(y')) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{k}(y))$ qui l'est).

Proposition 3.3 *Avec les notations de 3.1. Supposons que $g\colon S' \to S$ soit surjectif et quasi-compact (resp. fidèlement plat et quasi-compact). Pour que f soit quasi-compact (resp. de type fini), il faut et il suffit que f' le soit.*

204 Il y a à prouver seulement le "il suffit". On peut évidemment supposer $S = Y$, puisque l'hypothèse faite sur $g\colon S' \to S$ est conservée pour $Y' \to Y$. De plus on peut supposer Y affine. Alors Y' est quasi-compact, donc X' est quasi-compact (puisque f' l'est par hypothèse). Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts affines de X recouvrant X, alors les X'_i sont des ouverts de X' recouvrant X', donc il y a une sous-famille finie qui recouvre X'. Comme $X' \to X$ est surjectif, il s'ensuit que les X_i correspondants recouvrent déja X, donc X est quasi-compact, i.e. f est quasi-compact. Supposons maintenant f' de type fini, prouvons que f l'est, en supposant g fidèlement plat. Remplaçant Y' par la somme d'une famille d'ouverts affines le recouvrant, on peut supposer Y' affine. Enfin, X étant recouvert par un nombre fini d'ouverts affines X_i par ce qui précède, il faut montrer qu'ils sont de type fini sur Y sachant que X'_i est de type fini sur Y'. Cela nous ramène alors au

Corollaire 3.4 *Soient B une A-algèbre, A' une A-algèbre fidèlement plate, $B' = B \otimes_A A'$ la A-algèbre déduite de B par changement d'anneau. Pour que B soit de type fini, il faut et il suffit que B' le soit.*

Il y a à prouver seulement le "il suffit". On a $B = \varinjlim_i B_i$, où les B_i sont les sous-algèbres de type fini de B. On a donc $B' = \varinjlim_i B'_i$, et si B' est de type fini sur A', alors B' est égal à un des B'_i, donc B est égal à B_i, donc est de type fini.

Corollaire 3.5 *Supposons encore le morphisme de changement de base $g\colon S' \to S$ fidèlement plat et quasi-compact. Pour que f soit quasi-fini, il faut et il suffit que f' le soit.*

En effet, la propriété "quasi-fini" est par définition la conjonction de "type fini" et "à fibres finies", dont chacune se descend bien par g, la première en vertu de 3.3, la seconde par le raisonnement de 3.1 (n'utilisant que le fait que g soit surjectif).

205 **Remarques 3.6** Soient A un anneau, X un A-préschéma. On voit facilement que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un anneau noethérien A_0 (qu'on peut si on veut supposer un sous-anneau de type fini de A), un A_0-préschéma de type fini X_0, un homomorphisme $A \to A_0$ et un A-isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} X_0 \times_{A_0} A$.

(ii) Le morphisme diagonal $X \to X \times_{\mathrm{Spec}(A)} X$ est quasi-compact (condition vide si X est séparé sur A), X est réunion finie d'ouverts affines X_i dont les anneaux B_i sont des algèbres de présentation finie sur A, i.e. quotients d'algèbres de polynômes à un nombre fini d'indéterminées, par des idéaux de type fini.

Si X est lui-même affine, d'anneau B, ces conditions signifient simplement que B est une algèbre de présentation finie sur A.

Un morphisme $f\colon X \to Y$ est dit *morphisme de présentation finie*, et on dit encore que X est de présentation finie sur Y, si Y est réunion d'ouverts affines Y_i, tel que $X|Y_i$ en tant que Y_i-préschéma satisfasse aux conditions équivalentes précédentes. Il en est alors de même pour $X|Y'$ pour *tout* ouvert affine Y' dans Y. C'est là une propriété stable par changement de base, et d'ailleurs le composé de deux morphismes de présentation finie est de présentation finie.

Ces notions posées, on voit sur (ii), procédant comme dans 1.10, que cet énoncé reste valable en y remplaçant les mots "de type fini" par "de présentation finie".

4 Descente de propriétés topologiques

Théorème 4.1 *Soient $g\colon Y' \to Y$ un morphisme, et Z une partie de Y. On suppose que g est plat, et qu'il existe un morphisme quasi-compact $f\colon X \to Y$ tel que $Z = f(X)$ (N.B. si Y est noethérien, cette dernière condition est impliquée par Z est constructible). Alors on a*

$$g^{-1}(\overline{Z}) = \overline{g^{-1}(Z)} \quad .$$

206 On peut supposer Y affine, puis Y' affine. Comme Y est affine, X est *réunion finie d'ouverts affines X_i, et remplaçant X par la somme des X_i, on peut supposer également X affine. Soient A, A', B les anneaux de Y, Y', X, $B' = B \otimes_a A'$ celui de $X' = X \times_Y Y'$, I le noyau de $A \to B$, I' le noyau de $A' \to B'$, donc les parties fermées de Y et Y' définies par ces idéaux sont respectivement l'adhérence de $Z = f(X)$ et l'adhérence de $Z' = f'(X') = g^{-1}(Z)$. On veut établir que cette dernière est égale à $g^{-1}(\overline{Z})$, ce qui résultera de $I' = IA'$, lui-même conséquence de la platitude de A' sur A.*

Corollaire 4.2 *Soient $g\colon Y' \to Y$ un morphisme plat et quasi-compact, et Z' une partie fermée de Y' saturée pour la relation d'équivalence ensembliste définie par g. Alors on a $Z' = g^{-1}(\overline{g(Z')})$.*

On a en effet $Z' = g^{-1}(Z)$, avec $Z = g(Z')$. On peut alors appliquer 4.1, en notant que la condition mise sur Z dans 4.1 est bien vérifiée en prenant pour X le préschéma Z' muni de la structure réduite induite par Y'. (Le fait que g soit quasi-compact assure alors que le morphisme induit $f\colon Z' \to Y$ est quasi-compact).

L'énoncé 4.2 signifie aussi que *la topologie de $g(Y')$ induite par Y est quotient de celle de Y'*. En particulier :

Corollaire 4.3 *Soit $g\colon Y' \to Y$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Alors g fait de Y un espace toplogique quotient de Y', i.e. pour une partie Z de Y, Z est fermée (resp. ouverte) si et seulement si $Z' = g^{-1}(Z)$ l'est.*

Rappelons maintenant que deux éléments a, b, de Y' ont même image dans Y si et seulement si ils sont de la forme $p_1(c), p_2(c)$ pour un élément convenable c dans $Y'' = Y' \times_Y Y'$. Il en résulte que si g est surjectif, on a un diagramme *exact* d'ensembles

$$\mathscr{P}(Y) \longrightarrow \mathscr{P}(Y') \rightrightarrows \mathscr{P}(Y'') \quad ,$$

où pour tout ensemble E, on désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Ceci posé, 4.3 peut aussi s'interpréter ainsi :

207

Corollaire 4.4 *(Descente des parties ouvertes resp. fermées). Soit $g\colon Y' \to Y$ comme dans 4.3. Pour tout préschéma X, soit $\mathrm{Ouv}(X)$ resp. $\mathrm{Fer}(X)$ l'ensemble de ses parties ouvertes resp. fermées. Alors on a des diagrammes* exacts *d'applications ensemblistes (déduits de g et des deux projections de $Y'' = Y' \times_Y Y'$) :*

$$\mathrm{Ouv}(Y) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(Y') \rightrightarrows \mathrm{Ouv}(Y'')$$

$$\mathrm{Fer}(Y) \longrightarrow \mathrm{Fer}(Y') \rightrightarrows \mathrm{Fer}(Y'')$$

On a le complément suivant à 4.3 :

Corollaire 4.5 *Soit $g\colon Y' \to Y$ comme dans 4.3, et soit Z une partie de Y telle qu'il existe un morphisme quasi-compact $f\colon X \to Y$ d'image Z (par exemple Z constructible, Y noethérien). Pour que Z soit une partie localement fermée de Y, il faut et il suffit que $Z' = g^{-1}(Z)$ soit une partie localement fermée de Y'.*

Il suffit de prouver le "il suffit". Soit Y_1 le sous-préschéma fermé de Y, adhérence de Z muni de la structure réduite induite, et soit $Y_1' = Y_1 \times_Y Y'$ le sous-préschéma fermé de Y' image réciproque de Y_1. Son ensemble sous-jacent est l'image inverse $g^{-1}(Y_1) = g^{-1}(\overline{Z})$, donc est égal en vertu de 4.1 à $\overline{Z'}$. Comme Z' est localement fermé dans Y', il est ouvert dans $\overline{Z'}$ donc ouvert dans Y'_1. Or ce dernier est fidèlement plat et quasi-compact sur Y_1, donc en vertu de 4.3 on en conclut que Z est ouvert dans Y_1, i.e. dans $\overline{Z}$, ce qui signifie que Z est localement fermé.

Corollaire 4.6 *Soit $g\colon Y' \to Y$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, $f : X \to Y$ un S-morphisme, $f'\colon X' \to Y'$ le S'-morphisme qui s'en déduit par changement de base. Supposons que f' soit une application ouverte (resp. une application fermée, resp. quasi-compact et un homéomorphisme dans, resp. un homéomorphisme sur) ; alors f a la même propriété.*

208 Comme Y' est fidèlement plat et quasi-compact sur Y, on peut supposer $Y = S$. Soit Q une partie de X, on a alors (en désignant par h le morphisme de projection $X' \to X$) :

$$g^{-1}(f(Q)) = f'(h^{-1}(Q)) \quad .$$

Si Q est ouvert (resp. fermé), il en est de même de $h^{-1}(Q)$, donc aussi de $f'(h^{-1}(Q))$ si on suppose f' une application ouverte (resp. fermée), donc il en est de même de $f(Q)$ en vertu de la formule précédente et de 4.3. Cela prouve les deux premières assertions dans 4.6, il reste à examiner le cas où f' est un homéomorphisme dans, et prouver alors que f est un homéomorphisme dans. (Le cas d'un homéomorphisme sur résultera alors de 3.1). En vertu de 3.1 f est injectif, il reste à prouver que l'application $X \to f(X)$ est ouverte. On sait déja que f est quasi-compact en vertu de 3.3. Il suffit de prouver que pour toute partie fermée Z de X, on a $Z = f^{-1}(\overline{f(Z)})$, ce qui équivaut à la formule analogue pour les images inverses par l'application surjective $h\colon X' \to X$, i.e. à

$$Z' = f'^{-1}(g^{-1}(\overline{f(Z)}) \quad ,$$

où on pose $Z' = h^{-1}(Z)$. Or en vertu de 4.1 appliqué à la partie $f(Z)$ de Y, on a $g^{-1}(\overline{f(Z)}) = \overline{g^{-1}(f(Z))}$, et la formule à prouver équivaut à

$$Z' = f'^{-1}(\overline{f'(Z)}) \quad ,$$

qui résulte de l'hypothèse f' est un homéomorphisme dans.

N.B. Dans ce dernier raisonnement, supposant déja que f est quasi-compact, on a pas utilisé que g est quasi-compact, mais seulement que g' est fidèlement plat. Donc c'est sous cette hypothèse qu'on peut descendre la propriété "homéomorphisme dans", ou "homéomorphisme sur", ou encore grâce au raisonnement précédent, la propriété "f' est quasi-compact et fait de $f'(X')$ un espace topologique quotient de X'".

Nous dirons qu'un morphisme $f\colon X \to Y$ de préschémas est *universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement bicontinu*, etc...) si pour tout changement de base $Y' \to Y$, $f'\colon X' \to Y'$ est un morphisme ouvert (resp. fermé, resp. un homéom. sur
part 42 l'espace image). On tire alors de 4.6 :

209

Corollaire 4.7 *Sous les conditions de 4.6, pour que f soit universellement ouvert, (resp. universellement fermé, resp. un homéomorphisme dans universel, resp. un homéomorphisme universel), il faut et il suffit que f' le soit.*

Corollaire 4.8 *Sous les conditions de 4.6, pour que f soit séparé (resp. propre) il faut et il suffit que f' le soit.*

Dire que f est séparé signifie que le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$ est fermé ou aussi universellement fermé, et la première assertion 4.8 résulte donc de 4.7. Dire que f est propre signifie que f satisfait les conditions a) f est de type fini b) f est séparé c) f est universellement fermé. La condition a) se descend bien en vertu de 3.3, b) aussi d'après ce qu'on vient de voir, enfin c) également par 4.7.

Remarques 4.9 Rappelons que lorsque $g\colon Y' \to Y$ est un morphisme plat de type fini, avec Y localement noethérien, alors g est un morphisme ouvert (VI 6.6) ce qui est un résultat plus précis que 4.3. On notera cependant que si f est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact de préschémas noethériens, alors f n'est pas en général un morphisme ouvert. Soit par exemple Y un schéma irréductible dont le point générique y n'est pas ouvert (par exemple une courbe algébrique), et prenons pour Y' le schéma somme $Y \amalg \operatorname{Spec}(\mathrm{k}(y))$, alors l'image par le morphisme structural $Y' \to Y$ de la partie ouverte $\operatorname{Spec}(\mathrm{k}(y))$ n'est pas une partie ouverte de Y. Le lecteur remarquera également que divers énoncés du présent exposé deviennent faux si on y abandonne l'hypothèse que le morphisme fidèlement plat envisagé est aussi quasi-compact, le cas type mettant les énoncés en défaut étant celui où on prend pour Y' le schéma somme des spectres des anneaux locaux des points de Y. Par exemple, prenant encore pour Y une courbe algébrique irréductible, et pour Z la partie de Y réduite au point générique, son image inverse dans Y' est ouverte, sans que Z soit ouverte.

210

4.10 Divers énoncés du présent exposé restent valables en y remplaçant l'hypothèse que Y' soit plat sur Y par la suivante : il existe un Module de type fini F sur Y', de support Y', plat par rapport à Y ; l'hypothèse de fidèle platitude sera alors remplacée par la précédente, plus l'hypothèse que $Y' \to Y$ est surjectif. Ceci s'applique aux deux premières assertions dans 1.10, à 3.3, 3.5, 4.1 et par suite à tous les résultats du présent numéro.

5 Descente de morphismes de préschémas

Proposition 5.1 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme de préschémas.*

a) *Supposons que g soit surjectif, et que l'homomorphisme*

$$g^*\colon \mathscr{O}_S \to g_*(\mathscr{O}_{S'})$$

soit injectif, alors g est un épimorphisme dans la catégorie des préschémas, et même dans la catégorie des espaces annelés.

b) *Supposons que g soit surjectif et fasse de S un espace topologique quotient de S'. Soit $S'' = S' \times_S S'$ et soit $h\colon S'' \to S$ le morphisme structural, considérons le diagramme* *d'homomorphismes canonique :*

$$\mathscr{O}_S \longrightarrow g_*(\mathscr{O}_{S'}) \rightrightarrows h_*(\mathscr{O}_{S''}) \quad ,$$

et supposons ce diagramme exact. *Alors g est un épimorphisme effectif dans la catégorie des préschémas (et aussi dans la catégorie des espaces annelés), i.e. le diagramme*

$$S \longleftarrow S' \leftleftarrows S''$$

est exact.

Démonstration. a) Il faut montrer qu'un morphisme d'espaces annelés $f\colon S \to Z$ est connu quand on connaît fg. Or comme g est surjectif, on connaît l'application ensembliste f_0 sous-jacente à f, reste à déterminer l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\mathscr{O}_Z \to \mathscr{O}_S$, ou ce qui
211 revient au même l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$u\colon f_0^{-1}(\mathscr{O}_Z) \to \mathscr{O}_S$$

défini par f. On connaît déja l'homomorphisme

$$(fg)_0^{-1}(\mathscr{O}_Z) = g_0^{-1}(f_0^{-1}(\mathscr{O}_Z)) \to \mathscr{O}_{S'}$$

défini par fg, ou ce qui revient au même, on dispose d'un homomorphisme

$$f_0^{-1}(\mathscr{O}_Z) \to g_{0*}(\mathscr{O}_{S'}) = g_*(\mathscr{O}_{S'}) \quad .$$

On constate aussitôt que ce dernier n'est autre que le composé de $g^*\colon \mathscr{O}_S \to g_*(\mathscr{O}_{S'})$ et de u, et comme g^* est injectif, u est connu quand on connaît g^*u. [N.B. on a pas utilisé évidemment que $g\colon S' \to S$ est un morphisme de préschémas, l'énoncé vaudrait pour un morphisme quelconque d'espaces annelés ; la même remarque vaut pour b), tant dans la catégorie des espaces annelés, que dans la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux. Noter aussi que si g est un morphisme de préschémas pas nécessairement surjectif, mais tel que $g^*\colon \mathscr{O}_S \to g_*(\mathscr{O}_{S'})$ soit injectif, alors pour deux morphismes f_1, f_2 de S dans un *schéma* Z tel que $f_1g = f_2g$, on a $f_1 = f_2$; en effet, si I est l'Idéal sur S qui définit le sous-préschéma de S des coïncidences de f_1, f_2 (image inverse du sous-préschéma diagonal de $Z \times Z$ par (f_1, f_2)), on voit que I est contenu dans $\mathrm{Ker}(g^*)$].

b) On doit montrer que pour tout espace annelé Z, le diagramme suivant d'applications

$$\mathrm{Hom}(S, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S', Z) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(S'', Z)$$

est exact, et qu'il en est de même lorsque Z est un espace annelé en anneaux locaux et qu'on se borne aux homomorphismes d'espaces annelés en anneaux locaux. Comme on sait déja par a) que la première application est injective, il reste à voir que si $f'\colon S' \to Z$ est un homomor-
212 phisme d'espaces annelés tel que $f'p_1 = f'p_2$, alors f' est de la forme fg, où $f\colon S \to Z$ est un

homomorphisme d'espaces annelés. Comme g est surjectif, il est alors évident que si f' est un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux, il en sera de même pour f.

De l'hypothèse sur f' résulte que l'application ensembliste sous-jacente f'_0 est constante sur les fibres de l'application g_0, donc comme cette dernière est surjective, f'_0 se factorise de façon unique en $f'_0 = f_0 g_0$, où $f_0 \colon S \to Z$ est une application, nécessairement continue puisque g_0 identifie S à un espace topologique quotient de S'. Considérons maintenant l'homomorphisme

$$f_0^{-1}(\mathscr{O}_Z) \to g_*(\mathscr{O}_{S'})$$

déduit de l'homomorphisme $(f_0 g_0)^{-1}(\mathscr{O}_Z) \to \mathscr{O}_{S'}$ correspondant à f'. L'hypothèse $f'p_1 = f'p_2$ s'interprète alors en disant que les composés de l'homomorphisme précédent avec les deux homomorphismes $g_*(\mathscr{O}_{S'}) \rightrightarrows h_*(\mathscr{O}_{S''})$ sont les mêmes donc d'après l'hypothèse b) il se factorise par un morphisme

$$f_0^{-1}(\mathscr{O}_Z) \to \mathscr{O}_S \quad .$$

Ce dernier définit un morphisme d'espaces annelés $f \colon S \to Z$, qui est le morphisme cherché.

Théorème 5.2 *Soit $\mathscr{F}$ la catégorie fibrée des flèches dans la catégorie* $\mathbf{Sch}$ *des préschémas (VI 11.a). Alors tout morphisme $g \colon S' \to S$ fidèlement plat et quasi-compact est un morphisme de $\mathscr{F}$-descente (ou encore, comme on dit, un morphisme de descente dans* $\mathbf{Sch}$*).*

Cela signifie donc ceci : soit $S'' = S' \times_S S'$, et pour deux préschémas X, Y sur S, considérons leurs images inverses X', Y' sur S' et leurs images inverses X'', Y'' sur S'', d'où un diagramme d'applications

$$\mathrm{Hom}_S(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(X',Y') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(X'',Y'') \quad ;$$

213 ces notations posées, 5.2 signifie que ce diagramme est exact. On notera qu'il n'est pas vrai en général que g soit un morphisme de descente effective, i.e. que pour tout préschéma X' sur S', toute donnée de descente sur X' relativement à $g \colon S' \to S$ soit effective. La question de l'effectivité, souvent délicate, sera examinée au N° 7.

On a vu [D], (compte tenu que dans $\mathbf{Sch}$ les produits fibrés existent) que l'énoncé 5.2 équivaut au suivant :

Corollaire 5.3 *Un morphisme fidèlement plat et quasi-compact de préschémas est un épimorphisme effectif universel.*

Comme un morphisme fidèlement plat et quasi-compact reste tel par toute extension de la base, on est ramené à prouver que c'est un épimorphisme effectif. On applique alors le critère 5.1 b), qui donne le résultat voulu, compte tenu de 4.3 et 1.7.

Corollaire 5.4 *Soit $g \colon S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, $f \colon X \to Y$ un S-morphisme, $f' \colon X' \to Y'$ le S'-morphisme qui s'en déduit par le changement de base $S' \to S$. Pour que f soit un isomorphisme, il faut et il suffit que f' le soit.*

En effet, si f' est un isomorphisme, c'est aussi un isomorphisme pour les structures de descente naturelles sur X', Y', et comme le foncteur $X \longmapsto X'$ de $\mathbf{Sch}_{/S}$ dans la catégorie des préschémas sur S' munis d'une donnée de descente relativement à g est pleinement fidèle par 5.2,
part 43 la conclusion voulue apparaît.

Corollaire 5.5 *Sous les conditions de 5.4, pour que f soit une immersion fermée (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion quasi-compacte) il faut et suffit que f' le soit.*

On peut supposer comme d'habitude $Y = S$, et il y a à prouver seulement le "il suffit". Notons que le fait que X'/Y' soit muni d'une donnée de descente relativement à $g\colon Y' \to Y$, et que le morphisme structural $f'\colon X' \to Y'$ soit une immersion donc un monomorphisme,
214 implique que les deux sous-objets de Y'' images inverses de X'/Y' par l'une et l'autre projection de S'' dans S' sont les mêmes. Si f' est une immersion fermée, il en résulte en vertu de 1.9 qu'il existe un sous-préschéma fermé X_1 de Y dont l'image inverse par $g\colon Y' \to Y$ est X'. Donc par unicité de la solution d'un problème de descente relativement à un morphisme de $\mathscr{F}$-descente, résulte que X_1 est Y-isomorphe à X, donc $f\colon X \to Y$ est une immersion fermée. On procède de même pour une immersion ouverte, en utilisant 4.4. Si enfin f' est une immersion quasi-compacte, f est quasi-compact en vertu de 3.3, donc on peut appliquer à la partie $f(X)$ de Y le critère 4.5, qui prouve que $f(X)$ est localement fermé puisque son image inverse $f'(X')$ dans Y' l'est. Remplaçant alors Y par une partie ouverte dans laquelle $f(X)$ soit fermée, on est ramené au cas où f' est une immersion fermée, donc f l'est en vertu de ce qui précède.

Corollaire 5.6 *Sous les conditions de 5.4, pour que f soit affine, il faut et il suffit que f' le soit.*

On procède comme dans 5.5, en utilisant 2.1 (On peut aussi utiliser le critère cohomologique de Serre [EGA II 5.2], qui démontre 5.6 sans utiliser de technique de descente).

Corollaire 5.7 *Sous les conditions de 5.4, pour que f soit entier (resp. fini, resp. fini et localement libre) il faut et il suffit que f' le soit.*

Il y a à prouver seulement le "il suffit", et comme d'habitude on peut supposer $Y = S$, Y affine, et Y' affine. Comme l'hypothèse implique que f' est affine, il en est de même de f d'après 5.6, donc X et par suite X' sont affines. Soient $A, A', B, B' = B \otimes_A A'$ les anneaux de Y, Y', X, X'. On a $B = \varinjlim_i B_i$, où B_i parcourt les sous-A-algèbres de B qui sont de type fini sur A, d'où $B' = \varinjlim_i B'_i$, où les B'_i sont des sous-algèbres de type fini de la A'-algèbre B'. Si B' est entier sur A, les B'_i sont des modules de type fini sur A', donc A' étant fidèlement plat sur A, les B_i sont des modules de type fini sur A, i.e. B est entier sur A. On voit de même que si B' est fini sur A', B l'est sur A. Même conclusion pour "localement libre de type fini", cf. 1.11.
215

Corollaire 5.8 *Sous les conditions de 5.4, supposons f quasi-compact et soient $\mathscr{L}$ un Module inversible sur X, et $\mathscr{L}'$ son image inverse sur X'. Pour que $\mathscr{L}$ soit ample (resp. très ample) relativement à f, il faut et il suffit que f' soit ample (resp. très ample) relativement à f'.*

Il y a à prouver seulement le “il suffit”. L’hypothèse sur $\mathscr{L}$ implique en tous cas que f' est séparé, donc f est séparé par 4.8, et comme f est quasi-compact, et $g\colon Y' \to Y$ est plat, le calcul des images directes par recouvrements affines montre qu’on a des isomorphismes

$$g^*(f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})) \xrightarrow{\sim} f'_*(\mathscr{L}'^{\otimes n})$$

pour tout entier n, donc on a un isomorphisme

$$g^*(\mathscr{S}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}' \quad ,$$

où $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}'$) désigne l’Algèbre graduée quasi-cohérente sur Y (resp. sur Y') somme directe des $f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ (resp. des $f'_*(\mathscr{L}'^{\otimes n})$) pour $n \geq 0$. Notons que pour tout $n \geq 0$, le conoyau de l’homomorphisme canonique $f'^*(\mathscr{S}'_n) \to \mathscr{L}'^{\otimes n}$ est l’image inverse par $X' \to X$ du conoyau de $f^*(\mathscr{S}_n) \to \mathscr{L}^{\otimes n}$, donc son support Z'_n est l’image inverse du support Z_n. Si f est ample l’intersection des Z'_n est vide, donc comme $X' \to X$ est surjectif, l’intersection des Z_n est vide, i.e. on a un morphisme canonique

$$j\colon X \to \operatorname{Proj}(\mathscr{S})$$

(EGA II 3). D’ailleurs, le morphisme analogue

$$j'\colon X' \to \operatorname{Proj}(\mathscr{S}')$$

n’est autre que celui qui est déduit du précédent par le changement de base $Y' \to Y$ (loc.cit.). Ceci posé, dire que $\mathscr{L}'$ est ample relativement à f' signifie que j' est une immersion, d’ailleurs nécessairement quasi-compacte puisque f' est quasi-compact. Donc en vertu de 5.5 j est une immersion, i.e. $\mathscr{L}$ est ample relativement à f. - On procède de façon toute analogue dans le cas
216 de “très ample”, en se bornant ci-dessus à $n = 1$, et en remplaçant la considération de $\operatorname{Proj}(\mathscr{S})$ par celle du fibré projectif $\mathscr{P}(\mathscr{S}_1)$ associé à $\mathscr{S}_1$.

Rappelons (EGA II 5.1.1) qu’un morphisme quasi-compact f est dit *quasi-affine* si pour tout ouvert affine U dans Y, $f^{-1}(U)$ est un préschéma isomorphe à un sous-schéma ouvert d’un schéma affine. On montre (loc.cit.) qu’il revient au même de dire que $\mathscr{O}_X$ est ample (ou aussi : très ample) relativement à f. Donc 5.8 implique :

Corollaire 5.9 *Sous les conditions de 5.4, et supposant f quasi-compact, pour que f soit quasi-affine, il faut et il suffit que f' le soit.*

Remarques 5.10 L’exemple de variété non projective de Hironaka montre qu’on peut avoir un morphisme propre $f\colon X \to Y$ de variétés algébriques non singulières (avec Y projective), tel que Y soit réunion de deux ouverts Y_i tels que $X_i = X \times_Y Y_i$ soit projectif sur Y_i, mais f n’étant pas projectif. Donc posant $Y' = Y_1 \amalg Y_2$, Y' est fidèlement plat et quasi-compact (et même quasi-fini) sur Y, $f'\colon X' \to Y'$ est projectif, mais f n’est pas projectif. Il faut donc faire attention que pour appliquer 5.8, et déduire du fait que f' est projectif la même conclusion sur f, il faut disposer déja sur X' d’un Module inversible $\mathscr{L}'$ ample pour f', *muni d’une donnée de descente relativement à $X' \to X$*, (ce qui permet de considérer $\mathscr{L}'$ comme l’image inverse d’un Module inversible $\mathscr{L}$ sur X, qui sera alors ample pour f grâce à 5.8). Lorsque $g\colon S' \to S$ est fini et localement libre, voir cependant 7.7.

6 Application aux morphismes finis et quasi-finis [3]

Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème 6.1 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme* propre à fibres finies, *avec Y localement noethérien. Alors f est fini.*

Théorème 6.2 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme* quasi-fini *et* séparé, *avec Y localement*
217 *noethérien. Alors f est quasi-affine, et à fortiori quasi-projectif.*

Remarques 6.3 Le théorème 6.1 est bien connu, et dû à Chevalley dans le cas des variétés algébriques ; on en trouvera aussi une démonstration simple dans [EGA III 4], utilisant le "théorème des fonctions holomorphes". La démonstration donnée ici n'utilise pas ce dernier théorème, mais par contre la théorie de la descente ; nous la donnons comme prime au lecteur, car on l'a "pour rien" en même temps que celle de 6.2. Rappelons aussi ([EGA III 4] ou [1]) que la forme globale du "Main Theorem" de Zariski, déduit du "théorème des fonctions holomorphes", affirme que si $f\colon X \to Y$ est quasi-fini et *quasi-projectif*, Y étant noethérien, alors X est Y-isomorphe à un sous-préschéma ouvert d'un Y-préschéma *fini* Z. La conjonction du "Main Theorem" et de 6.2 s'énonce donc ainsi :

Corollaire 6.4 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme quasi-fini et séparé, avec Y noethérien. Alors X est Y-isomorphe à un sous-préschéma ouvert d'un Y-préschéma fini Z.*

Une autre conséquence intéressante de 6.2 pour la théorie de la descente sera donnée avec 7.9.

Démonstration de 6.1 **et** 6.2. Nous admettrons le fait suivant, dont la démonstration est facile[4] :

Lemme 6.5 *Soit X un préschéma de type fini sur Y localement noethérien, et soit $y \in Y$. Pour qu'il existe un voisinage ouvert U de y tel que $X|U$ soit fini (resp. quasi-affine, resp. ...) sur U, il faut et il suffit que $X \times_Y \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_y)$ soit fini (resp. quasi-affine, resp. ...) sur $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_y)$.*

Comme d'autre part la propriété pour $f\colon X \to Y$ d'être fini, resp. quasi-affine, est locale sur Y, on est ramené pour prouver 6.1 et 6.2 au cas où Y est le spectre d'un anneau local, et est a fortiori de dimension finie. (N.B. on appelle *dimension d'un préschéma* Y le sup des dimensions de Krull de ses anneaux locaux). Nous procédons par récurrence sur

$$n = \dim(Y) \quad ,$$

218 l'assertion étant triviale pour $n < 0$. Nous pouvons donc supposer $n \geq 0$, et l'assertion démontrée pour les dimensions $n' < n$. On peut à nouveau supposer que Y est le spectre d'un

[3]Cf. EGA IV 18.12 pour des généralisations à des préschémas non nécessairement localement noethériens

[4]Cf. EGA IV 8

anneau local noethérien A, de dimension n. Notons que les hypothèses faites dans 6.1 et 6.2 sont stables par changement de base (on s'en est déja servi dans la réduction du début), elles resteront vraies après le changement de base $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$. Comme ce dernier est fidèlemeent plat et quasi-compact, les énoncés 5.7 et 5.9 nous ramènent au cas où A est de plus complet. Utilisant alors le fait que tout anneau local noethérien B sur A quasi-fini sur A est fini sur A, et le fait que X est séparé sur Y et la fibre de y est formée de points isolés, on trouve une décomposition

$$X = X' \amalg X''$$

oú X' est *fini* sur Y, et où la fibre de X'' en y est vide. Si X est propre sur Y, il en est de même de X'', donc son image dans Y est fermée, et comme elle ne contient pas y, elle est vide, donc $X'' = \emptyset$ donc $X = X'$, ce qui montre que X est fini sur Y et démontre 6.1 (N.B. l'hypothèse de récurrence est ici inutile). Si X est quasi-fini sur Y, X'' l'est aussi, or X'' se trouve en fait sur l'ouvert $Y - (y)$ de Y, *qui est de dimension* $< n$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, X'' est quasi-affine sur $Y - (y)$, donc aussi sur Y, il en est évidemment de même de X', donc aussi de leur somme X, ce qui prouve 6.2.

Remarque 6.6 Les théorèmes 6.1 et 6.2 restent valables si on ne suppose plus Y localement noethérien, à condition de spécifier que l'on suppose f de présentation finie (cf 3.6). En effet, on peut encore supposer Y affine, et alors on vérifie sans dificulté que la situation $f\colon X \to Y$ est déduit, par un changement de base $Y \to Y_0$, d'une situation $f_0\colon X_0 \to Y_0$ satisfaisant les mêmes hypothèses que f, avec Y_0 *noethérien*. Donc d'après le résultat 6.1 resp. 6.2, f_0 est fini resp. quasi-affine, donc il en est de même de f. Ce genre de raisonnement est souvent utile
219 pour se débarrasser d'hypothèses noethériennes, (qui finissent toujours par être gênantes dans les applications.

part 44

7 Critères d'effectivité pour une donnée de descente

Considérons comme d'habitude un morphisme de préschémas

$$g\colon S' \to S$$

et un S-préschéma X'. Conformément aux faits généraux (SGA VII, 9), la donnée d'une donnée de descente sur X', relativement à g, est équivalente à la donnée d'un couple d'équivalence [3] :

$$q_1, q_2\colon X'' \rightrightarrows X'$$

tel que le morphisme structural $X' \to S'$ soit compatible avec ce couple et le couple d'équivalence

$$p_1, p_2\colon S'' = S' \times_S S' \rightrightarrows S'$$

défini par g, et tel que les deux carrés (ou l'un des deux, cela revient au même par raison de symétrie) extraits du diagramme correspondant

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d] & X'' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d] \\ S' & S'' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

(en utilisant soit p_1, q_1, soit p_2, q_2), soit *cartésien*. Une solution du problème de descente posé par cette donnée de descente, i.e. un objet X sur S muni d'un isomorphisme $X \times_S S' \xleftarrow{\sim} X'$ compatible avec les données de descente, équivaut à la donnée d'un carré *cartésien*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & X' \arrow[l, "h"'] \arrow[d] \\ S & S' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

satisfaisant $hq_1 = hq_2$.

220 Comme l'ensemble des morphismes fidèlement plats et quasi-compacts est stable par changement de base, et qu'un morphisme fidèlement plat et quasi-compact est un épimorphisme effectif en vertu de 5.3, il résulte de la théorie générale [D] :

Proposition 7.1 *Supposons $g\colon S' \to S$ fidèlement plat et quasi-compact. Pour qu'une donnée de descente sur X' relativement à g soit effective, il faut et il suffit que la relation d'équivalence $R = (q_1, q_2)$ qu'elle définit soit effective (i.e. le quotient X'/R existe et X'' devient le carré fibré de X' sur X'/R), et que le morphisme canonique $X' \to X'/R$ soit fidèlement plat et quasi-compact.*

Ainsi la question de l'effectivité d'une donnée de descente est un cas particulier de la question d'effectivité d'un graphe d'équivalence, et divers critères d'effectivité donnés dans ce numéro peuvent s'obtenir de cette façon. Néanmoins on dispose dans le contexte de la descente du théorème 2.1, qui implique que *si X' est affine sur S', toute donnée de descente sur X' relativement à g est effective*, énoncé qui n'a pas d'analogue pour le passage au quotient par un graphe d'équivalence plat général. Tous les critères d'effectivité que nous donnons ici peuvent aussi être considérés comme déduits du précédent.

Soit U' un sous-préschéma de X' (ou plus généralement un sous-objet de X' dans la catégorie $\mathbf{Sch}$) ; on dit que U' est *stable par la donnée de descente* sur X', si on peut trouver sur U' une donnée de descente relativement à g, telle que l'immersion $U' \to X'$ soit compatible avec les données de descente. Cela signifie aussi que les images inverses de U' dans X'' par q_1 et q_2 sont les mêmes (ou aussi, comme on dit, que U' est *stable par la relation d'équivalence R*), et bien entendu la donnée de descente en question sur U' est alors unique, et dite *donnée de descente induite* par celle de X'. Ceci posé :

221 **Proposition 7.2** *Soit (X'_i) un recouvrement de X' par des ouverts X'_i stables par la donnée de*

descente. Pour que la donnée de descente sur X' soit effective, il faut et il suffit qu'il en soit de même des données de descente induites dans les X'_i.

C'est là une conséquence facile de 7.1 par exemple, et le détail de la démonstration est laissé au lecteur.

Corollaire 7.3 *Soit (S_i) un recouvrement ouvert de S, et pour tout i soient S'_i et X'_i déduits de S' de X' par le changement de base $S_i \to S$. Pour que la donnée de descente sur X' soit effective, il faut et il suffit que, pour tout i, la donnée de descente sur X'_i relativement à $g_i \colon S'_i \to S_i$ soit effective.*

Ce critère nous ramène toujours pratiquement au cas où S est affine. Dans le cas où S' est également affine, ce qui est le cas le plus fréquent dans les applications, on a :

Corollaire 7.4 *Supposons S et S' affines. Pour que la donnée de descente sur X' soit effective, il faut et il suffit que X' soit réunion d'ouverts X'_i affines et stables par la donnée de descente.*

La suffisance provient de 7.2 et du fait que si X'_i est affine, il est affine sur S' et on peut appliquer 2.1. Pour la nécessité, on note que si X' provient de X, et si X est recouvert par des ouverts affines X_i, alors les $X'_i = X_i \times_S S'$ sont des ouverts affines stables par les données de descente et recouvrant X'.

Corollaire 7.5 *Soit $g \colon S' \to S$ un morphisme fidèlement plat, quasi-compact et* radiciel. *Alors g est un morphisme de descente* effective, *i.e. pour tout X' sur S', toute donnée de descente sur X' relativement à $g \colon S' \to S$ est effective.*

En effet, en vertu de 7.3 on peut supposer S affine, donc comme S' est radiciel sur S donc séparé, S' est séparé. D'ailleurs pour tout $x' \in X'$, la fibre $R(x') = q_2(q_1^{-1}(x'))$ de la relation
222 d'équivalence ensembliste définie par la relation d'équivalence R est réduite à un point, car g étant radiciel, il en est de même de p_1, p_2 qui s'en déduisent par changement de base $S' \to S$, donc aussi de q_1, q_2 qui se déduisent des précédents par changement de base $X' \to S''$. Donc *tout ouvert de X' est stable* par la donnée de descente. Recouvrons alors X' par des ouverts affines X'_i, ils sont affines sur S puisque S' est séparé, donc la donnée de descente induite est effective par 2.1. On conclut alors par 7.2.

On notera que 7.5 donne le seul cas connu d'un morphisme de descente effective dans la catégorie des préschémas, et c'est probablement le seul cas en effet, même en se limitant aux schémas noethériens, ou aux schémas de type fini sur un corps.

Lorsqu'on suppose S localement noethérien et S' de type fini sur S, l'énoncé 7.5 est aussi un cas particulier du suivant (qui généralise la descente galoisienne de Weil et la descente inséparable de Cartier) :

Corollaire 7.6 *Soit $g \colon S' \to S$ un morphisme fini localement libre (i.e. défini par une Algèbre sur S qui est un module localement libre de type fini) et surjectif (donc g est fidèlement plat et* *quasi-compact, donc un morphisme de descente). Soit X' un S'-préschéma muni d'une donnée de descente. Pour que cette donnée soit effective, il faut et il suffit que pour tout $x' \in X'$, la fibre $R(x') = q_2(q_1^{-1}(x'))$ soit contenue dans un ouvert affine (condition automatiquement vérifiée si X' est quasi-projectif sur S').*

La remarque entre parenthèses provient du fait que si s est le point de S au-dessous de x', alors $R(x')$ est fini et contenu dans la fibre X_s, d'autre part comme X' est quasi-projectif sur S' et S' est fini sur S, X' est quasi-projectif sur S, ce qui implique qu'une fibre de X/S est contenue dans un ouvert affine.

Comme toute partie finie d'un schéma affine admet un système fondamental de voisinages affines, on voit qu'on ne perd pas l'hypothèse en se restreignant au-dessus d'un ouvert affine de S, ce qui en vertu de 7.3 nous ramène au cas où S est affine. En vertu de 7.4, on est ramené
223 à montrer que X' est contenu dans un ouvert affine *stable* par la donnée de descente. Soit en effet U un ouvert affine contenant $R(x')$, alors le saturé

$$R(X - U) = q_2(q_1^{-1}(X - U))$$

ne rencontre pas $R(x')$, d'autre part comme q_2 est fini (car g donc p_2 l'est) donc fermé, le deuxième membre est une partie fermée de X'. Soit U' son complémentaire dans X', c'est donc un ouvert *saturé* et on a

$$R(x') \subset U' \subset U$$

avec U affine, mais U' pas affine à priori. Comme une partie finie $R(x')$ dans un schéma affine U a un système fondamental de voisinages affines de la forme U_f, on voit, remplaçant f par sa restriction à U', qu'il existe une section f de $\mathscr{O}_U$ telle que :

$$R(x') \subset U'_f, \quad U'_f \text{ est affine.}$$

Soit alors $U'' = q_1^{-1}(U') = q_2^{-1}(U')$, désignons encore par q_1, q_2 les morphismes induits $U'' \to U'$, et considérons

$$f' = \mathrm{N}_{q_2}(q_1^*(f)) \quad ,$$

où N_{q_2} désigne la *norme* relativement au morphisme fini localement libre $q_2 \colon U'' \to U'$. La compatibilité de la formation de la norme avec le chagement de base implique facilement que f' est une section *invariante* :

$$q_1^*(f') = q_2^*(f')$$

ce qui implique que $U'_{f'}$ est un ouvert saturé de U'. De façon plus précise d'ailleurs, désignant par $Z(f')$ l'ensemble des zéros d'une section f', on trouve en vertu des propriétés des normes :

$$Z(f') = q_2(Z(q_1^*(f))) = q_2(q_1^*(Z(f))) = R(U' - U'_f) \quad ,$$

224 ce qui implique que $U'_{f'} = U' - Z(f')$ est saturé, contient $R(x')$, et est contenu dans U'_f. Comme ce dernier est affine, il s'ensuit que $U'_{f'}$ l'est aussi (car égal à $(U'_f)_{f''}$, avec $f'' = f'|U'_{f'}$). C'est donc un ouvert affine saturé contenant $R(x')$ donc x', ce qui achève la démonstration.

On notera que ce raisonnement s'applique chaque fois qu'on a une relation d'équivalence (ou même seulement de prééquivalence, cf. [3]) dans un préschéma X', fini et localement libre et d'ailleurs 7.6 est aussi un cas particulier du résultat analogue pour les prééquivalences finies et localement libres, cf. loc.cit. Même remarque pour 7.7 ci-dessous.

On peut aussi, une fois obtenue l'existence d'un ouvert quasi-affine saturé U' contenant x', faire appel à 7.9 et 7.2 ce qui évite le recours aux normes.

Notons d'ailleurs que sous les conditions de 7.6, si la donnée de descente sur X' est effective, X' provenant de X sur S, alors le morphisme $X' \to X$ est fini, localement libre et surjectif, car déduit de g par le changement de base $X \to S$. Il s'ensuit (EGA II 6.6.4) que si X' est quasi-projectif sur S' donc sur S, alors X est quasi-projectif sur S, (un faisceau inversible relativement ample sur X étant obtenu en prenant la *norme* d'un faisceau inversible sur X' relativement ample
part 45 sur S, ou sur S', cela revient au même). On obtient ainsi :

Corollaire 7.7 *Un morphisme $g\colon S' \to S$ fini localement libre et surjectif est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des préschémas quasi-projectifs sur d'autres, i.e. pour tout X' quasi-projectif sur S', toute donnée de descente sur X' relativement à g est effective, et le S-préschéma descendu X est quasi-projectif sur S.*

Proposition 7.8 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Alors g est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des préschémas Z quasi-compacts sur*
225 *un préschéma T, munis d'un faisceau inversible ample relativement à T. En particulier, pour tout préschéma X' sur S', muni d'une donnée de descente relativement à $g\colon S' \to S$, et tout faisceau inversible $\mathscr{L}'$ sur X' ample relativement à S', muni également d'une donnée de descente relativement à celle donnée sur X', (i.e. muni d'un isomorphisme de $q_1^*(\mathscr{L}')$ avec $q_2^*(\mathscr{L}')$, satisfaisant la condition de transitivité habituelle), la donnée de descente sur X' est effective, et le faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur le préschéma descendu X, déduit de $\mathscr{L}'$ par descente, est ample relativement à S.*

La démonstration est toute analogue à celle de 5.8, en notant que sur l'Algèbre graduée quasi-cohérente $\mathscr{S}'$ sur S' définie par $\mathscr{L}'$, il y a une donnée de descente, permettant de construire une Algèbre graduée quasi-cohérente $\mathscr{S}$ sur S grâce à 1.1 d'où un $P = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ sur S tel que $P' = \mathrm{Proj}(\mathscr{S}')$ s'identifie avec sa donnée de descente à $P \times_S S'$. Comme par hypothèse X' s'identifie à un ouvert de P', nécessairement stable par la donnée de descente sur P', la donnée de descente sur X' est également effective, et on obtient le préschéma descendu comme un ouvert dans P. Le détail est laissé au lecteur. - En particulier, faisant $\mathscr{L}' = \mathscr{O}_{X'}$, on trouve :

Corollaire 7.9 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, et soit X' un préschéma* quasi-affine *au-dessus de S', alors toute donnée de descente sur X' relativement à g est effective, et le préschéma descendu X est quasi-affine sur S.*

En vertu de 6.2, ce résultat s'applique en particulier si S' est localement noethérien et X' est quasi-fini et séparé sur S', plus généralement si S' est quelconque et X' est de présentation finie, quasi-fini et séparé sur S' (cf. 6.6).

Remarques 7.10 Les résultats donnés dans ce numéro épuisent les critères actuellement connus d'effectivité, et probablement même les critères utiles existants[5]. On notera les contre-exemples
226 suivants à l'appui de cette assertion :

(i) Si S est le spectre d'un corps, et S' est le spectre d'une extension quadratique galoisienne, on peut trouver un X' sur S' propre et lisse sur S', de dimension 3, muni d'une donnée de descente qui n'est pas effective (Serre).

(ii) On peut trouver un S spectre d'un anneau local régulier de dimension 3 (si on veut, l'anneau local d'un schéma algébrique sur un corps de caractéristique donnée), un T revêtement principal de S de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tel que, si t désigne l'un des points de T au-dessus du point fermé s de S, et $S' = T - s$, on puisse trouver un X' *projectif* sur S', régulier, muni d'une donnée de descente relativement à $g\colon S' \to S$, cette donnée de descente n'étant pas effective.

On utilise pour ces constructions l'exemple de Hironaka de variétés non projectives. Pour (i), il suffit d'utiliser le fait qu'on peut trouver au-dessus de k un schéma propre et lisse X_0 de dimension 3, sur lequel $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sans inertie, et dans lequel il existe deux points a, b rationnels sur P, congrus sous G, qui ne sont pas contenus dans un ouvert affine. On pose alors $X' = X_0 \times_k k'$, on fait opérer G sur X' grâce aux opérations de G sur les deux facteurs, ce qui donne une donnée de descente sur X' relativement à $g\colon \operatorname{Spec}(k') \to \operatorname{Spec}(k)$. Au-dessus de a resp. b, il y a exactement un point a' resp. b', (à extension résiduelle quadratique), et a' et b' sont congrus sous G, puisque $X' \to X_0$ est compatible avec les opérations de G. Alors a' et b' ne peuvent être contenus dans un ouvert affine, soit U', car alors $U = X_0 - \operatorname{Im}(X' - U')$ serait un ouvert de X_0 contenant (a, b) et dont l'image inverse dans X' serait contenue dans U', donc quasi-affine, donc U serait quasi-affine, et par suite (a, b) aurait un voisinage affine dans U.

Pour (ii), on utilise le fait que dans l'exemple de Hironaka, X_0 est obtenu comme préschéma propre au-dessus d'un k-schéma projectif Y, lisse sur k (le morphisme $f\colon X_0 \to Y$ étant d'ailleurs birationnel, mais peu importe), le groupe G opérant également sur Y de façon compatible avec ses opérations sur X_0, enfin posant $S' = Y - f(b)$, $X' = X_0|S'$, X' est projectif sur S'. Alors X_0 est muni d'une donnée de descente naturelle relative au morphisme
227 canonique $Y \to S = Y/G$, grâce aux opérations de G sur X_0 compatibles avec ses opérations sur Y. Cette donnée de descente n'est pas effective, puisque (a, b) n'est pas contenu dans un ouvert affine. La donné de descente induite sur X' relativement à $g\colon S' \to S$ n'est alors pas effective, comme on vérifie facilement.

8 Bibliographie

[D] J. GIRAUD, Méthode de la descente, Mémoire n° 2 de la Soc. Math. Fr., 1964.

[5]Cette opinion s'est trouvée partiellement erronée, voir p. ex. J.P. MURRE, Sém. Bourbaki 294 (Appendix), Mai 1965, et des résultats spéciaux (notamment de NERON et RAYNAUD). Pour la descente des schémas en groupes ; cf. M. Raynaud, thèse (1968).

[1] A. GROTHENDIECK, Séminaire Bourbaki : Géométrie formelle et Géométrie algébrique, Mai 1959, N^{o} 182.

[2] A. GROTHENDIECK, Séminaire Bourbaki : Technique de descente et Théorèmes d'existence I, Décembre 1959, N^{o} 190.

[3] A. GROTHENDIECK, Séminaire Bourbaki : Technique de descente et Théorèmes d'existence III, Février 1961, N^{o} 212.

Exposé IX

Descente des morphismes étales. Application au groupe fondamental

228

1 Rappels sur les morphismes étales

Nous allons ici passer en revue les propriétés des morphismes étales (développés dans SGA I) qui vont nous servir, en profitant de cette occasion pour éliminer de la théorie les hypothèses noethériennes superflues. Le lecteur notera que même si on ne s'interesse qu'aux schémas noethériens, la technique de descente conduit à introduire des schémas non noethériens (tels que $\operatorname{Spec}(\widehat{A} \otimes_A \widehat{A})$, où A est un anneau local noethérien), et pour pouvoir appliquer le langage des catégories fibrées, il importe de définir les notions de morphisme étale etc..., sans y introduire de restriction noethérienne. Le lecteur qui répugnerait à vérifier ou à admettre que les énoncés ci-dessous sont vrais sans hypothèses noethériennes, pourra se contenter de les admettre sous les hypothèses noethériennes de SGA I, à condition d'introduire ces mêmes hypothèses noethériennes dans les énoncés des numéros suivants, et d'utiliser la définition 1.1 ci-dessous pour les schémas non noethériens qui s'introduisent dans les raisonnements.

Définition 1.1 *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme de préschémas, et x un point de X. On dit que f est* étale en x, *ou que X est étale sur S en x, s'il existe un voisinage ouvert affine U de $s = f(x)$, un voisinage ouvert affine V de x au-dessus de U, un schéma* noethérien *affine U_0, un U_0-schéma* étale *(SGA I) et affine V_0, un morphisme $U \to U_0$, et un U-isomorphisme*

$$V \xrightarrow{\sim} V_0 \times_{U_0} U \quad .$$

229 On notera que lorsque S est localement noethérien, cette terminologie coïncide avec celle de loc.cit. On dira de même que f *est étale*, ou que X *est étale sur* S, si f est étale en tout point x de X. Avec ces définitions, les propositions ci-dessous se ramènent sans difficulté au cas noethérien, où elles sont démontrées dans SGA I N° 4, 5, 7. Pour des détails, le lecteur pourra

part 46 consulter EGA IV[1].

Remarques 1.2 Si f est étale en x, alors f est "*de présentation finie en* x" (VIII 3.5), l'anneau local de x dans la fibre $f^{-1}(s)$ est une *extension finie séparable* de $k(s)$, enfin f est *plat en* x. On peut montrer que la réciproque est vraie, donc que la définition 1.1 est la même que dans le cas où S est localement noethérien, sauf qu'il faut remplacer la condition "de type fini en x" par "de présentation finie en x". Comme ce résultat est de démonstration délicate, nous n'avons pas voulu ici donner cette définition de la notion de morphisme étale, qui ne se prête pas directement à la démonstration des propriétés qui vont suivre.

Notons d'abord qu'on a trivialement :

Proposition 1.3 *Si $f\colon X \to S$ est étale, alors tout morphisme $f'\colon X' \to S'$ qui s'en déduit par changement de base $S' \to S$ est également étale.*

On peut donc dire que les morphismes étales forment une *sous-catégorie fibrée* de la catégorie des flèches dans $\mathbf{Sch}$ (cf. VI 11 a). L'objet du présent exposé est l'étude des propriétés d'exactitude de cette catégorie fibrée sur $\mathbf{Sch}$.

Proposition 1.4 *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme de préschémas. Pour que ce soit une immersion ouverte, il faut et il suffit qu'il soit étale et radiciel.*

Cf. (SGA I 5.1). On en conclut que si X est étale sur S, toute section de X sur S est une immersion ouverte, donc, utilisant encore 1.4, on trouve :

Corollaire 1.5 *Soit X un S-préschéma étale. Alors il y a une correspondance biunivoque entre*
230 *l'ensemble des sections de X sur S, et l'ensemble des parties ouvertes Γ de X telles que le morphisme $\Gamma \to S$ induit par le morphisme structural soit* radiciel *et* surjectif.

Si d'ailleurs X est séparé sur S, Γ sera une partie de X à la fois ouverte et fermée, mais peu importe. - Faisant un changement de base évident, on peut mettre 1.5 sous la forme en apparence plus générale :

Corollaire 1.6 *Soient X et Y deux S-préschémas, Y étant étale sur S. Alors l'application $f \mapsto \Gamma_f$ qui associe à tout S-morphisme f de X dans Y la partie de $X \times_S Y$ sous-jacente au graphe de f, est une bijection de $\operatorname{Hom}_S(X, Y)$ sur l'ensemble des parties ouvertes de Γ de $X \times_S Y$ telles que le morphisme $\Gamma \to X$ induit par pr_1 soit* radiciel *et* surjectif.

Proposition 1.7 *Soit S_0 le sous-préschéma de S défini par un Nil-idéal quasi-cohérent, i.e. tel que S_0 ait même ensemble sous-jacent que S. Alors le foncteur $X \mapsto X \times_S S_0$ de la catégorie des préschémas étales sur S dans la catégorie des préschémas étales sur S_0, est une équivalence de catégories.*

[1]De façon précise, EGA IV 17, 18.

Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle est une conséquence immédiate de 1.6. Le fait qu'il soit essentiellement surjectif est contenu dans SGA I 8.3. On notera que dans l'équivalence précédente, X est de type fini i.e. quasi-fini sur S, (resp. fini i.e. un revêtement étale de S), si et seulement si X_0 satisfait à la condition analogue sur S_0 ; même remarque pour la condition de séparation. Ces faits sont immédiats, et aussi contenus dans 2.4 plus bas.

Corollaire 1.8 *Soit A un anneau local noethérien complet de corps résiduel k. Alors le foncteur $B \mapsto B \otimes_A k$ est une équivalence de la catégorie des algèbres finies et étales sur A, avec la catégorie des algèbres finies et étales sur k, (i.e. composées d'un nombre fini d'extensions finies séparables de k).*

Proposition 1.9 *Pour que X soit un* revêtement étale *de S i.e. fini et étale sur S, il faut et il suffit que X soit S-isomorphe au spectre d'une Algèbre $\mathscr{A}$ sur S, qui soit un Module localement libre*
231 *de type fini, et telle que pour tout $s \in S$, $\mathscr{A}_s \otimes_{\mathscr{O}_s} k(s)$ soit une algèbre séparable sur $k(s)$, donc en l'occurrence composée directe d'extensions finies séparables de $k(s)$.*

Enfin le résultat suivant est de nature moins élémentaire, étant la conjonction de SGA I 8.4 et du *théorème d'existence de faisceaux en géométrie algèbrique*, (EGA III 5 ; cf aussi [1] th.3).

Théorème 1.10 *Soient S le spectre d'un anneau local noethérien complet, X un S-schéma propre, X_0 la fibre de X au point fermé de S, (de sorte que X_0 est un sous-schéma fermé de X). Alors le foncteur restriction $X' \mapsto X' \times_X X_0$ est une équivalence de la catégorie des revêtements étales de X avec la catégorie des revêtements étales de X_0.*

2 Morphismes submersifs et universellement submersifs

Définition 2.1 *Un morphisme $g \colon S' \to S$ de préschémas est dit* submersif *s'il est surjectif, et fait de S un espace topologique quotient de S' (i.e. une partie U de S telle que $f^{-1}(U)$ soit ouverte, est ouverte). On dit que f est* universellement submersif *si pour tout morphisme $T \to S$, le morphisme $f' \colon T' = S' \times_S T \to T$ déduit de f par changement de base est submersif.*

Il est immédiat que le composé de deux morphismes submersifs (resp. universellement submersifs) est submersif (resp. universellement submersif), et qu'un changement de base dans un morphisme universellement submersif donne un morphisme universellement submersif (vu qu'on fait ce qu'il faut pour cela). Si fg est submersif (resp. universellement submersif), f l'est.

Exemples 2.2 a) Un morphisme surjectif qui est ouvert, ou fermé, est submersif, donc un morphisme surjectif universellement fermé ou universellement ouvert est universellement submersif. Par exemple *un morphisme propre surjectif est universellement submersif*. D'autre part *un morphisme fidèlement plat et quasi-compact est universellement submersif* (VIII 4.3). Ce seront les deux cas les plus importants pour nous.

232 On peut appliquer à un morphisme submersif ou universellement submersif $g\colon S' \to S$ les raisonnements de VIII 4.3, on trouve en particulier :

Proposition 2.3 *Supposons $g\colon S' \to S$ submersif. Alors le diagramme suivant d'applications est exact :*

$$\mathrm{Ouv}(S) \to \mathrm{Ouv}(S') \rightrightarrows \mathrm{Ouv}(S''),$$

où $S'' = S' \times_S S'$, et où $\mathrm{Ouv}(X)$ désigne l'ensemble des parties ouvertes du préschéma X.

Proposition 2.4 *Soient $g\colon S' \to S$ un morphisme universellement submersif, $f\colon X \to Y$ un S-morphisme, et $f'\colon X' \to Y'$ le S'-morphisme qui s'en déduit par changement de base. Pour que f soit ouverte (resp. fermée), il suffit que f' le soit. Pour que f soit universellement ouverte, resp. universellement fermée, resp. séparée, il faut et il suffit que f' le soit. Si de plus g est quasi-compact, et f localement de type fini, pour que f soit propre, il faut et il suffit que f' le soit.*

Pour ce dernier point, on note que si f' est propre donc quasi-compact alors f est quasi-compact (VIII 3.3) donc de type fini puisqu'il est localement de type fini. D'autre part il est séparé et universellement fermé d'après ce qui précède, donc il est propre.

Proposition 2.5 *Soit S' un préschéma de type fini sur le spectre S d'un anneau local noethérien complet, supposons que la fibre du point fermé s de S soit finie, donc les anneaux locaux dans S' des points s' de cette fibre sont finis sur $A = \mathscr{O}_s$. Soit S'' le schéma somme des spectres des $\mathscr{O}_{S',s'}$ en question, considéré comme S-schéma fini. Pour que $g\colon S' \to S$ soit universellement submersif, il faut et il suffit que le morphisme structural $S'' \to S$ soit surjectif.*

Comme il y a un S-morphisme naturel $S'' \to S'$, et qu'un morphisme fini surjectif est universellement submersif d'après 2.2, la condition énoncée est suffisante. Montrons donc que si $S'' \to S'$ n'est pas surjectif, alors g n'est pas universellement submersif. En effet, soit t un point de S qui
233 n'est pas dans l'image de S'' ; il existe alors un S-schéma T, spectre d'un anneau de valuation discrète, dont l'image dans S est $\{s, t\}$. Notons que l'image de S'' dans S' est ouverte, car le morphisme $S'' \to S'$ est un isomorphisme local, et d'autre part cette image contient S'_s, et ne rencontre pas S'_t. Il s'ensuit que l'image inverse de cette dernière dans $T' = S' \times_S T$ est *ouverte*, et identique à l'image inverse du point fermé de T. Cela montre que $T' \to T$ n'est pas submersif, donc $S' \to S$ n'est pas universellement submersif.

Remarque 2.6 Utilisant le critère IV 6.3 pour qu'une partie constructible d'un espace noethérien soit ouverte, on trouve facilement le critère valuatif suivant pour qu'un morphisme $g\colon S' \to S$ *de type fini*, avec S localement noethérien, soit universellement submersif : il faut et il suffit que pour tout S-schéma T, spectre d'un anneau de valuation discrète, posant $T' = S' \times_S T$, l'image inverse dans T' du point fermé de T soit non ouverte.

3 Descente de morphismes de préschémas étales

Proposition 3.1 *Soient $g\colon S' \to S$ un morphisme* surjectif *de préschémas, X et Y deux préschémas sur S, X', Y' leurs images inverses sur S'. Si Y est non ramifié sur S, alors l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{S'}(X', Y')$$

est injective.

En effet, en vertu de 1.6, un S-morphisme $f\colon X \to Y$ est connu quand on connaît l'ensemble sous-jacent à son graphe Γ, qui est une partie de $Z = X \times_S Y$. Comme

$$Z' = Z \times_S S' = X' \times_{S'} Y' \to Z$$

est surjectif, (puisque $S' \to S$ l'est), cette partie Γ est connue quand on connaît son image inverse
part 47 dans $X' \times_{S'} Y'$, qui n'est autre que l'ensemble sous-jacent au graphe de f'. D'où la conclusion.

Une partie Γ de Z est le graphe d'un S-morphisme $f\colon X \to Y$ si et seulement si elle est
234 ouverte, et si le morphisme induit par pr_1 de Γ dans Y est radiciel et surjectif cf. 1. Lorsque la première propriété est vérifiée, la deuxième l'est si et seulement si l'image inverse Γ' de Γ dans Z' satisfait la même condition (SGA VIII 3.1). Si on sait enfin que $Z' \to Z$ est submersif, ce qui sera le cas en particulier si $S' \to S$ est universellement submersif, alors Γ est ouvert si et seulement si Γ' l'est. Ainsi, l'ensemble $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ est alors en correspondence biunivoque avec l'ensemble des parties ouvertes Γ' de Z' telles que le morphisme projection $\mathrm{pr}_1\colon Z' \to X'$ soit radiciel et surjectif, (i.e. correspondant à un S'-morphisme $f'\colon X' \to Y'$), et qui sont saturées pour la relation d'équivalence définie par $Z' \to Z$, i.e. dont les deux images inverses dans $Z'' = Z' \times_Z Z' = Z \times_S S''$ (où $S'' = S' \times_S S'$), par l'une et l'autre projection, sont égales. Or ces dernières sont les graphes des deux S''-morphismes $X'' \to Y''$ déduits de f' par changement de base, par l'une et l'autre projection $S'' \to S'$. On a ainsi obtenu :

Proposition 3.2 *Soient $g\colon S' \to S$ un morphisme* universellement submersif *de préschémas, $S'' = S' \times_S S'$, X et Y deux S-préschémas, X' et Y' leurs images inverses sur S', et X'', Y'' leurs images inverses sur S''. Si Y est étale sur S le diagramme canonique suivant d'applications est exact :*

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S'}(X', Y') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(X'', Y'').$$

Prenant X et Y étales sur S, on trouve l'énoncé suivant, qui d'ailleurs redonne 3.2 (même en se restreignant à $X = S$, auquel cas on peut en effet toujours se ramener dans 3.2, par le changement de base $X \to S$) ;

Corollaire 3.3 *Un morphisme universellement submersif de préschémas est un morphisme de descente pour la catégorie fibrée des préschémas étales sur d'autres.*

J'ignore d'ailleurs si c'est nécessairement un morphisme de descente *effective* pour la catégorie fibrée en question, même en faisant de plus l'hypothèse que S est noethérien et g de

type fini, et en se bornant aux revêtements étales. Nous donnerons néanmoins au numéro suivant
235 des critères utiles d'effectivité.

Corollaire 3.4 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme universellement submersif, dont les fibres $g^{-1}(s)$ sont "géométriquement connexes", i.e. pour toute extension $K/k(s)$, $g^{-1}(s) \otimes_{k(s)} K$ est connexe. Alors S' est connexe si S l'est. Le foncteur de la catégorie des préschémas étales sur S dans la catégorie des préschémas étales sur S' défini par g est pleinement fidèle.*

Une partie de S' qui est à la fois ouverte et fermée est saturée pour la relation d'équivalence ensembliste définie par g, puisque les fibres sont connexes, donc est l'image inverse d'une partie de S, qui est nécessairement ouverte et fermée puisque g est submersif. Si donc S est connexe, S' l'est. Cela implique le résultat suivant : le composé fg de deux morphismes à fibres universellement connexes, f étant universellement submersif, est à fibres universellement connexes ; si S'_1 et S'_2 sur S ont des fibres universellement connexes, il en est de même de $S'_1 \times_S S'_2$. En particulier, sous les conditions de 3.4, S'' a des fibres universellement connexes sur S. Soient alors X et Y étales sur S, et soit u' un S''-morphisme de X' dans Y', prouvons qu'il est compatible avec les données de descente (ce qui entraîne la conclusion voulue grâce à 3.3). Or soient u''_1 et u''_2 les deux S''-morphismes $X'' \to Y''$ déduits de u'. Le sous-préschéma de S'' des coïncidences de u''_1 et u''_2 est un sous-préschéma ouvert induit, fermé fibre par fibre, comme image inverse du préschéma diagonal de Y'' sur S''[2]. C'est donc l'image inverse d'une partie de S. Comme elle contient la diagonale dans S'', elle est identique à S'', d'où $u''_1 = u''_2$ cqfd.

4 Descente de préschémas étales : critères d'effectivité

Proposition 4.1 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Alors g est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des préschémas étales, séparés et de type fini sur d'autres.*

C'est en effet un morphisme de descente pour la catégorie fibrée en question, en vertu de 3.3 ou de (SGA VIII 5.2) au choix. Reste à montrer que si X' est étale, séparé et de type fini sur S', et muni d'une donnée de descente relativement à $g\colon S' \to S$, cette dernière est effective dans la catégorie fibrée en question. Or on voit facilement que si X est un préschéma sur S, alors
236 il est étale sur S si et seulement si il est étale sur S' (en vertu de la définition 1.1 et de loc. cit. 3.6). Donc il est étale, séparé et de type fini sur S si et seulement si X' l'est sur S', cf. par exemple 2.4. Donc il suffit de s'assurer de l'effectivité de la donnée de descente sur X pour la catégorie fibrée des flèches de **Sch**. Or X' est quasi-affine sur S' en vertu de (SGA VIII 6.2 et 6.6). On peut alors conclure en utilisant (SGA VIII 7.9). Le lecteur notera d'ailleurs que la démonstration demande moins si on se borne aux préschémas étales et finis sur d'autres, car on peut alors invoquer directement (SGA VIII 2.1).

[2]noter que les fibres de S' sur S sont séparées !

Corollaire 4.2 *Soient $g\colon S' \to S$ un morphisme universellement submersif, X' un S'-préschéma étale séparé et de type fini, muni d'une donnée de descente relativement à g, $S_1 \to S$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, S'_1 et X'_1 déduits de S' et X' par le changement de base, de sorte que $S'_1 \to S_1$ est universellement submersif, X'_1 est étale séparé et de type fini sur S'_1, et muni d'une donnée de descente relativement à $g_1\colon S'_1 \to S_1$. Pour que la donnée de descente sur X' soit effective, il faut et il suffit que la donnée de descente sur X'_1 le soit.*

Cela résulte de la théorie de la descente dans les catégories [D], compte tenu de 4.1 et 3.3.

On prouve de façon analogue :

Corollaire 4.3 *Soient $g\colon S' \to S$ un morphisme universellement submersif, X' un S'-préschéma étale muni d'une donnée de descente relativement à g, (S_i) un recouvrement de S par des ouverts. Pour que la donnée de descente soit effective, il faut et il suffit que pour tout i, la donnée de descente correspondante sur $X'_i = X \times_S S_i$, relativement au morphisme $g_i\colon S'_i = S' \times_S S_i \to S_i$, le soit.*

Ce dernier résultat conduit à dégager un critère d'effectivité local :

237 **Proposition 4.4** *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme de présentation finie (SGA VIII 3.6) et universellement submersif, X' un préschéma étale et de présentation finie sur S', muni d'une donnée de descente relativement à g, enfin a un point de S. Pour qu'il existe un voisinage ouvert U de a, tel que la donnée de descente correspondante sur $X'_U = X' \times_S U$ relativement au morphisme $g_U\colon S'_U = S' \times_S U \to S_U = U$ soit effective, il faut et il suffit que la donnée de descente correspondante sur $X'_a = X' \times_S \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_a)$, relativement au morphisme $g_a\colon S'_a = S' \times_S \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_a) \to S_a = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_a)$, soit effective.*

La nécessité étant triviale, montrons la suffisance. On dispose donc d'un préschéma étale de type fini X_a sur S_a, et d'un isomorphisme

$$(*) \qquad X'_a \xrightarrow{\sim} X_a \times_{S_a} S'_a$$

compatible avec les données de descente. Conformément à un sorite général facile sur les préschémas définis sur une limite inductive d'anneaux (ici les anneaux A_f, où A est l'anneau d'un voisinage ouvert affine de a, et où f parcourt les éléments de A qui ne sont pas dans l'idéal premier correspondant à a), on peut trouver un voisinage ouvert U de a, un préschéma étale de type fini X_U sur $U = S_U$, et un S_a-isomorphisme $X_a \xrightarrow{\sim} X_U \times_{S_U} S_a$. De plus, prenant U assez petit, on peut alors supposer que l'isomorphisme $(*)$ provient d'un isomorphisme :

$$X'_U \xrightarrow{\sim} X_U \times_{S_U} S'_U;$$

ce dernier pourrait ne pas être compatible avec les données de descente, cependant à condition de rétrécir U, il sera compatible avec les données de descente. Cela achève la démonstration.

Corollaire 4.5 *Sous les conditions de 4.4, pour que la donnée de descente sur X' soit effective, il faut et il suffit que pour tout $a \in S$, la donnée de descente corrspondante sur X'_a, relativement au morphisme $S'_a = S' \times_S \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_a) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_a)$, le soit. Lorsque S est localement noethérien, et X' séparé sur S', on peut dans le critère précédent remplacer aussi $\mathscr{O}_a$ par son complété.*

238 La première assertion résulte de 4.4 et 4.3, la deuxième est alors conséquence de 4.2. Utilisant encore 4.2 et le fait que pour tout anneau local noethérien A, on peut trouver un anneau local noethérien complet B, et un homomorphisme local $A \to B$, tel que B soit plat sur A et que $B/\mathfrak{m}B$ soit une extension donnée du corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$ de A, on trouve :

Corollaire 4.6 *Sous les conditions de 4.4, supposons de plus X' séparé sur S' et S localement noethérien. Pour que la donnée de descente sur X' soit effective, il faut et il suffit que pour tout préschéma S_1 sur S, spectre d'un anneau local complet à corps résiduel algébriquement clos, la donnée de descente correspondante sur $X'_1 = X' \times_S S_1$, relativement au morphisme $g_1 \colon S'_1 \to S_1$, soit effective.*

part 48

Théorème 4.7 *Soit $g \colon S' \to S$ un morphisme fini et surjectif, et de présentation finie (cette dernière hypothèse étant conséquence des autres si S est localement noethérien)*[3]*. Alors g est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des préschémas étales, séparés, de type fini sur d'autres.*

Il faut montrer que si X' est étale, séparé, de type fini sur S', et muni d'une donnée de descente relativement à g, alors cette donnée est effective. Utilisant 4.3, on se ramène facilement au cas où S est noethérien. Grâce à 4.5, on peut donc supposer que S est le spectre d'un anneau local noethérien, a fortiori que

$$\dim S = n < +\infty.$$

On raisonne alors par récurrence sur $\dim S = n$, l'assertion étant triviale pour $n < 0$. Supposons donc $n \geq 0$ et le théorème démontré pour les dimensions $n' < n$. En vertu de 4.6 on est ramené au cas où S est le spectre d'un anneau local complet, donc S' est une réunion finie de spectres d'anneaux locaux complets. On a donc

$$X' = X'_1 \sqcup X'_2$$

239 où X'_1 est *fini* sur S', et où X'_2 n'a aucun point au-dessus d'un des points fermés de S'. Considérons les morphismes

$$q_1, q_2 \colon X'' \rightrightarrows X'$$

correspondants à la donnée de descente, compatibles avec $p_1, p_2 \colon S'' \rightrightarrows S'$. On voit aussitôt que

$$X'' = q_i^{-1}(X'_1) \sqcup q_i^{-1}(X'_2) \quad i = 1, 2$$

[3]On peut montrer qu'il suffit en fait que g soit un morphisme *entier*, en se ramenant au cas du texte par un procédé de passage à la limite dans le style EGA IV 8.

est la décomposition canonique analogue de X'' sur S'', ce qui implique $q_1^{-1}(X_1') = q_2^{-1}(X_1')$ et par suite X_1' et X_2' sont munis de données de descente induites. Or soit T l'ouvert de S complémentaire de son point fermé, donc $T' = S' \times_S T$ est la partie de S' complémentaire de l'ensemble des points fermés, et X_2', qui se trouve tout entier au-dessus de T', est muni d'une donnée de descente relativement au morphisme $T' \to T$ induit par g. Comme ce dernier est fini surjectif, et que $\dim T < \dim S = n$, cette donnée de descente est effective par l'hypothèse de récurrence. On voit donc qu'il suffit de prouver que la donnée de descente sur X_1' est effective, donc on peut maintenant supposer X' étale et *fini* sur S'. (N.B. le raisonnement par récurrence est inutile si on se borne aux revêtements étales dans l'énoncé 4.7). Soit alors S_0 le spectre du corps résiduel de A, soit $S_0' = S' \times_S S_0$ et définissons de même S_0'', S_0''' à partir des carrés et cubes fibrés S'' et S''' de S' sur S. En vertu de 1.8, les morphismes $S_0 \to S$, $S_0' \to S'$, etc. induisent des équivalences pour les catégories des revêtements étales de S et S_0 d'une part, S' et S_0' d'autre part, etc... D'après les sorites de la théorie de la descente dans les catégories [D], il s'ensuit que pour que $g\colon S' \to S$ soit un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des revêtements étales, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $g_0\colon S_0' \to S_0$. Mais c'est bien le cas, comme cas particulier de 4.1, par exemple. Cela achève la démonstration.

Corollaire 4.8 *La conclusion de 4.7 subsiste si on suppose seulement que $S' \to S$ est universellement submersif, de type fini et quasi-fini, pourvu qu'on suppose S localement noethérien.*

240 En vertu de 4.6, on peut en effet supposer que S est le spectre d'un anneau local noethérien complet. Alors en vertu de 2.5, il existe un morphisme fini et surjectif $S_1 \to S$, et un S-morphisme $S_1 \to S'$. Comme $S_1 \to S$ est un morphisme de descente strict universel pour la catégorie fibrée envisagée, en vertu de 4.7, et que $S' \to S$ est un morphisme de descente universel pour ladite, 4.8 résulte des sorites généraux [D].

Corollaire 4.9 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme de type fini, surjectif et universellement ouvert, avec S localement noethérien. Alors g est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des préschémas étales, séparés et de type fini sur d'autres.*

Procédant comme dans 4.7, on est ramené au cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien et complet A. Soit A_1 une algèbre finie sur A, de spectre S_1, telle que $S_1 \to S$ soit fini et *surjectif*, donc un morphisme de descente effective universel pour la catégorie fibrée envisagée, grâce à 4.7. Il résulte alors des théorèmes généraux [D] que g est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée envisagée, si et seulement si le morphisme correspondant $g_1\colon S_1' = S' \times_S S_1 \to S_1$ l'est. Comme ce dernier satisfait aux mêmes hypothèses que g, on est ramené à prouver 4.9 pour S_1 au lieu de S. Prenant d'abord pour A_1 le composé direct des $A/\mathfrak{p}_i$, pour les idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_i$ de A, on est ramené au cas où A est *intègre*. On montre alors[4] qu'il existe un sous-schéma intègre S_1 de S', quasi-fini sur S et dominant S, passant par un point de la fibre de S' en le point fermé y de S (grâce au fait que S' est universellement ouvert de type fini sur S local noethérien intègre, et $S_y' \neq \emptyset$). Comme A est complet, S_1

[4]Cf. EGA IV 14.3.13 et 14.5.4.

est fini sur S, et comme il domine S, le morphisme $S_1 \to S$ est surjectif. Remplaçant encore une fois S par S_1, on est ramené au cas où S' a une section sur S, où l'énoncé est trivial.

Théorème 4.10 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme fini radiciel surjectif, de présentation finie (cette*
241 *dernière condition étant superflue si S est localement noethérien[5]). Alors le foncteur image inverse induit une équivalence de la catégorie des préschémas étales sur S avec la catégorie des préschémas étales sur S'.*

Comme les morphismes diagonaux de S' dans $S' \times_S S'$ et $S' \times_S S' \times_S S'$ sont des immersions surjectives, donc induisent en vertu de 1.9 des équivalences des catégories des préschémas étales sur $S' \times_S S'$ resp. $S' \times_S S' \times_S S'$ avec la catégorie des préschémas étales sur S', il résulte des sorites de la descente [D] que tout X' étale sur S' est muni d'une donnée de descente et d'une seule relativement à $g\colon S' \to S$. Donc 3.3 implique que le foncteur image inverse par g, de la catégorie des préschémas étales sur S dans la catégorie des préschémas étales sur S', est *pleinement fidèle*. Reste à montrer qu'il est essentiellement surjectif, i.e. que tout X' étale sur S' est isomorphe à l'image inverse d'un X étale sur S. La question étant évidemment locale sur S *et sur* X', on peut supposer S, S', X' affines. Mais alors X' est séparé de type fini sur S', et on peut appliquer le critère d'effectivité 4.7.

Corollaire 4.11 *La conclusion 4.9 subsiste en remplaçant l'hypothèse sur g par : g est fidèlement plat, quasi-compact et radiciel.*

Même démonstration, en invoquant 4.1 au lieu de 4.7.

On notera que la démonstration de 4.7 est “élémentaire” en ce qu'elle n'utilise pas les théorèmes de finitude et de comparaison pour les morphismes propres (EGA III 3, 4, 5). Il n'en est plus de même du résultat suivant :

Théorème 4.12 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme propre, surjectif, de présentation finie (cette dernière hypothèse étant conséquence de la première si S est localement noethérien). Alors g est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des revêtements étales de préschémas.*

En vertu de 3.3 et de 2.2, on est ramené à prouver que pour tout revêtement étale X' sur S', muni d'une donnée de descente relativement à $g\colon S' \to S$, cette donnée de descente est effec-
242 tive. Utilisant 4.3, on est ramené facilement au cas où S est noethérien, et utilisant 4.6, on peut donc supposer que S est le spectre d'un anneau local noethérien *complet* A. Introduisons S'' et S''' comme d'habitude, soit S_0 le spectre du corps résiduel de A, et soient S'_0, S''_0, S'''_0 déduits de S', S'', S''' par le changement de base $S_0 \to S$, i.e. les fibres de S', S'', S''' au point fermé de S. D'après 1.10, les morphismes $S_0 \to S$, $S'_0 \to S'$, etc. induisent des équivalences de la catégorie des revêtements étales sur le schéma-but avec la catégorie des revêtements étales sur le

[5]Il suffit même que g soit entier, radiciel surjectif, comme on voit par une réduction facile au cas du texte, style EGA IV 8, cf. SGA 4 VIII 1.1.

schéma-source. Par suite, $g\colon S' \to S$ est un morphisme de descente strict pour la catégorie fibrée des revêtements étales de préschémas, si et seulement si $g_0\colon S'_0 \to S_0$ l'est, ce qui est bien le cas en vertu de 4.1. Cela achève la démonstration de 4.12. (Dans ce raisonnement, on n'avait besoin de 1.10 que le fait que le foncteur envisagé dans 1.10 est *pleinement fidèle*, ce qui n'utilise *pas* le
part 49 théorème d'existence de faisceaux cohérents en géométrie algébrique.)

5 Traduction en termes du groupe fondamental

Soit

$$g\colon S' \to S$$

un *morphisme de descente effective* pour la catégorie fibrée des *revêtements étales* de préschémas, par exemple un morphisme propre, surjectif, de présentation finie (4.12), ou un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Introduisant comme d'habitude S'', S''', et désignant par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$, $\mathscr{C}'''$ la catégorie des revêtements étales de S, S', S'', S''' respectivement, on a donc un diagramme 2-exact de catégories

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "p^*"] & \mathscr{C}' \arrow[r, shift left, "p_1^*{,}p_2^*"] \arrow[r, shift right] & \mathscr{C}'' \arrow[r, shift left=2, "p_{21}^*{,}p_{32}^*{,}p_{31}^*"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathscr{C}''' \end{tikzcd}$$

correspondant au diagramme

$$\begin{tikzcd} S & S' \arrow[l, "p"'] & S'' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right, "p_1{,}p_2"'] & S''' \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2, "p_{21}{,}p_{32}{,}p_{31}"'] \end{tikzcd}.$$

243 Supposons les préschémas S, S', S'', S''' sommes disjointes de préschémas connexes, ce qui sera le cas en particulier si ce sont des préschémas localement connexes, a fortiori s'ils sont localement noethériens (par exemple si S' est de type fini sur S localement noethérien). Alors les catégories $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ ... dans $(*)$ sont des catégories multigaloisiennes (SGA V 9), décrites chacune par une collection de groupes topologiques compacts totalement disconnexes, savoir les groupes fondamentaux des composantes connexes des préschémas S, S', S'', S'''. Nous supposons pour simplifier S connexe, et allons donner alors un procédé de calcul pour son groupe fondamental, en termes de la catégorie fibrée formée avec $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$, $\mathscr{C}'''$, convenablement explicitée à l'aide des groupes fondamentaux exprimant ces catégories. Le lecteur notera que le procédé esquissé est valable en fait dans le cadre général des catégories multigaloisiennes (qui n'ont pas à provenir de préschémas donnés S, S', S'', S'''). C'est d'ailleurs l'analogue du procédé bien connu pour calculer le groupe fondamental d'un espace topologique S, réunion localement finie de sous-espaces fermés S_i (ou réunion quelconque de sous-espaces ouverts S_i), à l'aide des groupes fondamentaux des composantes des X_i et des composantes des $S_i \cap S_j$. Bien entendu, la situation analogue dans le cadre des préschémas tombe bien dans le cadre général de la descente, en introduisant le préschéma S' somme des S_i et le morphisme canonique $g\colon S' \to S$.

Posons

$$E' = \pi_0(S'), E'' = \pi_0(S''), E''' = \pi_0(S'''),$$

où π_0 désigne le foncteur "ensemble des composantes connexes". Comme les produits fibrés de S' sur S forment un objet simplicial de $\mathbf{Sch}$, il est transformé par le foncteur π_0 en un ensemble simplicial dont E', E'', E''' sont les composantes de dimension 0, 1, 2. Nous aurons à utiliser les applications simpliciales

$$q_i = \pi_0(p_i), (i = 1, 2) \text{et} q_{ij} = \pi_0(p_{ij}), (i, j) = (2, 1), (3, 2), (3, 1),$$

mises en évidence dans le diagramme

$$(1) \qquad E' \overset{q_1, q_2}{\Longleftarrow} E'' \overset{q_{21}, q_{32}, q_{31}}{\Lleftarrow} E'''.$$

244 Les objets de E' seront notés avec un accent, comme s', ceux de E'' resp. E''' seront notés avec un $''$ resp. un $'''$. Le fait que S soit connexe se traduit par $\pi_0(K) = 0$, où K est l'ensemble simplicial défini par $g\colon S' \to S$, ou encore par le fait que la relation d'équivalence dans E' engendrée par le couple d'applications (q_1, q_2) est transitive.

Nous choisirons une fois pour toutes un élément s'_0 dans E', et pour tout s' dans E', un élément $\overline{s'} \in E''$ tel que[6]

$$q_1(\overline{s'}) = s'_0, q_2(\overline{s'}) = s',$$

mettant ainsi en évidence la connexité de S. Pour tout $s' \in E'$, choisissons un point géométrique $\underline{s'}$ dans la composante connexe s' de S' ; ce point interviendra en fait par le foncteur-fibre $F'_{s'}$ correspondant sur la catégorie multigaloisienne $\mathscr{C}'$. Le group des automorphismes de ce foncteur, i.e. le groupe fondamental de S' en $\underline{s'}$, sera noté $\pi_{s'}$. On choisit de même des $\underline{s''}$ et des $\underline{s'''}$, donc des foncteurs $F''_{s''}$ et $F'''_{s'''}$, d'où des groupes fondamentaux $\pi_{s''}$ et $\pi_{s'''}$. Ainsi

$$\pi_{s'} = \pi_1(S', \underline{s'}), \pi_{s''} = \pi_1(S'', \underline{s''}), \pi_{s'''} = \pi_1(S''', \underline{s'''}).$$

Pour tout $s'' \in E''$, $p_1(\underline{s''})$ se trouve dans la même composante connexe que $q_1(s'')$, donc il existe un isomorphisme de foncteurs $F''_{s''} \circ p_1^* F'_{s'}$ (i.e. une "classe de chemins" de $\overline{p_1(\underline{s''})}$ à $\underline{q_1(s'')}$). Cette remarque se répète pour q_2, et les q_{ij}. Choisissons toutes ces classes de chemins :

$$F''_{s''} \circ p_i^* \xrightarrow{\sim} F'_{q_i(s'')}, \quad F''' \circ p_{ij}^* \xrightarrow{\sim} F'''_{q_{ij}(s''')},$$

245 (pour $i = 1, 2$ et $(i, j) = (2, 1), (3, 2), (3, 1)$). Il en résulte en particulier des homomorphismes de groupes :

$$(2) \qquad q_i^{s''} : \pi_{s''} \to \pi_{q_i(s'')}, \quad q_{ij}^{s'''} : \pi_{s'''} \to \pi_{q_{ij}(s''')},$$

(mêmes valeurs de i et (i, j)). Enfin, rappelons-nous que dans la structure de catégorie clivée de fibres $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$, $\mathscr{C}'''$ figurent aussi des isomorphismes de foncteurs :

$$p_{21}^* p_1^* \xrightarrow{\sim} p_{31}^* p_1 *, \quad p_{21}^* p_2^* \xrightarrow{\sim} p_{32}^* p_1^*, \quad p_{31}^* p_2^* \xrightarrow{\sim} p_{32}^* p_2^*,$$

[6]On fera attention que l'élément $\overline{s'}$ dont l'existence est admise implicitement, n'existe pas dans tous les cas. Par suite, le théorème 5.1 tel qu'il est énoncé ne s'applique pas dans tous les cas. Il n'est pas difficile cependant, en s'inspirant du texte écrit, de modifier l'énoncé de ce théorème de telle façon qu'il donne une méthode de calcul qui s'applique dans tous les cas. En particulier, les corollaires dudit théorème sont valables tels quels.

déduits d'isomorphismes des deux membres respectivement avec les u_i^* ($i = 1, 2, 3$), où les u_i sont les trois projections de S''' dans S'. Quand on explicite ces données, on trouve pour tout s''' un élément bien déterminé

(3) $$a_i^{s'''} \in \pi_{v_i(s''')},$$

(où les v_i, $i = 1, 2, 3$ sont les trois applications $E''' \to E'$ définies par $v_i = \pi_0(u_i)$), d'ailleurs soumis aux conditions :

$$q_1^{s''_1} q_{21}^{s'''} = \mathrm{int}(a_1^{s'''}) q_1^{s''_2} q_{31}^{s'''} \quad (s''_1 = q_{21}(s'''), s''_2 = q_{31}(s''')),$$

et les deux conditions analogues, faisant intervenir les a_2 et a_3. Le lecteur notera d'ailleurs que les données (1), (2), (3) permettent de reconstituer, à une équivalence de catégories fibrées près, la catégorie fibrée envisagée de fibres $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$, $\mathscr{C}'''$. Elles doivent donc permettre en principe de reconstituer $\mathscr{C}$ à équivalence près, donc son groupe fondamental à isomorphisme près. Nous déterminerons en fait le groupe fondamental en le point géométrique $p(\underline{s'_0})$ de S, i.e. le groupe des automorphismes de $F'_{s'_0} \circ p^*$.

On note que la donnée d'un objet X' de $\mathscr{C}'$ est équivalente essentiellement à la donnée d'en-
246 sembles finis $X'_{s'}$ ($s' \in E'$) où les $\pi_{s'}$ opèrent continûment. Une donnée de recollement sur un tel objet revient alors à la donnée, pour tout $s'' \in E''$, d'une bijection :

$$\varphi_{s''}\colon X'_{q_i(s'')} \xrightarrow{\sim} X'_{q_2(s'')}$$

compatible avec les opérations de $\pi_{s''}$, opérant sur l'un et l'autre membre grâce aux homomorphismes $q_i^{s''}\colon \pi_{s''} \to \pi_{q_i(s'')}$. Prenant d'abord les s'' de la forme $\overline{s'}$, on voit qu'une telle donnée définit des bijections

$$\psi_{s'}\colon X'_{s'_0} = F'_0(X') \to X'_{s'}$$

ce qui permet d'identifier les $X'_{s'}$ au même ensemble $F'_0(X') = X'_{s'_0}$, sur lesquels tous les groupes $\pi_{s'}$ vont dès lors opérer. Cela posé, les bijections $\varphi_{s''}$ vont correspondre à des bijections

$$g_{s''}\colon F'_0(X') \xrightarrow{\sim} F'_0(X'),$$

soumis d'une part aux relations de commutation avec $\pi_{s''}$:

a) $$g_{s''} q_1^{s''}(g'') = q_2^{s''}(g'') g_{s''} \quad (s'' \in E'', g'' \in \pi_{s''}),$$

d'autre part aux relations

b) $$g_{\overline{s'}} = g_{\overline{s'_0}} \quad (s' \in E'),$$

exprimant la façon dont nous avions identifié entre eux les $X_{s'}$. Quand on explicite la condition pour qu'une telle donnée de recollement soit en fait une donnée de descente, on trouve les relations :

c) $$a_3^{s'''} g_{q_{31}(s''')} a_1^{s'''} = g_{q_{32}(s''')} a_2^{s'''} g_{q_{21}(s''')} \quad (s''' \in E''').$$

247 Cela nous donne une équivalence entre la catégorie des objets de $\mathscr{C}'$ munis d'une donnée de descente, et la catégorie des ensembles finis où les groupes $\pi_{s'}$ opèrent continûment, munis de plus de bijections $g_{s''}$, satisfaisant les relations a), b), c). Soit alors G le groupe engendré par les groupes $\pi_{s'}$ et les nouveaux générateurs $g_{s''}$, soumis aux relations a), b), c), et soit π le groupe limite projective des quotients de G par les sous-groupes d'indice fini dont les images inverses dans les groupes $\pi_{s'}$ soient des sous-groupes ouverts. On dit aussi que π est le *groupe de type galoisien engendré par les $\pi_{s'}$ et les $g_{s''}$, soumis aux relations a), b), c)*. On constate aussitôt que la catégorie envisagée est aussi équivalente à la catégorie des ensembles finis où le groupe topologique π opère continûment. Cela établit l'énoncé suivant :

Théorème 5.1 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme de préschémas qui soit un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée de revêtements étales de préschémas (cf. 4.9 et 4.12). Supposons S connexe, et S', son carré fibré S'' et son cube fibré S''', sommes de préschémas connexes (ce qui est le cas par exemple si S' est de type fini sur S localement noethérien et connexe). Choisissons comme dessus : un point géométrique dans toute composante connexe de S', S'', S''', certaines classes de chemins, un $s'_0 \in E'$, et pour tout $s' \in E'$ un $s'' \in E''$ dont les deux images dans E' soient s'_0 et s'. (E', E'', E''' désignent respectivement l'ensemble des composantes connexes de S', S'', S'''). Alors le groupe fondamental de S en le point géométrique image de s'_0 est canoniquement isomorphe au groupe de type galoisien engendré par les $\pi_{s'} = \pi_1(S', \underline{s'})$ ($s' \in E'$) et des générateurs $g_{s''}$ ($s'' \in E''$), soumis aux relations a), b), c) ci-dessus faisant intervenir les éléments des groupes $\pi_{s''} = \pi_1(S'', \underline{s''})$, et les éléments $a_i^{s'''}$ ($i = 1, 2, 3$, $s''' \in E'''$) introduits plus haut.*

Corollaire 5.2 *Supposons que S' et S'' n'aient qu'un nombre fini de composantes connexes, et que les groupes fondamentaux des composantes connexes de S' soient topologiquement de génération finie. Alors le groupe fondamental de S est topologiquement de génération finie.*

248 Ainsi, nous prouverons plus tard que le groupe fondamental d'un schéma projectif normal sur un corps algébriquement clos est topologiquement de génération finie. Utilisant le lemme de Chow et la normalisation des schémas algébriques, il s'ensuivra que le même résultat est vrai pour tout schéma propre sur un corps algébriquement clos.

Corollaire 5.3 *Supposons que S', S'', S''' n'aient qu'un nombre fini de composantes connexes, que les groupes fondamentaux des composantes connexes de S' soient topologiquement de* présentation finie, *et les groupes fondamentaux des composantes connexes de S'' topologiquement de* génération finie. *Alors le groupe fondamental de S est topologiquement de* présentation finie.

On notera qu'on peut exprimer 4.9 (restreint aux *revêtements* étales) en disant qu'*un morphisme fini radiciel surjectif de préschémas noethériens induit un isomorphisme des groupes fondamentaux*; de façon imagée, on peut donc dire que le groupe fondamental est un *invariant topologique* pour les préschémas. On peut expliciter plus généralement, à l'aide de 5.1, l'effet sur le groupe fondamental d'opérations sur les préschémas, telles que le “pincement” du préschéma

suivant un ensemble fini de points, ayant une signification topologique simple. On trouve par
part 50 exemple :

On notera qu'on peut exprimer 4.9 (restreint aux *revêtements* étales) en disant qu'*un morphisme fini radiciel surjectif de préschémas noethériens induit un isomorphisme des groupes fondamentaux* ; de façon imagée, on peut donc dire que le groupe fondamental est un *invariant topologique* pour les préschémas. On peut expliciter plus généralement, à l'aide de 5.1, l'effet sur le groupe fondamental d'opérations sur les préschémas, telles que le "pincement" du préschéma suivant un ensemble fini de points, ayant une signification topologique simple. On trouve par exemple :

Corollaire 5.4 *Soient $g\colon S' \to S$ un morphisme fini de présentation finie, T une partie discrète de S. Pour tout $s \in S$, soit $n(s)$ le "nombre géométrique de points" dans la fibre $g^{-1}(s)$ (qui s'explicite aussi comme le degré séparable de $g^{-1}(s)$ sur $k(s)$, somme des degrés séparables de ses extensions résiduelles). On suppose que pour $s \in S - T$, on a $n(s) = 1$. Pour tout $s \in T$, soit K_s une extension algébriquement close de $k(s)$, I_s l'ensemble des points géométriques de S' à valeurs dans K_s (c'est un ensemble à $n(s)$ éléments), I'_s le complémentaire d'un point choisi de I_s, et enfin I' l'ensemble réunion des I'_s. On suppose S' connexe. Alors le groupe fondamental de S est isomorphe au groupe de type galoisien engendré par le groupe fondamental de S', et des générateurs g_i ($i \in I'$), soumis à aucune condition supplémentaire.*

249 Le détail de la démonstration est laissé au lecteur ; l'énoncé obtenu n'est que la traduction, en langage de la théorie des groupes, du fait qu'on a une équivalence de la catégorie C des revêtements étales de S, et de la catégorie des revêtements étales X' de S', *munis* pour tout $s \in T$ d'un système transitif de bijections entre les $n(s)$ fibres de X' aux points de $g^{-1}(s)$ à valeurs dans K_s. (Sous cette forme intrinsèque bien entendu, il n'est plus nécessaire de supposer S' connexe).

Exemple 5.5 On prouve facilement que la courbe rationnelle $\mathbb{P}^1_k$ sur un corps algébriquement clos k est simplement connexe[7]. Donc le groupe fondamental d'une courbe rationnelle complète ayant exactement un point double, à n branches analytiques, est le groupe de type galoisien libre engendré par $n - 1$ générateurs. Par exemple, dans le cas d'un point double ordinaire, on trouve le groupe fondamental $\hat{\mathbb{Z}}$, comme annoncé dans (I.11 a)). Par contre, l'existence d'un point de rebroussement (qui est un point "géométriquement unibranche") n'a pas d'influence sur le groupe fondamental.

Corollaire 5.6 *Soit $g\colon S' \to S$ un morphisme de préschémas universellement submersif, à fibres géométriquement connexes, S étant connexe. Alors S' est connexe, et choisissant un point géométrique s' dans S' et désignant par s son image dans S, l'homomorphisme*

$$\pi_1(S', s') \to \pi_1(S, s)$$

[7]Cf. Exp. XI.1.1.

est surjectif. *Si g est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des revêtements étales de préschémas (cf. 4.12), introduisant le point géométrique $s'' = \mathrm{diag}(s')$ de $S'' = S' \times_S S'$, et les deux homomorphismes*

$$p_{1*}, p_{2*} \colon \pi_1(S'', s'') \to \pi_1(S', s')$$

induits par les deux projections, $\pi_1(S, s)$ est isomorphe au conoyau de ce couple de morphismes dans la catégorie des groupes de type galoisien, i.e. au quotient de $\pi_1(S', s')$ par le sous-groupe
250 *invariant fermé engendré par les éléments de la forme $p_{1*}(g'')p_{2*}(g'')^{-1}$, avec $g'' \in \pi_1(S'', s'')$.*

On sait en effet par 3.4 que le foncteur $X \mapsto X \times_S S'$ des revêtements étales sur S dans les revêtements étales sur S' est pleinement fidèle, ce qui équivaut au fait que l'homomorphisme sur les groupes fondamentaux est un épimorphisme (V.6.9). La dernière assertion est une conséquence immédiate de la description 5.1.

Remarque 5.7 Il n'est pas connu à l'heure actuelle si le groupe fondamental d'un schéma propre sur un corps algébriquement clos k est topologiquement de présentation finie[8]. Utilisant 5.3, une technique bien connue de sections hyperplanes, et la désingularisation des surfaces normales, on est ramené au cas d'une *surface lisse sur k*. Cela permet du moins de montrer, par voie transcendante, que la réponse est affirmative en caractéristique 0 (et ceci sans être obligé d'admettre la triangulabilité de variétés algébriques singulières). En caractéristique $p > 0$, la difficulté principale semble dans le cas des courbes, dont on sait seulement que le groupe fondamental est un quotient de celui qui se présente dans le cas classique (cf. exposé suivant), le noyau par lequel on divise étant cependant fort mal connu.

Remarque 5.8 On pourrait expliciter d'autres cas particuliers que 5.4 et 5.6 où 5.1 prend une forme particulièrement simple. Un cas intéressant est celui où S est le quotient de S' par un groupe fini d'automorphismes Γ. *Alors la catégorie des revêtements étales S' est équivalente à la catégorie des revêtements étales X' de S', où le groupe Γ opère de façon compatible avec ses opérations sur S', de telle façon que pour tout $s' \in S'$ et tout $g \in \Gamma_{s'}$* (où $\Gamma_{s'}$ désigne *le groupe d'inertie* de s' dans Γ)*, g opère trivialement dans la fibre $X'_{s'}$*. Si S' est connexe cet énoncé s'interprète de la façon suivante. Soit C'_o la catégorie des revêtements étales de S' où Γ opère de façon compatible avec ses opérations sur S' (mais sans satisfaire nécessairement la condition ci-dessus sur les groupes d'inertie des points de S'). On voit facilement que c'est une catégorie
251 galoisienne (V.5), et que pour tout point géométrique a' de S', le foncteur fibre $X' \mapsto X'_{a'}$ sur C'_o est un foncteur fondamental. Soit $\pi_1(S', \Gamma; a') = G$ le groupe des automorphismes de ce foncteur, muni de sa topologie habituelle. On a alors une suite exacte canonique

$$e \to \pi_1(S', a') \to G \to \Gamma \to e$$

[8]Cela semble très improbable dans le cas des courbes lisses de genre $g \geq 2$, en caractéristique $p > 0$. Quand on remplace π_1 par son plus grand quotient premier à p, par contre, il semble que les techniques bien connues permettent de donner une réponse affirmative, même sans hypothèse de propreté. Cf. un travail en préparation de J.P Murre.

(cas particulier de (V.6.13), où on prend pour S le revêtement trivial $S' \times \Gamma$ de S' défini par Γ, où on fait opérer Γ de façon évidente). D'ailleurs pour tout point géométrique b' de S', on a un isomorphisme $\pi_1(S', \Gamma; b') \to G = \pi_1(S', \Gamma; a')$ défini à automorphisme intérieur près provenant de $\pi_1(S', a')$, et comme $\Gamma_{b'}$ s'applique de façon évidente dans le premier membre, on obtient un homomorphisme

$$u_{b'} : \Gamma_{b'} \to G \quad ,$$

défini à automorphisme intérieur près (provenant de $\pi_1(S', a')$, dont le composé avec l'homomorphisme canonique $G \to \Gamma$ est d'ailleurs l'immersion canonique $\Gamma_{b'} \to \Gamma$. Ceci posé, *le groupe fondamental* $\pi_1(S, a)$ est *canoniquement isomorphe au groupe quotient de* $G = \pi_1(S', \Gamma; a')$ *par le sous-groupe invariant fermé engendré par les images des homomorphismes* $\Gamma_{b'} \to G$. En particulier, l'image de $\pi_1(S', a')$ dans $\pi_1(S, a)$ est un sous-groupe invariant, et le quotient correspondant est isomorphe à un quotient de Γ. On peut d'ailleurs réduire le nombre des "relations" introduites en introduisant, pour tout $g \in \Gamma$, $g \neq e$, le sous-préschéma S'_g des coïncidences des automorphismes id_S et g de S, en choisissant un point géométrique $b'_{g,i}$ dans chaque composante connexe de S'_g, puis un des homomorphismes correspondants $\pi_1(S', \Gamma; b'_{g,i}) \to G$, d'où des relèvements $\bar{g}_i$ de g dans G. Il suffit alors de prendre le quotient de G par le sous-groupe invariant fermé de G engendré par les $\bar{g}_i$.

Lorsque a' est invariant par Γ, on voit aisément que Γ opère de façon naturelle sur $\pi_1(S', a')$, et G s'identifie au produit semi-direct correspondant. Identifiant alors Γ a un sous-groupe de G,
252 on voit que dans les relations introduites plus haut, faisant $b' = a'$, on trouve "$g = e$" pour $g \in I$. Donc *si* S' *a un point géométrique* a' *fixe par* I (i.e. un point s' dont le groupe d'inertie est Γ), *alors* $\pi_1(S, a)$ *est un groupe quotient du groupe quotient de type galoisien de* $\pi_1(S', a')$ *obtenu en* "rendant triviales" *les opérations de* Γ *sur* $\pi_1(S', a')$ *; et il est même isomorphe à ce dernier groupe si on suppose que pour tout* $g \in G$*, l'ensemble d'inertie* S'_g *est connexe, donc passe par la localité de* a'. Cette dernière assertion est en effet contenue dans la deuxième description donnée plus haut pour les relations à introduire dans G.

Ce dernier résultat s'applique en particulier si l'on prend pour S' la puissance cartésienne X^n d'un préschéma connexe sur un corps algébriquement clos, pour Γ le groupe symétrique $\Gamma = \mathfrak{S}_n$, opérant de la façon habituelle, d'où pour S la puissance symétrique n.ème de S. Prenant alors pour a' un point géométrique localisé en la diagonale, on est sous les conditions précédentes, les ensembles d'inertie S'_g contenant en effet tous la diagonale. Utilisant le fait, prouvé dans l'exposé suivant, que si X est propre connexe sur k, le groupe fondamental de X^n s'identifie à $\pi_1(X)^n$, on trouve le résultat amusant suivant : *Si* X *est propre connexe sur* k *algébriquement clos, le groupe fondamental de sa puissance symétrique* n.ème*,* $n \geq 2$*, est isomorphe au groupe fondamental de* X *rendu abélien.* (J'ignore si le fait analogue en Topologie algébrique est connu ; il devrait pouvoir s'établir par la même méthode de descente). Prenons par exemple pour X une courbe rationnelle $X = \mathbb{P}^1_k$, on trouve une N.ème démonstration du fait que $\mathbb{P}^r_k$ est simplement connexe, utilisant le fait que $\mathbb{P}^1_k$ l'est. Prenons maintenant pour X une courbe simple sur k, et $n \geq 2g-1$, de sorte que $\mathrm{Symm}^n(X)$ est fibré sur la jacobienne J, de fibres des espaces projectifs, donc (comme on verra à l'aide des résultats des deux exposés suivants) a même groupe fondamental que J. On retrouve alors sans dévissage le fait bien connu que *le groupe fondamental de la jacobienne de*

X est isomorphe au groupe fondamental de X rendu abélien.

part 51

6 Une suite exacte fondamentale. Descente par morphismes à fibres relativement connexes

253

Théorème 6.1 *Soient S le spectre d'un anneau artinien A de corps résiduel k, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, X un S préschéma, $X_0 = X \otimes_A k$, $\overline{X}_0 = X \otimes_A \overline{k}$, $\overline{a}$ un point géométrique de $\overline{X}$, a son image dans X, b son image dans S. On suppose que X_0 est quasi-compact et* géométriquement connexe *sur k (N.B. si X est propre sur S, cela signifie que* $\mathrm{H}^0(X_0, \mathscr{O}_{X_0})$ *est un anneau artinien* local *de corps résiduel* radiciel *sur k). Alors la suite d'homomorphismes canoniques*

$$e \mapsto \pi_1(\overline{X}_0, \overline{a}) \to \pi_1(X, a) \to \pi_1(S, b) \to e$$

est exacte, et on a

$$\pi_1(S, b) \xleftarrow{\sim} \pi_1(k, \overline{k}) = \text{ groupe de Galois de } \overline{k} \text{ sur } k.$$

Comme les groupes fondamentaux ne changent pas en châtrant par les éléments nilpotents, on peut supposer $A = k$, ce qui rend déjà évident le dernier isomorphisme. Soit k' la clôture séparable de k dans $\overline{k}$, et considérons $X' = X \otimes_k k'$, et l'image a' de $\overline{a}$ dans X'. On a une suite d'homomorphismes canoniques

$$e \mapsto \pi_1(\overline{X}_0, \overline{a}) \to \pi_1(X', a') \to \pi_1(S', b') \to e$$

(où $S' = \mathrm{Spec}(k')$). Enfin, on a un homomorphisme canonique de cette suite dans celle relative à X/k, grâce au diagramme

$$\begin{tikzcd}
S & X \arrow[l] & \overline{X}_0 \arrow[l] \\
S' \arrow[u] & X' \arrow[l] \arrow[u] & \overline{X}_0 \arrow[l] \arrow[u, "|"']
\end{tikzcd} .$$

On voit d'autre part que cet homomorphisme de suites de groupes est un isomorphisme, comme il résulte de 4.11. On est donc ramené à prouver que la deuxième suite est exacte, i.e. on peut supposer que k est *parfait*. Soient alors k_i les sous-extensions galoisiennes finies de k dans $\overline{k}$, posons $X_i = X \otimes_k k_i$, et soit a_i l'image de $\overline{a}$ dans X_i. On laisse au lecteur de vérifier que l'homomorphisme naturel

$$\pi_1(\overline{X}_0, a) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \pi_1(X_i, a_i)$$

254 est un isomorphisme, ce qui signifie simplement qu'un revêtement étale de $\overline{X}$ provient d'un revêtement étale d'un X_i, et que ce dernier est essentiellement unique, modulo passage à un X_j, $j \geq i$. D'autre part, soit π_i le groupe de Galois de k_i sur k, i.e. le groupe opposé au groupe des S-automorphismes de $S_i = \mathrm{Spec}(k_i)$. Comme le foncteur $S' \mapsto X \times_S S'$ des revêtements

étales de S dans les revêtements étales de X est pleinement fidèle (3.4), il s'ensuit que π_i est aussi isomorphe au groupe opposé aux groupes des X-automorphismes du revêtement principal connexe X_i de S. Il résulte donc de (V 6.13) que l'on a une suite exacte

$$e \mapsto \pi_1(X_i, a_i) \to \pi_1(X, a) \to \pi_i \to e$$

Passant à la limite projective sur i dans ces suites exactes, on trouve une suite exacte (puisqu'on est dans la catégorie des groupes de type galoisien), qui n'est autre que la suite envisagée dans 6.1. Cela achève la démonstration.

La traduction de l'exactitude à droite dans 6.1 en langage géométrique est la suivante :

Corollaire 6.2 *Avec les notations précédentes, soit X' un revêtement étale de X, et soit $\overline{X}'_0$ le revêtement étale correspondant de $\overline{X}_0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un S' étale sur S, et un X-isomorphisme $X' \xrightarrow{\sim} X \times_S S'$, ($S'$ est alors déterminé à isomorphisme unique près en vertu de 3.4).

(ii) $\overline{X}'_0$ est complètement décomposé sur $\overline{X}_0$.

Si X' est connexe, ces conditions équivalent aussi à :

(iibis) $\overline{X}'_0$ a une section sur $\overline{X}_0$.

(N.B. Ce dernier complément est essentiel ; l'équivalence de (i) et (ii) signifie seulement
255 *que $\pi_1(S, b)$ est le groupe quotient de $\pi_1(X, a)$ par le sous-groupe invariant fermé engendré par l'image de $\pi_1(\overline{X}_1, \overline{a})$, et non par cette image elle-même). Sous les conditions précédentes, nous dirons que X' est un revêtement* géométriquement trivial *de X.*

Remarque 6.3 On ne peut dans l'énoncé 6.1 remplacer $\overline{k}$ par une extension algébriquement close quelconque de k, même si k est déjà supposé algébriquement clos. En d'autres termes, il n'est pas vrai en général que si X est un schéma algébrique connexe sur un corps algébriquement clos k, son groupe fondamental ne change pas en remplaçant k par une extension algébriquement close ; c'est déjà faux par exemple en caractéristique $p > 0$ pour la droite affine sur k, à cause des phénomènes de "ramification supérieure" au point à l'infini, impliquant une structure "continue" pour le groupe fondamental. Nous verrons cependant dans l'exposé suivant que de tels phénomènes ne peuvent se produire si X est *propre* sur k. Nous montrerons aussi par voie transcendante qu'il en est de même si k est de caractéristique nulle.

Corollaire 6.4 *Supposons que a soit localisé en un $x \in X$ qui est rationnel sur k (ou plus généralement, ayant un corps résiduel radiciel sur k). Alors la suite exacte 6.1 est scindée.*

On peut supposer $S = \mathrm{Spec}(k)$. Si x est rationnel sur k, il correspond à une section $S \to X$ de X sur S, transformant b en a, et définissant un homomorphisme $\pi_1(S, b) \to \pi_1(X, a)$ qui est le scindage cherché. Si $k(x)$ est radiciel sur k, on se ramène au cas précédent en faisant l'extension de la base $\mathrm{Spec}(k(x)) \to \mathrm{Spec}(k)$.

Théorème 6.5 *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme propre et surjectif de présentation finie, à fibres géométriquement connexes, X' un préschéma de présentation finie et propre sur X, s un point* *de S, $F = X_s$ la fibre de X en s, et F'_1 une composante connexe de la fibre $F' = X'_s$ de X' en s. Pour qu'il existe un voisinage ouvert X'_1 de F'_1 dans X', un S-schéma étale S'_1 et un X-isomorphisme $X'_1 \xrightarrow{\sim} S'_1 \times_S X$, il faut et il suffit que X' soit étale sur X aux points de F'_1, et que F'_1 soit un revêtement géométriquement trivial de F.*

256 La nécessité de la condition étant triviale, il reste à prouver la suffisance. On se ramène facilement au cas où S est noethérien. Considérons la factorisation de Stein $X \to T \to S$ de f, où T est le spectre de l'Algèbre $f_*(\mathscr{O}_X)$ sur S. Comme les fibres de X sur S sont géométriquement connexes, et f est surjectif, le morphisme $T \to S$ est fini surjectif et radiciel, donc (4.10) tout T' étale sur T provient par image inverse d'un S' étale sur S. Cela nous ramène à prouver 6.5. en y remplaçant S par T, i.e. dans le cas où on suppose $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_S$. Considérons alors la factorisation de Stein $X' \to S' \to S$ du morphisme propre $h\colon X' \to S$, où S' est le spectre de l'Algèbre $h_*(\mathscr{O}_{X'})$. Les morphismes $X' \to X$ et $X' \to S'$ définissent un morphisme canonique

$$X' \to X \times_S S',$$

et notre assertion est contenue dans la suivante :

Corollaire 6.6 *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme propre de préschémas localement noethériens, tel que $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_S$, et soit X' un préschéma propre sur X. Considérons la factorisation de* Stein *$X' \to S' \to S$ pour $X' \to S$, et le morphisme canonique $X' \to X \times_S S'$. Soient s un point de S, s' un point de S' au-dessus de s, correspondant à une composante connexe F'_1 de la fibre X'_s de X' en s. Pour que le morphisme $X' \to X \times_S S'$ soit un isomorphisme au-dessus d'un voisinage ouvert U' de s' étale sur S, il faut et il suffit que X' soit étale sur X en les points de F'_1, et que F'_1 soit un revêtement géométriquement trivial de la fibre $F = X_s$.*

La nécessité étant encore triviale, il reste à prouver la suffisance. La conclusion signifie aussi que a) le morphisme déduit de $X' \to X \times_S S'$ par le changement de base $\operatorname{Spec}(\widehat{\mathscr{O}}_{s'}) \to S'$ est un isomorphisme, b) S' est étale sur S en s', i.e. $\widehat{\mathscr{O}}_{s'}$ est étale sur $\widehat{\mathscr{O}}_s$. Sous cette forme, on voit que la conclusion est invariante par changement de base $\operatorname{Spec}(\widehat{\mathscr{O}}_s) \to S$. Les hypothèses étant également stables par ce changement de base, on peut donc supposer que S est le spectre d'un anneau local noethérien complet. On peut de plus évidemment supposer X' connexe, ce qui implique ici que $S' = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{s'})$, $F' = F'_1$.

257 Comme l'ensemble des points de X' où X' est étale sur X est ouvert et contient la fibre $X'_{s'} = F'$, X' étant propre sur S, il s'ensuit que X' est étale sur X. Comme il induit sur $F = X_s$ un revêtement étale isomorphe à un $F \otimes_{k(s)} L$, où L est étale sur $k(s)$, il résulte de 1.10 qu'il est isomorphe à un revêtement de la forme $X \times_S T$, avec T étale sur S. (N.B. ici encore, il suffit d'utiliser que le foncteur de 1.10 est pleinement fidèle, qui résulte du fait qu'un isomorphisme formel de faisceaux cohérents sur X provient d'un isomorphisme de ces faisceaux). Donc, si T est défini par l'algèbre B finie sur A, X' s'identifie au spectre de l'Algèbre $\mathscr{O}_X \otimes_A B$ sur X, d'où résulte aussitôt, puisque $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_S$, que $h_*(\mathscr{O}_{X'})$ est défini par B, donc l'homomorphisme canonique $X' \to X \times_S S'$ n'est autre que l'isomorphisme envisagé $X' \xrightarrow{\sim} X \times_S T$. Cela achève la démonstration.

Corollaire 6.7 *Sous les conditions de 6.5, pour qu'il existe un préschéma S' étale sur S et un X-isomorphisme $X' \xrightarrow{\sim} X \times_S S'$, il faut et il suffit que X' soit étale sur X et que pour tout $s \in S$, $X'_{s'}$ soit un revêtement géométriquement trivial de X_s.*

En effet, s'il en est ainsi, X' est réunion d'ouverts X'_i qui sont isomorphes à des images inverses de S'_i étales sur S. On voit alors facilement que ces S'_i se recollent en un S' étale sur S, et qu'on obtient un isomorphisme $X' \xrightarrow{\sim} X \times_S S'$. On peut dire par exemple que les X'_i sont munis de données de descente relativement à $X \to S$, qui se recollent nécessairement en une donnée de descente sur X' tout entier relativement à $X \to S$. Et comme cette dernière est effective sur les X'_i, il s'ensuit facilement (grâce à un sorite oublié au numéro 4) qu'elle est effective. On peut aussi énoncer 6.7 sous la forme suivante :

Corollaire 6.8 *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme propre surjectif de présentation finie, à fibres géométriquement connexes. Alors f est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des préschémas étales finis sur d'autres. Le foncteur $S' \mapsto X \times_S S'$ induit une équivalence*
258 *de la catégorie des préschémas étales et finis sur S avec la catégorie des préschémas étales et finis sur X qui induisent sur chaque fibre X_s un revêtement géométriquement trivial.*

Remarque 6.9 Soit $f\colon X \to S$ un morphisme propre et surjectif, avec Y localement noethérien, alors f se factorise en un morphisme $X \to S'$ satisfaisant l'hypothèse de 6.8, et un morphisme fini surjectif $S' \to S$ justiciable de 4.7, donc en produit de deux morphismes qui sont des *morphismes de descente effective universels* pour la catégorie fibrée des préschémas étales et finis sur d'autres. On peut en conclure que f lui-même est un morphisme de descente effective universel pour la catégorie fibrée envisagée. On retrouve ainsi 4.12 par une méthode différente.

part 52

Remarque 6.10 La conclusion de 6.7 ne reste pas valable si on remplace l'hypothèse que f est propre par : X est de type fini sur S et admet une section sur S (donc f est universellement submersif et un morphisme de descente spour la catégorie fibrée des préschémas étales sur d'autres), même lorsque S est le spectre d'un anneau de valuation discrète et lorsque X' est un revêtement étale de X. Pour le voir, on part d'un Z propre sur S, dont la fibre générale est une courbe rationnelle non singulière, et la fibre spéciale Z_0 consiste en deux droites concourantes. Par exemple, si t est une uniformisante de l'anneau de valuation A, on prend le sous-schéma fermé Z de $\mathbb{P}^2_A$ défini par l'équation homogène $x^2 + y^2 + tz^2 = 0$ (coordonnées homogènes x, y, z). On prend pour X le complémentaire du point singulier a de Z_0 dans la réunion $Z \cup \mathbb{P}^2_k$. Les fibres de X sont $\mathbb{P}^1_k$ et $\mathbb{P}^2_k - a$, donc sont géométriquement connexes (i.e. tout revêtement étale d'une telle fibre
259 est géométriquement trivial). Cependant on construit facilement, en procédant comme dans le N° 4, des revêtements étales de X qui ne proviennent pas de revêtements étales de S, par recollement de revêtements triviaux de $Z - a$ et de $\mathbb{P}^2_k - a$. Il est possible par ontre que la conclusion de 6.7 subsiste si on y remplace l'hypothèse de propreté par celle que X soit *universellement ouvert* de présentation finie sur S[9]. C'est vrai du moins si on suppose que les fibres de X sur S sont géométriquement irréductibles, et non seulement géométriquement connexes. Signalons

[9]C'est maintenant prouvé, g étant seulement universellement ouvert et surjectif ; cf. SGA 4 XV 1.15.

seulement qu'on peut dans cette question se ramener au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos.

L'interprétation de 6.7 en termes du groupe fondamental est la suivante :

Corollaire 6.11 *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme propre surjectif de présentation finie, à fibres géométriquement connexes. On suppose X donc S connexe. Soient a un point géométrique de X, b son image dans S, et pour tout $s \in S$, choisissons une clôture algébrique $\overline{\mathrm{k}(s)}$ de $\mathrm{k}(s)$, un point géométrique a_s de S_a à valeurs dans cette extension, et une classe de chemins de a_s dans a, d'où un homomorphisme $\pi_1(\overline{X}_s, a_s) \to \pi_1(X, a)$, où $\overline{X}_s = X_s \otimes_{\mathrm{k}(s)} \overline{\mathrm{k}(s)}$. Alors l'homomorphisme $pi_1(X, a) \to \pi_1(S, b)$ est surjectif, et son noyau est le sous-groupe invariant fermé de $\pi_1(X, a)$ engendré par les images des $\pi_1(\overline{X}_s, a_s)$.*

Remarque 6.12 Sous les conditions de 6.7, supposant S noethérien, on voit facilement que l'ensemble des points $s \in S$ tels que $S'_{s'}$ soit géométriquement trivial sur X_s est un ensemble constructible ; si X' est propre sur X, il est même ouvert, comme on le voit sur 6.6. Cela permet
260 donc, si S et un préschéma de Jacobson (par exemple de type fini sur un corps), ou X' est propre sur X, de se borner pour vérifier les conditions de 6.7 aux points s de S qui sont *fermés*. De même, dans 6.11 il suffit alors de prendre les $\pi_1(\overline{X}_s, a_s)$ pour les points de S qui sont fermés.

7 Bibliographie

[D] J. GIRAUD, Méthode de la descente, Mémoire n° 2 de la Soc. Math. Fr., 1964.

[1] A. GROTHENDIECK, Géométrie Algébrique et Géométrie Formelle, Séminaire Bourbaki t. 11, 1959, N° 182.

Exposé X

Théorie de la spécialisation du groupe fondamental

261

Dans le présent exposé, nous nous bornons à l'étude du groupe fondamental des fibres géométriques dans un morphisme *propre*, i.e. du groupe fondamental d'un schéma algébrique *propre* variable. Dans un exposé ultérieur, nous généraliserons la technique employée aux revêtements étales *modérément ramifiés* "à l'infini". Cela nous donnera par exemple une solution du "Problème des trois points" dans le cas des revêtements galoisiens d'ordre premier à la caractéristique (i.e. une détermination des revêtemenrs galoisiens de la droite $\mathbb{P}^1_k$, ramifiés au plus en trois points données et modérément ramifiés en ces points), et de ses variantes évidentes.

1 La suite exacte d'homotopie pour un morphisme propre et séparable

Définition 1.1 *Un préschéma X sur un corps k est dit* séparable, *ou* séparable sur k, *si pour toute extension K de k, $X \otimes_k K$ est réduit. Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme de préschémas, on dit que f est* séparable, *ou que X* est séparable sur Y, *si X est plat sur Y et si pour tout $y \in Y$, la fibre $X \otimes_Y \mathrm{k}(y)$ est séparable sur $\mathrm{k}(y)$.*

Si X est un préschéma sur un corps k, dire qu'il est séparable signifie aussi qu'il est *réduit*, et que les corps $\mathrm{k}(x)$ pour x point générique d'une composante irréductible de X, sont des extensions séparables de k. Si k est parfait, il revient donc au même de dire que X est réduit. Notons que si X est séparable sur Y, alors pour tout changement de base $Y' \to Y$, $X' = X \times_Y Y'$ est séparable sur Y'. On peut prouver aussi, moyennant des hypothèses de finitude convenables,
262 que le composé de deux morphismes séparables est un morphisme séparable. Nous en aurons besoin seulement sous la forme suivante : *si X est séparable sur Y, et X' étale sur X, X' est séparable sur Y*. C'est en effet une conséquence immédiate des définitions et (SGA 1 9.2). Par

ailleurs, l'hypothèse "morphisme séparable" nous servira par l'intermédiaire de la proposition suivante :

Proposition 1.2 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme propre et séparable, avec Y localement noethérien, et considérons sa factorisation de Stein $X \xrightarrow{f} Y' \to Y$ (où $f'_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_{Y'}$, Y' étant fini sur Y et isomorphe au spectre de l'algèbre $f_*(\mathscr{O}_X)$). Alors Y' est un* revêtement étale *de Y.*

Cette proposition figurera dans (EGA III 7)[1]. Indiquons le principe de la démonstration. On se ramène facilement au cas où Y est le spectre d'un anneau local complet A, et faisant encore une extension finie plate convenable de ce dernier (correspondant à une extension résiduelle convenable), on peut supposer que les composantes connexes de la fibre du point fermé y sont universellement connexes, ce qui signifie aussi que $\mathrm{H}^0(X_y, \mathscr{O}_{X_y})$ se décompose en un produit de corps identiques à $k = \mathrm{k}(y)$. Supposant alors X connexe, ce qui est loisible, on aura $\mathrm{H}^0(X_y, \mathscr{O}_{X_y}) = k$, donc l'homomorphisme $A \to \mathrm{H}^0(X_y, \mathscr{O}_{X_y})$ est *surjectif.* On en conclut par une proposition générale (du type Künneth) que $f_*(\mathscr{O}_X)$ est défini par un module B sur A qui est libre sur A, et que $B/\mathfrak{m}B \to \mathrm{H}^0(X_y, \mathscr{O}_{X_y}) = k$ est bijectif. Donc en l'occurrence B est une algèbre étale sur A, ce qui achève la démonstration.

Théorème 1.3 *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme propre et séparable, avec Y localement noethérien et connexe, et supposons $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_Y$ (ce qui implique que les fibres de X sur Y sont universellement connexes, et réciproquement grâce à 1.2). Soient y un point de Y, $\overline{\mathrm{k}(y)}$ une clôture algébrique de $\mathrm{k}(y)$, $\overline{X}_y = X_y \otimes_{\mathrm{k}(y)} \overline{\mathrm{k}(y)}$. Soient enfin X' un revêtement étale* connexe *de X, et $\overline{X}'_y = X'_y \otimes_{\mathrm{k}(y)} \overline{\mathrm{k}(y)}$. Pour qu'il existe un revêtement étale Y' de Y et un*
263 *X-isomorphisme $X' \xrightarrow{\sim} X \times_Y Y'$, il faut et il suffit que $\overline{X}'_y$ admette une section sur $\overline{X}_y$.*

Posant $Y' = \mathrm{Spec}(h_*(\mathscr{O}_{X'})$ (où $h\colon X' \to Y$ est le morphisme composé $X' \to X \to Y$), il suffit de prouver que le Y-morphisme canonique

$$X' \to X \times_Y Y'$$

est un *isomorphisme*, et que Y' est étale sur Y. Or nous savons déjà par 1.2 que Y' est étale sur Y, donc $X \times_Y Y'$ est étale sur X, donc le morphisme $X' \to X \times_Y Y'$ est également étale (SGA I 4.8). D'ailleurs, Y' est connexe comme image de X' qui l'est, donc $X \times_Y Y'$ est connexe puisque X est à fibres connexes sur Y (SGA IX 3.4 et V 6.9 (iii)). Donc pour prouver que $X' \to X \times_Y Y'$ est un isomorphisme, il suffit de voir que son degré de projection en *un* point de $X \times_Y Y'$ est égal à 1. Or ceci résulte facilement de l'hypothèse que $\overline{X}'_y$ admet une section sur $\overline{X}_{y'}$, soit par utilisation de (SGA IX 6.6), soit plus simplement en notant qu'il suffit de prouver l'existence d'un tel point dans $X \times_Y Y'$ après changement de base $\mathrm{Spec}(\overline{k}) \to Y$, où cela est évident. Cela achève la démonstration de 1.3.

Tenant compte de (SGA IX 3.4) et du dictionnaire (SGA V 6.9 et 6.11), on peut mettre 1.3 sous la forme

[1]Cf. EGA III 7.8.10 (i)

Corollaire 1.4 *Avec les notations précédentes pour $f\colon X \to Y$ et $\overline{X}_y$, soit $\bar{a}$ un point géométrique de $\overline{X}_y$, a son image dans X et b son image dans Y. Alors la suite suivante d'homomorphismes est exacte :*

$$\pi_1(\overline{X}_y, \bar{a}) \to \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, b) \to 0 \ .$$

part 53

Remarques 1.5 On notera que la démonstration de 1.3 fait intervenir de façon essentielle 1.2 et par là le "premier théorème de comparaison" en géométrie algébrico-formelle. Par contre, la
264 théorie de la descente de l'exposé IX n'est intervenue que par l'intermédiaire de IX.3.4, dont une démonstration directe dans le cas d'un morphisme *propre* $f\colon X \to Y$ tel que $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_Y$ est facile. Soit en effet Y' étale sur Y et supposons que $X' = X \times_Y Y'$ soit somme disjointe de deux ouverts non vides, prouvons qu'il en est de même de Y'. En effet, on aura $Y' = \operatorname{Spec}(\mathscr{A})$, donc $X' = \operatorname{Spec}(\mathscr{B})$ avec $\mathscr{B} = \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$, et la décomposition de X' en somme directe correspond à une décomposition de $\mathscr{B}$ en produit de deux algèbres non nulles $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. Comme $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_Y$ on conclut facilement $f_*(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$, donc $\mathscr{A}$ sera somme de deux algèbres (non nulles également, car leurs sections unité sont non nulles) $f_*(\mathscr{B}_1)$ et $f_*(\mathscr{B}_2)$, cqfd.

1.6 Supposons encore que f soit propre et séparable, mais ne faisons plus d'hypothèse sur $f_*(\mathscr{O}_X)$, qui correspondra à un revêtement étale Y' bien déterminé de Y, d'ailleurs ponctué au-dessus de b par l'image b' de a. Appliquant alors 1.4 au morphisme canonique $X \to Y'$, et supposant f surjectif, la suite exacte 1.4 est remplacée par la suivante, analogue de la suite exacte d'homotopie des espaces fibrés en topologies algébriques :

$$\pi_1(\overline{X}_y, \overline{a}) \to \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, b) \to \pi_0(\overline{X}_y, \overline{a}) \to \pi_0(X, a) \to \pi_0(Y, b) \to e$$

Bien entendu, dans 1.4 on ne peut pas en général affirmer que l'homomorphisme

$$\pi_1(\overline{X}_y, \overline{a}) \to \pi_1(X, a)$$

soit injectif ; en topologie algébrique, son noyau est l'image de $\pi_2(Y, b)$, et il y aurait lieu en géométrie algébrique également d'introduire des groupes d'homotopie en toutes dimensions, et la suite exacte d'homotopie complète pour un morphisme propre satisfaisant des hypothèses convenables (par exemple d'être un morphisme lisse). On ne dispose à l'heure actuelle d'aucun résultat dans ce sens, à l'exception d'une définition raisonnable (sinon définitive) des groupes d'homotopie supérieure.

Corollaire 1.7 *Soient k un corps algébriquement clos, X et Y deux préschémas connexes*
265 *sur k ; on suppose X propre sur k et Y localement noethérien. Soient a un point géométrique de X, b un point géométrique de Y à valeurs dans la même extension algébriquement close K de k. Considérons le point géométrique $c = (a, b)$ de $X \times_k Y$, et l'homomorphisme $\pi_1(X \times_k Y, c) \to \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$ déduit des homomorphismes sur les groupes fondamentaux associés aux deux projections $X \times_k Y \to X$ et $X \times_k Y \to Y$. L'homomorphisme précédent est un* isomorphisme.

Supposons d'abord $K = k$. Posons $Z = X \times_k Y$, considérons la projection $f\colon Z \to Y$ et la localité y du point géométrique b de Y, appliquons à la situation le résultat 1.4. On notera pour ceci que, quitte à passer à $X_{\text{réd}}$, (ce qui ne change pas les groupes fondamentaux envisagés), on peut supposer déjà X réduit donc séparable sur k, donc Z est séparable sur k, et évidemment à fibres universellement connexes (puisque X est connexe). La fibre géométrique de Z en b est canoniquement isomorphe à $X \otimes_k K = X$. D'autre part, comme le composé des morphismes $X \to Z \to X$ est l'identité, on trouve que $\pi_1(X, a) \to \pi_1(Z, c)$ est injectif et 1.4 nous donne une suite exacte :

$$e \to \pi_1(X, a) \to \pi_1(Z, c) \to \pi_1(Y, b) \to e.$$

D'autre part, on a la suite exacte canonique :

$$e \to \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b) \to \pi_1(Y, b) \to e\ ,$$

où les deux homomorphismes écrits sont l'injection canonique et la projection canonique. On a enfin un homomorphisme de la première suite exacte dans la deuxième, à l'aide des morphismes identiques sur les termes extrêmes, et l'homomorphisme canonique

$$\pi_1(Z, c) \to \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$$

pour les termes médians. La commutativité du diagramme ainsi obtenu se vérifie trivialement. Comme les homomorphismes sur les termes extrêmes sont des isomorphismes, il en est de même pour les termes médians, ce qui prouve 1.7 dans ce cas.

Lorsqu'on ne suppose plus $K = k$, on trouve seulement un isomorphisme

$$\pi_1(Z, c) \to \pi_1(X \otimes_k K, a) \times \pi_1(Y, b),$$

266 et 1.7 équivaut alors au cas particulier suivant :

Corollaire 1.8 *Soient X un schéma propre et connexe sur un corps algébriquement clos k, k' une extension algébriquement close de k, a' un point géométrique de $X \otimes_k k'$ et a son image dans X. Alors l'homomorphisme canonique $\pi_1(X \otimes_k k', a') \to \pi_1(X, a)$ est un* isomorphisme.

Le fait que cet homomorphisme soit surjectif équivaut à dire que si X' est un revêtement étale connexe de X, alors $X' \otimes_k k'$ est également connexe, et résulte aussitôt du fait que k est algébriquement clos ; c'est aussi un cas particulier de (SGA IX.3.4). L'hypothèse de propreté sur X n'a pas encore servi. Ceci dit, dire que l'homomorphisme envisagé est injectif signifie aussi ceci : *tout revêtement étale de $X \otimes_k k'$ est isomorphe à l'image inverse d'un revêtement étale de X*. Il est essentiellement sorital qu'on peut trouver une sous-k-algèbre A de K, de type fini sur k, et un revêtement étale de $X \otimes_k A$ dont l'image inverse sur $X \otimes_k k'$ est isomorphe au revêtement donné. Soit donc $Y = \operatorname{Spec}(A)$, qui est un k-schéma intègre de type fini, donc a des points rationnels sur k. Appliquons alors 1.7 au groupe fondamental de $X \times Y$ en un point (a, b) rationnel sur k : on trouve que tout revêtement étale connexe de $X \times Y$ est isomorphe à un quotient d'un revêtement $X' \times Y'$, où X' et Y' sont des revêtements galoisiens étales de X et Y

de groupes G et G' par un sous-groupe H de $G \times G'$. Cela implique que l'image inverse de ce revêtement de $X \times Y$ sur $X \times Y'$ est isomorphe à un revêtement de la forme $X_1' \times Y'$, où X_1' est un revêtement étale de X. Si donc L est le corps des fonctions de Y, égal au corps des fractions de A dans k', le revêtement étale de $X \otimes_k L$ induit par le revêtement donné de $X \times_k Y$ est tel qu'il existe une extension finie séparable L' de L, telle que l'image inverse dudit revêtement sur $X \otimes_k L'$ est isomorphe à $X_1' \otimes_k L'$. Or k' étant algébriquement clos, on peut supposer que l'extension L' de L est contenue dans k'. Cela prouve que le revêtement étale donné de $X \otimes_k k'$ est isomorphe à $X_1' \otimes_k k'$, cqfd.

267 La forme explicite signalée en passant pour les revêtements étales d'un produit $X \times_k Y$ implique aussitôt le résultat suivant :

Corollaire 1.9 *Soient k un corps algébriquement clos, X et Y deux préschémas localement noethériens sur k, $Z = X \times_k Y$ leur produit, Z' un revêtement étale de Z. Pour tout point $y \in Y$ rationnel sur k, soit $i_y \colon \operatorname{Spec}(k) \to Y$ le morphisme canoniquement associé, $j_y = \mathrm{id}_X \times_k i_y$ le morphisme $X \to Z$ correspondant. Soit enfin X_y' le revêtement étale de X image inverse de Z' par j_y . On suppose Y connexe, et X ou Y propre sur k. Alors les revêtements X_y' de X sont tous isomorphes.*

De façon imagée, on peut dire qu'*une famille de revêtements étales de X, paramétrée par un préschéma connexe Y, est constante si X ou le préschéma de paramètres Y est propre sur k.*

Remarques 1.10 Les corollaires 1.7 à 1.9 sont dûs à Lang-Serre [2] dans le cas des schémas algébriques normaux (leur travail a été la motivation initiale pour la théorie du groupe fondamental développée dans ce Séminaire). Comme l'ont remarqué ces auteurs, ces résultats deviennent inexacts lorsqu'on y abandonne l'hypothèse de propreté, du moins en caractéristique $p > 0$. Prenant par exemple pour X la droite affine $X = \operatorname{Spec}(k[t])$, il n'est pas difficile de voir que les revêtements de X paramétrés par la droite affine $Y = \operatorname{Spec}(k[s])$, définis par les équations

$$x^p - x = st ,$$

sont étales et deux à deux non isomorphes. Cela met en défaut 1.9 et a fortiori 1.7, et on voit même que si s est considéré comme un élément transcendant sur k dans une extension algébriquement close K de k, on trouve un revêtement étale X' de X qui ne provient pas d'un revêtement étale de X.

2 Application du théorème d'existence de faisceaux : théorème de semi-continuité pour les groupes fondamentaux des fibres d'un morphisme propre et séparable

268

Théorème 2.1 *Soient Y le spectre d'un anneau local noethérien* complet, *de corps résiduel* k, *X un Y-schéma propre, $X_0 = X \otimes_A \mathrm{k}$, a_0 un point géométrique de X_0 et a le point géométrique* *correspondant de X. Alors l'homomorphisme canonique $\pi_1(X_0, a_0) \to \pi_1(X, a)$ est un* isomorphisme.

Ce n'est qu'une traduction, dans le langage du groupe fondamental, du résultat rappelé dans (SGA IX.1.10). C'est ici que le théorème d'existence des faisceaux en géométrie algébrico-
part 54 formelle s'introduit de façon essentielle dans la théorie du groupe fondamental.

Introduisons maintenant une clôture algébrique $\bar{k}$ du corps résiduel k, et la fibre géométrique $\overline{X}_0 = X_0 \otimes_k \bar{k}$. On a donc la suite exacte (SGA IX.6.1)

$$e \to \pi_1(\overline{X}_0, \overline{a}_0) \to \pi_1(X_0, a_0) \to \pi_1(k, \bar{k}) \to e.$$

D'autre part on a l'isomorphisme 2.1 et l'isomorphisme analogue, plus élémentaire,

$$\pi_1(k, \bar{k}) \to \pi_1(Y, b),$$

où b est l'image de a dans Y. On trouve ainsi :

Corollaire 2.2 *Avec les notations précédentes, supposons $\overline{X}_0$ connexe, et soient $\overline{a}_0$ un point géométrique de $\overline{X}_0 = X_0 \otimes_k \bar{k}$, a_0 son image dans X, b_0 son image dans Y. Alors la suite d'homomorphismes canoniques suivante*

$$e \to \pi_1(\overline{X}_0, \overline{a}_0) \to \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(Y, b_0) \to e$$

est exacte.

On comparera cette suite à la suite exacte 1.4, mais on notera que a) on n'a pas eu à faire d'hypothèse de platitude, ou de séparabilité sur les fibres, pour $X \to Y$; b) on a le complément important que *le morphisme $\pi_1(\overline{X}_0, \overline{a}) \to \pi_1(X, a_0)$ est injectif.*

269 Ce dernier fait nous permettra de comparer le groupe fondamental des autres fibres géométriques de X sur Y à celui de $\overline{X}_0$. Soit en effet y_1 un point quelconque de Y, X_1 sa fibre et $\overline{X}_1$ sa fibre géométrique, relativement à une extension algébriquement close de $\mathrm{k}(y_1)$, $\overline{a}_1$ un point géométrique de $\overline{X}_1$, a_1 son image dans X et b_1 son image dans Y. Choisissons une "classe de chemins" de a_1 à a_0, d'où une classe de chemins de b_1 à b_0, d'où un diagramme commutatif d'homomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \pi_1(\overline{X_1}, \overline{a_1}) & \to & \pi_1(X, a_1) & \to & \pi_1(Y, b_1) & \to & e \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
e & \to & \pi_1(\overline{X}_0, \overline{a}_0) & \to & \pi_1(X, a_0) & \to & \pi_1(Y, b_0) & \to & e,
\end{array}$$

où les deux flèches verticales écrites sont des isomorphismes. Comme la deuxième ligne est exacte, on trouve donc un homomorphisme canonique, que nous appellerons *l'homomorphisme de spécialisation pour le groupe fondamental* (ne dépendant que de la classe de chemins choisis de a_1 à a_0, donc *défini modulo automorphisme intérieur de* $\pi_1(X, a_0)$) :

$$\pi_1(\overline{X}_1, \overline{a}_1) \to \pi_1(\overline{X}_0, \overline{a}_0) \ .$$

Lorsque la première ligne ci-dessus est également exacte, il s'ensuit aussitôt que l'homomorphisme de spécialisation est surjectif. On trouve donc, compte tenu de 1.4 :

Corollaire 2.3 *Sous les conditions de 2.1, supposons de plus que le morphisme $f: X \to Y$ soit séparable (1.1)) et $\overline{X}_0$ connexe (donc en vertu de 1.2 on a $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_Y$). Alors pour toute fibre géométrique $\overline{X}_1$ de X sur Y, munie d'un point géométrique $\overline{a}_1$, l'homomorphisme de spécialisation défini ci-dessus est un homomorphisme* surjectif.

C'est là un résultat de semi-continuité pour le groupe fondamental, qui ne semble pas encore avoir d'analogue en topologie algébrique. On peut d'ailleurs l'énoncer sous des conditions plus
270 générales :

Corollaire 2.4 *Soient $f: X \to Y$ un morphisme propre à fibres universellement connexes, avec Y localement noethérien, y_0 et y_1 deux points de Y tels que $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$, $\overline{X}_0$ et $\overline{X}_1$ les fibres géométrique de X correspondant à des extensions algébriquement closes données de $\mathrm{k}(y_0)$ et $\mathrm{k}(y_1)$, $\overline{a}_0$ resp. $\overline{a}_1$ un point géométrique de $\overline{X}_0$ resp. $\overline{X}_1$. Alors on peut définir de façon naturelle un homomorphisme de spécialisation :*

$$\pi_1(\overline{X}_1, \overline{a}_1) \to \pi_1(\overline{X}_0, \overline{a}_0)$$

défini à automorphisme intérieur près, et c'est là un homomorphisme surjectif *si f est un morphisme séparable.*

En effet, il résulte d'abord de 1.8 que 2.4 est essentiellement indépendant de extensions algébriquement closes choisies pour les corps résiduels $\mathrm{k}(y_0)$ et $\mathrm{k}(y_1)$. Cela nous permet de remplacer Y par un schéma Y' sur Y ayant un point y_0' (resp. y_1') au-dessus de y_0 (resp. y_1). On prendra alors pour Y' le spectre du complété de l'anneau local de y_0 dans Y, et on applique 2.3.

Remarques 2.5 La conclusion finale de 2.4 sur la surjectivité de l'homomorphisme de spécialisation, et a fortiori les résultats 1.3 et 1.4 dont elle est une conséquence, devient inexacte si on ne suppose plus que $f: X \to Y$ est un morphisme séparable, même pour des schémas projectifs sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Nous en verrons plus loin des exemples, tant dans le cas où f est plat mais où f admet une fibre non séparable (X et Y étant cependant lisss sur k), que dans le cas où les fibres de f sont bien séparables mais où f n'est pas plat (par exemple $f: X \to Y$ étant un morphisme birationnel de schémas intègres normaux), cf. XI 3. Dans ces exemples, il peut arriver que le groupe fondamental de la fibre géométrique générique soit nul, mais non celui d'une fibre géométrique spéciale convenable. D'autre part, même si $f: X \to Y$ est un morphisme propre séparable comme dans 2.4, il arrive couramment que le morphisme
271 de spécialisation ne soit pas un isomorphisme. Ainsi, il est facile de donner des exemples où $\overline{X}_1$ est une courbe elliptique non singulière (donc son groupe fondamental est commutatif, et sa composante ℓ-primaire pour un nombre premier ℓ premier à la caractéristique est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell^2$, cf. XI), tandis que $\overline{X}_0$ est formé, soit de deux courbes rationnelles non singulières se coupant en deux points, soit de deux courbes rationnelles tangentes en un point, soit enfin d'une courbe rationnelle ayant un point singulier qui est un point de rebroussement (pour la classification complète des courbes elliptiques dégénérées, voir les travaux récents de Kodaira [1] et Néron). On voit alors que dans ces cas, le groupe fondamental de $\overline{X}_0$ est respectivement $\hat{\mathbb{Z}}$, e, e, donc "strictement plus petit" que celui de $\overline{X}_1$. Nous verrons cependant plus loin, lorsque f est un

morphisme lisse, une majoration du noyau de l'homomorphisme de spécialisation, qui implique en particulier que si $\mathrm{k}(y_0)$ est de *caractéristique* 0, l'homomorphisme de spécialisation est un isomorphisme. Mais même pour un morphisme lisse, si la caractéristique de $\mathrm{k}(y_0)$ est ¿0, il peut arriver que l'homomorphisme de spécialisation ne soit pas un isomorphisme, comme on voit par exemple dans le cas où X est un schéma abélien sur Y (de dimension relative 1, si on veut), cf. XI 2. Une théorie satisfaisante de la spécialisation du groupe fondamental doit tenir compte de la "composante continue" du "vrai" groupe fondamental, correspondant à la classification des revêtements principaux de groupe structural des groupes infinitésimaux ; moyennant quoi on serait en droit à s'attendre que les "vrais" groupes fondamentaux des fibres géométriques d'un morphisme lisse et propre $f \colon X \to Y$ forment un joli système local sur X, limite projective de schémas en groupes finis et plats sur X[2]. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point de vue, notre objet présent étant au contraire de pousser aussi loin que possible les phénomènes communs à la théorie topologique et la théorie schématique du groupe fondamental.

Soit maintenant X_0 une courbe propre, lisse et connexe de genre g sur un corps algébriquement clos k. Si k est de caractéristique zéro, son groupe fondamental peut se déterminer par voie transcendante de la façon suivante. On sait que X_0 provient par extension de la base d'une
272 courbe définie sur une extension algébriquement close de degré de transcendance fini du corps premier $\mathbb{Q}$, et compte tenu de 1.8, on peut supposer que k est lui-même de degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$. On peut donc supposer que k est un sous-corps du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et une nouvelle application de 1.8 nous permet de supposer que $k = \mathbb{C}$. Il n'est pas difficile alors de vérifier que le groupe fondamental de X est isomorphe au compactifié du groupe fondamental de l'espace topologique associé $\tilde{X}$ (surface compacte orientée de genre g), pour la topologie définie par les sous-groupes d'indice fini[3]. Il est d'autre part classique que le groupe fondamental topologique est engendré par $2g$ générateurs s_i, t_i ($1 \leq i \leq g$), soumis à une seule relation :

$$(s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1}) \ldots (s_g t_g s_g^{-1} t_g^{-1}) = 1.$$

Donc le groupe fondamental de X admet $2g$ générateurs *topologiques* s_i, t_i ($1 \leq i \leq g$), liés par la seule relation précédente. Si maintenant la caractéristique de k est $p > 0$, désignons par A l'anneau des vecteurs de Witt construit avec k, par K une extension algébriquement close de son corps des fractions. On a vu dans (SGA III.7.4) qu'il existe un schéma X sur $Y = \mathrm{Spec}(A)$, propre et lisse sur Y, se réduisant suivant X_0 . Appliquons-lui 2.3, on trouve un morphisme *surjectif*

$$\pi_1(X_1) \to \pi_1(X_0),$$

où $X_1 = X \otimes_k K$. Il est immédiat[4] que X_1 est lisse sur K, connexe (1.2), de dimension 1, et son genre est égal à g (d'après l'invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré, cf. EGA III 7). Comme K est de caractéristique 0, on peut lui appliquer le résultat précédent. On a ainsi prouvé par *voie transcendante* :

[2]Cette conjecture extrêmement séduisante est malheureusement mise en défaut par un exemple inédit de M. Artin déjà lorsque les fibres de f sont des courbes algébriques de genre donné $g \geq 2$.

[3]Cette déduction était explicitée dans un des exposés oraux qui n'ont pas été rédigés

[4]cf. EGA IV 12.2

273 **Théorème 2.6** *Soit X_0 une courbe algébrique lisse, propre et connexe sur un corps algébriquement clos k, et soit g son genre. Alors $\pi_1(X_0)$ admet un système de $2g$ générateurs topologiques liés par la relation écrite plus haut. Lorsque la caractéristique de k est 0, $\pi_1(X_0)$ est même le groupe de type galoisien libre pour les générateurs et la relation qui précèdent.*

Remarques 2.7 Il n'existe pas à l'heure actuelle, à la connaissance du rédacteur, de démonstration par voie purement algébrique du résultat précédent (sauf pour les genres $0, 1$). Pour commencer, on ne voit guère comment distinguer dans $\pi_1(X_0)$ $2g$ éléments, dont on pourrait attendre ensuite qu'ils forment un système de générateurs topologiques. À cet égard, la situation de la droite rationnelle privée de n points, et l'étude des revêtements d'icelle modérément ramifiés en ces points, est plus sympathique, puisque la considération des groupes de ramification en ces n points fournit n éléments du groupe fondamental, comme nous verrons ultérieurement[5]. Mais même dans ce cas particulièrement concret, il ne semble pas exister de démonstration purement algébrique. Une telle démonstration serait évidemment extrêmement intéressante. Le seul fait concernant le groupe fondamental d'une courbe qu'on sache démontrer par voie purement algébrique (exception faite du théorème de finitude faible 2.12 ci-dessous, prouvé par voie algébrique par Lang-Serre [2]), semble la détermination du groupe fondamental rendu abélien via la jacobienne (signalée dans SGA IX.5.8 dernière ligne).

2.8 La dernière assertion 2.6 n'est plus valable en caractéristique $p > 0$, comme on voit déjà dans le cas des courbes elliptiques. Comme nous l'avons déjà signalé, nous ne savons pas si le
part 55 groupe fondamental de X_0 est topologiquement de présentation finie.

Théorème 2.9 *Soient k un corps algébriquement clos, et X un schéma propre et connexe sur k. Alors le groupe fondamental de X est topologiquement de génération finie.*

274 Nous procéderons par récurrence sur $n = \dim X$, l'assertion étant triviale pour $n \leq 0$. Supposons donc $n > 0$, et le théorème démontré pour les dimensions $n' < n$. D'après le lemme de Chow (EGA II 5.6.2) il existe un schéma projectif X' sur k et un morphisme surjectif $X' \to X$. On peut évidemment supposer X' réduit, et en passant au normalisé, normal. Grâce à la théorie de la descente, il suffit de prouver que les groupes fondamentaux des composantes connexes de X' sont topologiquement de génération finie (SGA IX.5.2). Cela nous ramène donc au cas où X' est *projectif* et *normal*. Si alors $n = 1$, il suffit d'appliquer 2.6. Si $n \geq 2$, on considère une immersion projective $X \to \mathbb{P}^r_k$, et une section hyperplane $Y = X \cdot H$ (muni de la structure réduite induite), telle que $Y \neq X$ i.e. $H \not\supset X$. On aura alors $\dim Y < n$, et tenant compte de l'hypothèse de récurrence, il suffit de prouver que $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ est *surjectif.* Or plus généralement :

Lemme 2.10 *Soient X un préschéma propre sur un corps algébriquement clos k, $g\colon X \to \mathbb{P}^r_k$ un morphisme. On suppose X irréductible et normal et $\dim g(X) \geq 2$. Soient H un hyperplan de $\mathbb{P}^r_k$ et $Y = X \times_{\mathbb{P}^r_k} H$. Alors Y est connexe, et l'homomorphisme $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ est surjectif.*

[5]Cf. Exp. XII. Encore ces éléments ne sont-ils déterminés vraiment que modulo conjugaison, et il convient de faire un choix *simultané* judicieux de ces éléments dans leurs classes

Ces assertions résultent en effet de la suivante :

Corollaire 2.11 *Sous les conditions précédentes, soient X' un revêtement étale connexe de X, et $Y' = X' \times_X Y = X' \times_{\mathbb{P}^r_k} H$ le revêtement induit sur Y. Alors Y' est connexe.*

Comme X est normal, X' est normal, donc étant connexe, X' est irréductible ; de plus son image dans $\mathbb{P}^r_k$ est de dimension ≥ 2. Un lemme bien connu dû à Zariski (et appelé "*théorème de Bertini*") implique donc que si H'_1 est l'hyperplan générique dans $\mathbb{P}^r_k$, défini sur une extension K de k, alors $X' \times_{\mathbb{P}^r} H_1$ est universellement irréductible donc universellement connexe sur K. Le théorème de connexion de Zariski (EGA III 4) implique alors que pour *tout* hyperplan H (défini sur une extension quelconque de k) $X' \times_{\mathbb{P}^r} H$ est universellement connexe. Cela achève
275 la démonstration de 2.11, donc de 2.9.

Corollaire 2.12 (Lang-Serre). *Sous les conditions de 2.9, pour tout groupe fini G, l'ensemble des classes, à isomorphisme près, de revêtements principaux de X de groupe G, est fini.*

Remarque 2.13 Sous les conditions de 2.10 nous prouverons lorsque $\dim g(X) \geq 3$ (du moins lorsque g est une immersion de X régulier), un résultat plus précis, connu en géopétrie algébrique sous le nom de "*théorème de Lefschetz*" : $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ *est un isomorphisme.*[6] Il y a dans les cas classiques des énoncés analogues pour les groupes d'homologie et les groupes d'homotopie supérieure, qui tôt ou tard devront être englobés dans la géométrie algébrique abstraite. Même pour la cohomologie de Hodge $\mathrm{H}^p(X, \Omega^q)$, il ne semble pas que la question ait encore été étudiée ; il n'est d'ailleurs guère probable que pour cette dernière, les théorèmes de Lefschetz subsistent tels quels en caractéristique $p > 0$.

3 Application du théorème de pureté : théorème de continuité pour les groupes fondamentaux des fibres d'un morphisme propre et lisse

Rappelons sans démonstration le

Théorème 3.1 (de pureté) *(Zariski-Nagata)*[7] *Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-fini et dominant de préschémas intègres, avec X normal, Y régulier localement noethérien, et soit Z l'ensemble des points de X où f n'est pas étale, i.e. où f est ramifié (cela revient au même, SGA I.9.5 (ii)). Si $Z \neq X$, Z est de codimension 1 dans X en tous ses points, i.e. pour toute composante irréductible Z' de Z de point générique z, la dimension de Krull de $\mathscr{O}_{X,z}$ est égale à 1.*

[6]Cf. le séminaire SGA 2 (1962) faisant suite à celui-ci.
[7]Pour une démonstration, cf. SGA 2 X 3.4.

Rappelons qu'un préschéma est dit *normal* resp. *régulier* si ses anneaux locaux sont normaux resp. réguliers, et que la relation $Z \neq X$ signifie aussi que l'extension finie $R(Z)/R(X)$ (où R désigne le corps des fonctions rationnelles) est *séparable*. Se plaçant en le point générique z
276 d'une composante Z' de Z, et localisant en le point y de Y en-dessous de z, on trouve l'énoncé équivalent :

Corollaire 3.2 *Soient A un anneau local noethérien régulier, $A \to B$ un homomorphisme local injectif tel que B soit normal, localisé d'une algèbre de type fini sur A, et* quasi-fini *sur A ; on suppose de plus que $\dim A(= \dim B) \geq 2$, et que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de B distinct de l'idéal maximal, B est étale sur A en $\mathfrak{p}$, i.e. $B_{\mathfrak{p}}$ est étale sur $A_{\mathfrak{q}}$ (où $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{p}$). Alors B est étale sur A.*

D'ailleurs, il n'est pas difficile de réduire ce dernier énoncé au cas où A est un anneau local *complet*, donc où B est *fini* sur A. Zariski [5] donne une démonstration simple de ce résultat, valable dans le cas d'égales caractéristiques ; le cas général est dû à Nagata [3], qui s'appuie sur un résultat délicat de Chow ; ce dernier n'a été vérifié par aucun des participants du Séminaire, et devrait faire l'objet d'un exposé ultérieur. Signalons seulement ici la démonstration très simple dans le cas particulier où $\dim A = 2$, qui est suffisant pour l'application la plus importante que nous en ferons dans le présent numéro. Comme B est normal, il est un B-module de profondeur (ancienne terminologie : codimension cohomologique) ≥ 2, donc c'est un A-module de profondeur (ancienne terminologie : codimension cohomologique) ≥ 2, et comme A est régulier de dimension 2, il en résulte que B est un *module libre* sur A[8]. Il résulte alors de (SGA I.4.10) que l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de A en lesquels B est ramifié sur A est la partie de $\operatorname{Spec}(A)$ définie par un idéal principal (engendré par le discriminant d'une base de B sur A), donc est vide si elle est contenue dans le point fermé de $\operatorname{Spec}(A)$, ce qui prouve 3.2 lorsque $\dim A = 2$.

Nous utiliserons surtout 3.1 sous la forme équivalente :

Corollaire 3.3 *Soient X un préschéma localement noethérien, U une partie ouverte de X complémentaire d'une partie fermée Z de X de codimension ≥ 2. Alors le foncteur $X' \mapsto X' \times_X U$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de U est une*
277 *équivalence de catégories ; en particulier, si a est un point géométrique de U, l'homomorphisme canonique $\pi_1(U, a) \to \pi_1(X, a)$ est un isomorphisme.*

La dernière assertion est évidemment conséquence de la première, et pour celle-ci on peut évidemment supposer que X est connexe donc irréductible. De la normalité de X résulte déjà que le foncteur $X' \mapsto X' \times_X U$ de la catégorie des revêtements localement libres (pas nécessairement étales) de X' dans la catégorie des revêtements de U est pleinement fidèle, car le foncteur $\mathscr{E} \mapsto \mathscr{E}|U$ de la catégorie des Modules localement libres sur X dans la catégorie des Modules localement libres sur U l'est. Il reste donc à prouver que pour tout revêtement *étale* U' de U, il existe un revêtement étale X' de X (nécessairement unique d'après ce qui précède), tel que U' soit isomorphe à $X' \times_X U$. On peut évidemment supposer U' connexe, donc irréductible puisque

[8]Cf. EGA 0_{IV} 17.3.4

(U étant normal) U' est normal. Soit K le corps des fonctions rationnelles sur X, ou sur U (c'est pareil), K' celui de U' ; alors U' s'identifie au normalisé de U dans K' (SGA I.10.3). Soit X' le normalisé de X dans K' (EGA II 6.3), alors $X' = X \times_X U \cong U'$, d'autre part X' est normal, intègre, le morphisme structural $f\colon X' \to X$ est *fini* et dominant (car X est normal et K'/K est une extension finie séparable). Il est étale dans $U' = f^{-1}(U) = X' = f^{-1}(Z)$, et comme Z est de codimension ≥ 2 dans X, $f^{-1}(Z)$ est de codimension ≥ 2 dans X'. On conclut alors de 3.1 que X' est étale sur X, ce qui achève la démonstration.

Soit maintenant $f\colon X \to Y$ une application rationnelle d'un préschéma localement noethérien et régulier X dans un préschéma Y, et supposons que f soit défini dans un ouvert U complémentaire d'une partie fermée de codimension ≥ 2. Alors on déduit de 3.3 un foncteur, défini à isomorphisme près, de la catégorie des revêtements étales de Y dans la catégorie des revêtements étales de X, d'où pour tout point géométrique a de U, d'image b dans Y, un homomorphisme canonique

$$\pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, b)$$

278 (déduit de l'homomorphisme canonique $\pi_1(U, a) \to \pi_1(Y, b)$ grâce à l'isomorphisme

$$\pi_1(U, a) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, a).$$

Lorsque f est un morphisme dominant, X et Y étant intègres de corps K et L, de sorte que K est une extension de L, et que Y est normal, ces correspondances se précisent en termes d'extensions de corps en notant que pour toute extension finie L' de L, non ramifiée sur Y, l'algèbre $K' = L' \otimes_L K$ sur K est non ramifiée sur X.

En particulier, ces réflexions montrent que le groupe fondamental des préschémas localement noethériens connexes réguliers, ponctués par des points géométriques localisés en codimension ≤ 1, est un *foncteur* lorsque l'on prend comme morphismes dans cette catégorie les applications rationnelles dominantes définies dans des complémentaires de parties fermées de codimension ≥ 2. Se rappelant par exemple qu'une application rationnelle d'un schéma normal sur un corps k dans un schéma propre sur k est définie dans le complémentaire d'un ensemble de codimension ≥ 2, on trouve :

Corollaire 3.4 *(Invariance birationnelle du groupe fondamental) Soient k un corps, X et Y deux schémas propres sur k et réguliers, $f\colon X \to Y$ une application birationnelle de X dans Y, Ω une extension algébriquement close du corps des fonctions K de X, permettant de définir le groupe fondamental de X et le groupe fondamental de Y. Ces derniers sont alors canoniquement isomorphes.*

Cela signifie aussi que pour une extension finie K' de K, si elle est non ramifiée sur un
part 56 "modèle" propre non singulier X de K, elle l'est sur tout autre modèle propre non singulier.

Remarque 3.5 Pour d'autre applications du théorème de pureté, voir les travaux de Abhyankar exposés dans [4], inspirés par les résultats de Zariski [6 chap. VIII], démontrés par voie topologique. Ces derniers sont loin d'avoir été assimilés par la géométrie algébrique "abstraite" et méritent de nouveaux efforts.

279 Nous aurons besoin de quelques faits élémentaires de la théorie de la ramification. Soient V un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, corps résiduel k, L une extension galoisienne de K de groupe G, V' le normalisé de V dans L, qui est un module libre de rang $n = [L\colon K]$ sur V, $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal de V', G_d le sous-groupe de G formé des éléments laissant $\mathfrak{m}'$ invariant, de sorte que G_d opère dans l'extension résiduelle $k' = V'/\mathfrak{m}'$ de k, et G_i le sous-groupe des éléments de G_d opérant trivialement (rappelons que G_d et G_i sont appelés respectivement sous-groupes de *décomposition* et d'*inertie* de G). On dit que L est *modérément ramifié* sur V si $n_i = [G_i\colon e]$ est d'ordre p premier à la caractéristique de k (condition toujours vérifiée si k est de caractéristique 0). Il est bien connu que G_i se plonge alors canoniquement dans le groupe k'^*, donc est isomorphe au groupe des racines n-ièmes de l'unité dans k'^*, ce qui implique en particulier que G_i *est cyclique*. Le cas type de cette situation est celui où on pose $L = K[t]/(t^n - u)$, u étant une uniformisante de V et n un entier premier à p : si K contient les racines n-ièmes de l'unité, L est une extension galoisienne totalement ramifiée de K, de groupe de Galois $G = G_i$ isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Lemme 3.6 *(Lemme de Abhyankar). Soit V un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, L et K' deux extensions galoisiennes de K* modérément ramifiées *sur V, n et m les ordres des groupes d'inertie correspondants, L' une extension composée de L et K' sur K. Si m est un multiple de n, alors L' est non ramifiée sur les localisés de la clôture normale V' de V dans K'.*

Soient en effet W' le normalisé de V' dans L', $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal de V', $\mathfrak{n}'$ un idéal maximal de W' au-dessus de $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal qu'il induit sur le normalisé W de V dans L, $G,\ H,\ M$ les groupes de Galois de $L,\ K',\ L'$ sur K, et $G_i,\ H_i,\ L'_i$ les groupes d'inertie correspondant aux idéaux maximaux choisis. Alors M se plonge dans le produit $G \times H$ et M_i dans le produit
280 $G_i \times H_i$, de sorte que les projections $M \to G$ et $M \to H$, $M_i \to G_i$ et $M_i \to H_i$ soient surjectives (sorite du corps intermédiaire). Il en résulte déjà, puisque G_i et H_i sont par hypothèse cycliques d'ordres m et n premiers à p, que M_i est d'ordre premier à p, donc cyclique, et comme m est multiple de n donc les éléments de $G_i \times H_i$ sont de puissance m-ième nulle, M_i est d'ordre divisant m, donc d'ordre égal à m puisque $M_i \to H_i$ est surjectif. Ce dernier homomorphisme est donc également injectif. Or son noyau est le groupe d'inertie de $\mathfrak{n}'$ au-dessus de $\mathfrak{m}'$, ce qui prouve que L' est non ramifié sur K' en $\mathfrak{n}'$. D'où le lemme.

Plaçons-nous maintenant sous les conditions de 2.4, où on a un homomorphisme de spécialisation

$$\pi_1(\overline{X}_1, \overline{A}_1) \to \pi_1(\overline{X}_0, \overline{a}_0)$$

qui est *surjectif*, relativement à un morphisme propre et séparable $f\colon X \to Y$. Nous voulons préciser le noyau de cet homomorphisme. Procédant comme dans la démonstration de 2.4, on voit que dans cette question, on peut toujours supposer que Y est le spectre d'un *anneau de valuation discrète V, complet et à corps résiduel algébriquement clos* (car on peut toujours trouver un tel anneau et un morphisme de son spectre Y' dans Y dont l'image soit $\{y_0, y_1\}$). Alors on a $X_0 = \overline{X}_0$, $\mathrm{k}(y_0) = k =$ corps résiduel de V, $\mathrm{k}(y_1) = K =$ corps des fractions de V. Soit K_s la clôture séparable de K, $\overline{K}$ sa clôture algébrique, et pour tout sous-anneau W de $\overline{K}$

contenant V, posons $X_W = X \otimes_V W$. En particulier on a

$$X_V = V, \qquad X_K = X_1, \qquad X_{\overline{K}} = \overline{X}_1.$$

D'ailleurs le morphisme canonique $\overline{X}_1 = X_{\overline{K}} \to X_{K_s}$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux (SGA IX 4.11) de sorte que, compte tenu de l'isomorphisme 2.1 $\pi_1(X_0) \to \pi_1(X)$, on est ramené à étudier l'homomorphisme surjectif

$$\pi_1(X_{K_s}) \to \pi_1(X)$$

281 associé au morphisme canonique $X_{K_s} \to X$. La détermination du noyau de ce dernier revient à la solution du problème suivant : *on a un revêtement principal connexe Z_{K_s} de X_{K_s}, de groupe G* (donc associé à un homomorphisme de $\pi_1(X_{K_s})$ dans G), *déterminer sous quelles conditions il est isomorphe à l'image réciproque d'un revêtement principal Z de X de groupe G.*

Notons d'abord que K_s est réunion filtrante croissante de ses sous-extensions de type fini K' sur K, et que par suite, Z_{K_s} est isomorphe à l'image inverse d'un revêtement principal $Z_{K'}$ de $X_{K'}$ pour un K' convenable (on fera attention cependant que pour K' fixé, $Z_{K'}$ n'est pas déterminé de façon unique). Dire que Z_{K_s} est isomorphe à l'image inverse d'un revêtement principal Z de X signifie qu'il existe une sous-extension finie $K'' \supseteq K'$ de K_s telle que $Z_{K''} = Z_{K'} \otimes_{K'} K''$ est isomorphe à $Z \otimes_V K''$. Désignons maintenant pour une sous-extension finie K' de K_s, par V' le normalisé de V dans K', qui est un anneau de valuation discrète, complet, de corps résidueL k. Donc le morphisme canonique $X_{V'} \to X_V$ induit un isomorphisme pour les fibres au-dessus des points fermés de $Y = \operatorname{Spec}(V)$ et $Y' = \operatorname{Spec}(V')$ et il résulte alors de 2.1 appliqué à X_V et $X_{V'}$ que l'homomorphisme induit pour les groupes fondamentaux $\pi_1(X_{V'}) \to \pi_1(X_V)$ est un isomorphisme, ou encore que tout revêtement principal de $X_{V'}$ est l'image inverse d'un revêtement principal de X_V déterminé à isomorphisme près. Cela implique donc le

Lemme 3.7 *Soit $Z_{K'}$ un revêtement principal connexe de $X_{K'}$ de groupe G, Z_K son image inverse sur X_{K_s}. Pour que ce dernier soit isomorphe à l'image inverse d'un revêtement principal Z de X, il faut et il suffit qu'il existe une extension finie $K'' \supseteq K'$ de K dans K_s telle que le revêtement principal $Z_{K''}$ de $X_{K''}$ soit induit par un revêtement principal de $X_{V''}$.*

Supposons en particulier que les $X_{V''}$ soient normaux (il suffit par exemple pour cela que
282 X_0 soit normal, et a fortiori que X_0 soit simple, cf. SGA I.9.1). Comme ils sont connexes, ils sont irréductibles. Soient L le corps des fonctions rationnelles pour X et X_K, L' celui pour $X_{V'}$ et $X_{K'}$, L'' celui pour $X_{V''}$ et $X_{K''}$. Alors sous les conditions de 3.7, $Z_{K'}$ définit une extension finie séparable R' de L', et $Z_{K''}$ définit l'extension $R'' = R' \otimes_{L'} L'' = R' \otimes_{K'} K''$. La condition envisagée dans 3.7 signifie donc aussi qu'il existe une extension finie séparable K'' de K' telle que $R'' = R' \otimes_{K'} K''$ soit *non ramifée* au-dessus du schéma normal $X_{V''}$ de corps $L'' = L' \otimes_{K'} K''$, et non seulement au-dessus de la partie ouverte $X_{K''}$ de $X_{V''}$.

Nous supposons dorénavant que $f \colon X \to Y$ est un morphisme *lisse,* donc les morphismes $X_{V'} \to \operatorname{Spec}(V')$ sont lisses, donc les schémas $X_{V'}$ sont *réguliers.* Noter que la fibre du point fermé de $\operatorname{Spec}(V')$ dans $X_{V'}$ est irréductible et de codimension 1. Soit $\mathfrak{o}'$ son anneau local, qui est donc un anneau de valuation discrète de corps L' , de corps résiduel isomorphe au corps des fonctions rationnelles de X_0 , donc ayant même caractéristique que k. Définissons de même $\mathfrak{o}''$ dans L'' , qui est évidemment le normalisé de $\mathfrak{o}'$ dans L''. Il résulte alors du théorème de pureté 3.1 ou 3.3 que pour que R'' soit non ramifié sur $X_{V''}$, il faut et il suffit que R'' soit non ramifié sur $\mathfrak{o}''$, normalisé de $\mathfrak{o}'$ dans L''.

Notons maintenant que si u' est une uniformisante de V', c'est aussi une uniformisante de $\mathfrak{o}'$. Si alors n est un entier premier à la caractéristique p de k, et si on prend $K'' = K'[t]/(t^n - u)$, alors K'' est une extension galoisienne finie de K' et L'' est isomorphe à $L'[t]/(t^n - u')$, donc est modérément ramifié sur $\mathfrak{o}'$ et de groupe d'inertie d'ordre n. Supposons alors *G d'ordre premier à p,* ce qui implique que R' est modérément ramifié sur $\mathfrak{o}'$, et prenons pour n un multiple premier à p de l'ordre du groupe d'inertie de R' sur $\mathfrak{o}'$ (par exemple $n = [G\colon e]$). Appliquant le lemme de Abhyankar 3.6, on voit que la condition envisagée dans 3.7 est vérifiée.

Cela prouve le théorème suivant :

283 **Théorème 3.8** *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme propre et lisse, à fibres géométriquement connexes, avec Y localement noethérien, y_0 et y_1 deux points de Y tels que $y_0 \in \overline{y_1}$, X_0 et X_1 les fibres géométriques correspondantes ; considérons l'homomorphisme de spécialisation 2.4 $\pi_1(\overline{X}_1) \to \pi_1(\overline{X}_0)$. Cet homomorphisme est surjectif, et tout homomorphisme continu de $\pi_1(\overline{X}_1)$ dans un groupe fini G d'ordre premier à la caractéristique p de $\mathrm{k}(y_0)$ provient d'un homomorphisme de $\pi_1(X_0)$ dans G.*

En d'autres termes :

Corollaire 3.9 *Si $\mathrm{k}(y_0)$ est de caractéristique nulle, alors l'homomorphisme de spécialisation est un isomorphisme. Si $p > 0$, alors le noyau de l'homomorphisme de spécialisation est contenu dans l'intersection des noyaux des homomorphismes continus de $\pi_1(\overline{X}_1)$ dans des groupes finis d'ordre premier à p (ou encore, le sous-groupe invariant fermé engendré par un p-sous-groupe de Sylow du groupe de type galoisien $\pi_1(\overline{X}_1)$) ; si donc $\pi_1(\overline{X}_1)^{(p)}$ désigne le groupe quotient de $\pi_1(\overline{X}_1)$ par le sous-groupe fermé précédent, et si on définit de même $\pi_1(\overline{X}_0)^{(p)}$, alors l'homomorphisme de spécialisation induit un* isomorphisme

$$\pi_1(\overline{X}_1)^{(p)} \to \pi_1(\overline{X}_0)^{(p)}$$

On notera que la démonstration de 3.8 est purement algébrique. Procédant comme dans 2.6, on en conclut *par voie transcendante :*

Corollaire 3.10 *Soit X_0 une courbe propre, lisse et connexe de genre g sur un corps algébriquement clos de caractéristique p. Avec la notation introduite dans 3.9, le groupe $\pi_1(X_0)^{(p)}$ est isomorphe à $\Gamma^{(p)}$, où Γ est le groupe de type galoisien engendré par des générateurs $s_i,\ t_i$ $(1 \leq i \leq g)$ liés par la relation*

$$(s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1}) \ldots (s_g t_g s_g^{-1} t_g^{-1}) = 1$$

part 57

284

Remarques 3.11 Dans le cas où $\mathrm{k}(y_0)$ est de caractéristique nulle, le résultat 3.9 est bien connu par voie transcendante. On notera que la démonstration de 3.10 fait appel au théorème de pureté dans le cas d'inégales caractéristiques, mais dans le cas d'anneaux de dimension 2 seulement, où la démonstration dudit théorème est facile et a été rappelée dans le texte.

4 Bibliographie

[1] K. Kodaira, On compact analytic surfaces, Princeton University Press, 1960.

[2] S. Lang et J.P. Serre, Sur les revêtements non ramifiés des variétés algébriques, Amer. Journ. of Math., pp. 319–330, 1957.

[3] M. Nagata, On the purity of branch loci in regular local rings, Illinois Journal of Math., p. 328–333, 1959.

[4] J.P. Serre, Revêtements ramifiés du plan projectif (d'après S. Abhyankar), Séminaire Bourbaki, Mai 1960.

[5] O. Zariski, On the purity of the branch locus of algebraic functions, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, t. 44, p. 791–796, 1958.

[6] O. Zariski, Algebraic surfaces, Ergebnisse…1948, Chelsea (New York).

Exposé XI

Exemples et compléments

285

1 Espaces projectifs, variétés unirationnelles

Proposition 1.1 *Soient k un corps algébriquement clos, $X = \mathbb{P}_k^r$ l'espace prectif de dimension r sur k. Alors X est* simplement connexe, *i.e.* $\pi_1(X) = 0$.

Pour $r = 0$, c'est trivial. Si $r = 1$, il faut montrer que si X' est un revêtement étale connexe non vide de $X = \mathbb{P}_k^1$, alors $X' \xrightarrow{\sim} X$. La formule du genre nos donne ici, si g et g' sont les genres de X et X' :

$$1 - g' = d(1 - g) ,$$

où d est le degré de X' sur X. Comme $g = 0$, on aura donc $1 - g' = d$, ce qui exige $d = 1$ puisque $g' = 0$, ce qui prouve $X' \xrightarrow{\sim} X$. Lorsque $f \geq 2$, on procède par récurrence sur r, en supposant que $\mathbb{P}^{r'}$ est simplement connexe pour $r' < r$. Appliquant ceci à un hyperplan de $\mathbb{P}^r$ et utilisant (SGA X.2.10), il en résulte bien que $\mathbb{P}^r$ est simplement connexe. Autre démonstration : on aura $\pi_1(\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 = \pi_1(\mathbb{P}^1) \times \cdots \times \pi_1(\mathbb{P}^1)$ en vertu de (SGA X.1.7), donc $(\mathbb{P}^1)^r$ est simplement connexe puisque $\mathbb{P}^1$ l'est, donc $\mathbb{P}^r$ est simplement connexe en vertu de l'invariance birationnelle du groupe fondamental (SGA X.3.4). Cette démonstration montre plus généralement :

Corollaire 1.2 *Soit X un schéma propre et normal sur un corps algébriquement clos k ; si X est une variété rationnelle, i.e. intègre et son corps des fonctions est une extension transcendante pure de k, alors X est simplement connexe.*

286 Ce résultat s'applique en particuler aux variétés grassmanniennes et plus généralement aux variétés G/H, où G est un groupe linéaire connexe sur k et H un sous-groupe algébrique contenant un sous-groupe de Borel de G.

Rappelons qu'on appelle variété *unirationnelle sur* k un schéma propre et intègre sur k dont le corps des fonctions K est contenu dans une extension transcendante pure K' de k, finie sur K (i.e. ayant même degré de transcendance sur k que K), i.e. s'il existe une application rationnelle dominante $f\colon \mathbb{P}^r_k \to X$, avec $r = \dim X$. Si X est normale, on voit donc par les réflexions précédant (SGA X.3.4) que pour tout revêtement étale connexe X' de X, de corps L/K, l'algèbre $L \otimes_K K'$ sur K' est non ramifiée sur le modèle $\mathbb{P}^r$, donc complètement décomposée en vertu de 1.1 ce qui montre que L est K-isomorphe à une sous-extension de K'/K. Cela prouve donc, compte tenu de (SGA V.8.2) :

Corollaire 1.3 *Le group fondamental d'une variété unirationnelle normale sur un corps algébriquement clos, est fini.*

(N.B. On notera que dans la définition de "unirationnelle", on n'avait pas besoin que K'/K soit finie).

Remarques 1.4 Bien entendu, les résultats de ce numéro sont bien connus. D'autre part, J.P. Serre a montré [10] que lorsque X est une variété projective unirationnelle lisse sur un corps algébriquement clos de *caractéristique nulle,* X est simplement connexe. Sa démonstration est transcendante en ce qu'elle utilise le théorème de symétrie de Hodge, et qu'on ignore si ce résultat s'étend à la caractéristique $p > 0$. Il semble d'ailleurs qu'on ne connaisse pas d'exemple de variété unirationnelle lisse sur k qui ne soit déjà rationnelle.

2 Variétés abéliennes

Soient k un corps algébriquement clos, A une variété abélienne sur k, i.e. un schéma en groupes sur k, propre sur k, lisse sur k, et connexe, enfin G un schéma en groupes commutatifs de type fini sur k. Désignons par $\mathrm{Ext}(A, G)$ le groupe des classes d'extensions commutatives de A par G, par $\mathrm{H}^1(A, G)$ le groupe des classes de fibrés principaux sur A de groupe G (comparer N° 4 plus bas), et considérons l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}(A, G) \to \mathrm{H}^1(A, G) .$$

287 Un raisonnement de Serre [5, chap. VII, th. 5] montre que c'est un homomorphisme injectif, qui a pour image l'ensemble des "éléments primitifs" de $\mathrm{H}^1(A, G)$, i.e. des éléments ξ pour lesquels on a :

$$\pi^*(\xi) = \mathrm{pr}_1^*(\xi) + \mathrm{pr}_2^*(\xi) ,$$

où pr_i sont les deux projections de $A \times A$ sur A, et $\pi\colon A \times A \to A$ la loi de composition de A (N.B. Serre n'énonce son théorème que pour G linéaire et connexe, et bien entendu lisse sur k, mais en simplifiant la première partie de son raisonnement, on voit que ces restrictions sont inutiles : il suffit de noter que tout morphisme de A dans un schéma en groupes E de type fini sur k, qui transforme unité en unité, est un homomorphisme de groupes, et d'apopliquer ceci aux section au-dessus de A d'une extension E de A par G).

Nous allons appliquer ce résultat au cas où G est un groupe fini séparable sur k, i.e. un groupe fini ordinaire, supposé commutatif. Utilisant alors $\pi_1(A \times A) \xrightarrow{\sim} \pi_1(A) \times \pi_1(A)$ (SGA X.1.7) et interprétant $\mathrm{H}^1(X, G)$ comme $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)$ pour tout schéma algébrique X, en particulier pour $X = A$ ou $X = A \times A$, on voit que toute classe de $\mathrm{H}^1(A, G)$ est primitive, donc on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}(A, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(A, G) ,$$

en d'autres termes *tout revêtement principal de A de groupe structural commutatif G, ponctué au-dessus de l'origine de A, est muni de façon unique d'une structure de groupe algébrique admettant le point marqué comme origine, et tel que $A' \to A$ soit un homomorphisme de groupes algébriques.* En particulier, si A' est connexe, c'est également une variété abélienne, isogène à A.

D'autre part, comme le foncteur $X \mapsto \pi_1(X)$ des schémas algébriques ponctués X dans les groupes commute au produit (SGA IX.1.7), il transforme un groupe dans la première catégorie en un groupe dans la catégorie des groupes, i.e. en un groupe *commutatif*. Donc *si A est une variété*
288 *abélienne, $\pi_1(A)$ est un groupe commutatif.* Donc pour connaître $\pi_1(A)$, il suffit de connaître le foncteur $G \mapsto \mathrm{H}^1(A, G) = \mathrm{Hom}(\pi_1(A), G)$ pour G variant dans les groupes finis *commutatifs*. Enfin, rappelons que pour tout entier $n > 0$, l'homomorph !isme de multiplication par n dans A :

$$A \xrightarrow{n} A$$

est surjectif, donc à noyau fini, i.e. c'est une isogénie, et qu'il en résulte que toute isogénie $A' \to A$ est quotient d'une isogénie du type précédent. De ceci, et de raisonnements standards
part 58 (cf. par exemple [6]) on tire :

Théorème 2.1 *(Serre-Lang). Soit A une variété abélienne sur un corps algébriquement clos k, et pour tout entier $n > 0$ considérons le groupe fini ordinaire K_n sous-jacent au noyau ${}_nA$ de la multiplication par n dans A, enfins posons pour tout nombre premier ℓ :*

$$T_\ell(A) = \varprojlim_r K_{\ell^r}$$

et

$$T_\cdot(A) = \prod_\ell T_\ell(A) = \varprojlim_n K_n$$

(où pour m multiple de n, $m = ns$, on envoie K_m dans K_n par la multiplication par s). Alors le groupe $\pi_1(A)$ est canoniquement isomorphe à $T_\cdot(A)$, donc pour tout nombre premier ℓ, la composante ℓ-primaire de $\pi_1(A)$ est canoniquement isomorphe à $T_\ell(A)$.

On notera que ces isomorphismes sont fonctoriels pour A variable. Le module $T_\ell(A)$ est appelé le *module ℓ-adique de Tate* de la variété abélienne A. C'est un foncteur additif en A, en particuier il donne lieu à une représentation de l'anneau $\mathrm{Hom}(A, A)$ des endormorphismes de A dans $T_\ell(A)$, appelée *représentation ℓ-adique de Weil*, et qui joue un rôle important dans la théorie des variétés abéliennes (cf par exemple [4, chap VII]). Le théorème 2.1 en donne une interprétation en termes de la représentation naturelle dans le *groupe d'homologie ℓ-adique* de A,
289 $\mathrm{H}_1(A, \mathbb{Z}_\ell) = \pi_1(A)_\ell$, ce qui est évidemment plus satisfaisant a priori, du point de vue notamment de la formule de Lefschetz, [4, Chap V]. Rappelons ici les résultats de Weil sur la structure de $T_\ell(A)$:

a) Si n est premier à $car(k)$, alors K_n est un module libre de rang égal à $2 \dim A$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc si ℓ est un nombre premier $\neq car(k)$, $T_\ell(A)$ est un module libre de rang égal à $2 \dim A$ sur l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques ;

b) Si n est une puissance de $car(k) = p$, alors K_n est un module libre de rang $\nu \leq \dim A$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ν indépendant de n, donc $T_p(A)$ est un module libre de rang $\nu \leq \dim A$ sur l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques.

Cela montre que dans la théorie du groupe fondamental développée ici, le groupe fondamental d'une variété abélienne variable ne varie pas de façon régulière avec le paramètre, sa composante p-primaire pouvant diminuer brusquement pour des valeurs du paramètre t correspondant à une caractéristique résiduelle p ; le cas le mieux connu de ce phénomène est celui des courbes elliptiques. On notera cependant que, quel que soit n (premier ou non à la caractéristique) le vrai noyau ${}_nA$ dans A pour la multiplication par n est un schéma en groupe fini sur k de degré n^{2g}, où $g = \dim A$, qui sera non séparable sur k si n est un multiple de $p = car(k)$. D'ailleurs, lorsque A varie dans une famille de variétés abéliennes, i.e. si on a un schéma abélien A sur un schéma de base S, on montre plus généralement que ${}_nA$ est un schéma en groupes fini et plat sur S, de degré n^{2g} sur S, c'est-à-dire à condition de tenir compte des parties infinitésimales des noyaux ${}_nA$, ils se comportent de façon régulière quel que soit n. Cela suggère que le "vrai" groupe fondamental d'une variété abélienne A est le pro-groupe algébrique (limite projective formelle de groupes finis sur k) $\varprojlim_n {}_nA$, où par "vrai groupe fondamental" d'un schéma algébrique X, il faut entendre : le pro-groupe qui classifie les revêtements principaux de X de groupe structural un groupe fini quelconque G sur k (pas nécessairement séparable sur k). De cette façon par exemple, on récupère par les représentations de $\mathrm{Hom}(A, A)$ dans la composante p-primaire du vrai groupe fondamental de A, le polynôme caractéristique de Weil défini par ce dernier à l'aide des $\ell \neq p$, de façon plus naturelle que la construction de Serre [8].

3 Cônes projetants, exemple de Zariski

290

Soit toujours k un corps algébriquement clos pour simplifier, et soit V un k-schéma projectif connexe, sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^r_k$, qu'on pourra si on veut supposer non singulier. Soient $Y = \hat{C}$ le cône projetant projectif de V, y_0 son sommet, $X = \hat{C}_V$ la fermeture projective habituelle du fibré vectoriel $C_V = \mathbb{V}(\mathscr{O}_V(1))$ associé à $\mathscr{O}_V(1)$, enfin

$$f \colon X \to Y$$

le morphisme canonique, contractant la section nulle X_0 de C_V sur X en un point (EGA II 8.6.4). Comme X est un fibré localement trivial sur V, de fibres $\mathbb{P}^1$ donc de fibres simplement connexes, le morphisme $p \colon X \to V$ induit en vertu de (XI 4.) un isomorphisme :

$$\pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(V) \quad .$$

Comme p induit un isomorphisme $X_0 \to V$, on en conclut qu'*un revêtement étale de X est complètement décomposé si et seulement si sa restriction à X_0 l'est*. Or pour tout revêtement étale Y' de Y, l'image inverse $X' = X \times_Y Y'$ est un revêtement étale de X complètement décomposé sur la fibre X_0, donc trivial. Comme l'homomorphisme $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ est surjectif (SGA 1, IX 3.4), on en conclut que

$$\pi_1(Y) = (e)$$

en d'autres termes *tout cône projetant projectif est simplement connexe.* (N.B. en caractéristique 0, le même résultat sera valable en prenant pour Y le cône projetant affine).

Supposons maintenant V régulière i.e. lisse sur k ; alors X est régulière, et pour une immersion projective convenable de V, on trouve alors un cône projetant Y *normal*. Si V n'est pas simplement connexe, donc X non simplement connexe, soit X' un revêtement étale connexe non trivial de X. Comme les fibres de X en les points $y \in Y$ distincts de y_0 sont réduites à
291 un point, on voit que la restriction de X' à ses fibres (en particulier à la fibre générique) est triviale ; cependant X ne provient pas par image inverse d'un revêtement étale de Y, puisque Y est simplement connexe et que X' serait complètement décomposé. Cela montre que (X 1.3 et 1.4) deviennent faux si on remplace l'hypothèse que f est séparable par celle plus faible que ses fibres sont des schémas algébriques séparables (ou même lisses) sur les $\mathrm{k}(s)$. On notera de même que les groupes fondamentaux des fibres géométriques $\overline{X}_y$ des $y \neq y_0$ sont évidemment réduits à (e) puisque ces fibres sont réduites à un point, alors que $\pi_1(X_0) \neq e$, donc le théorème de semi-continuité (X 2.4) est également en défaut pour f.

Indiquons enfin l'exemple, signalé par Zariski, mettant en défaut ces mêmes théorèmes, lorsqu'on y remplace l'hypothèse que f est séparable par celle que f est plate. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'une surface non singulière projective dans la droite rationnelle $Y = \mathbb{P}^1$, tel que $K = k(x)$ soit une entension "régulière" i.e. primaire et séparable de $k(f)$, (i.e. la fibre générique géométrique est connexe et séparable), et telle que le diviseur $(f) = X_0 - X_\infty$ soit un multiple n.ème d'un diviseur (où n est un entier premier à la caractéristique). Il est possible de construire de tels exemples en toute caractéristique. Soit X' le normalisé de X dans $K(f^{1/n})$, où $K = k(X)$ est le corps des fonctions de X. Il résulte de l'hypothèse sur (f) que X' est étale sur X. Soit Y' le normalisé de Y dans $k(t)(t^{1/n})$, il est ramifié sur Y en les points $t = 0$ et $t = \infty$ exactement, et la restriction $X'|f^{-1}(U)$ est isomorphe à l'image inverse de $Y'|U$. En particulier, la restriction de X' à la fibre générique *géométrique* de X sur Y se décompose compètement. Cependant, X' n'est pas isomorphe à l'image inverse d'un revêtement étale de Y, car on voit tout de suite que ce dernier serait nécessairement Y', ce qui est absurde puisque Y' est ramifié sur Y[1].

Voici (d'après Serre) une façon simple de réaliser les conditions de cet exemple, en s'inspirant de [5, N° 20] : on prend pour n un nombre premier ≥ 5, distinct de la caractéristique, et on fait opérer $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\underline{k}^4$ en multipliant les coordonnées par quatre caractères distincts de G (ce qui est possible puisque $n \geq 5$). Alors G opère sur l'espace projectif $\mathbb{P}^3_k$, et les seuls points fixes sous G sont les quatre points correspondants aux axes de coordonnées. La surface X' d'équation
292 $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0$ est lisse sur k (critère jacobien), et ne contient aucun des points fixes, donc G étant d'ordre premier, opère sur X "sans points fixes" i.e. X est un revêtement principal

[1] On peut remarquer, du point de vue de la "topologie étale" (SGA 4 VII), que dans cet exemple $\mathrm{R}^1(f_{\text{ét}})_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est "non séparé" sur S.

de $X = X'/G$ de groupe G. Soit $g = x/y$ dans $k(X') = K'$, c'est un générateur kummérien de K' sur $K = k(X)$ si les caractères choisis étaient χ^i, $i = 0, 1, 2, 3$, avec χ un caractère primitif, soit f sa puissance n.ème, qui est un élément de K. On voit tout de suite que K' est une extension régulière de $k(g)$, ce qui résulte du fait que la courbe plane d'équation homogène en $U, T, Z : T^n + Z^n + (1 + g^n)U^n = 0$ est lisse sur $k(g)$ (critère jacobien), et qu'on sait que toute courbe plane est connexe. D'autre part on a $k(f) = K \cap k(g)$, puisque le deuxième membre est une extension de $k(f)$ contenue dans l'extension $k(g)$ de degré premier, et distincts de $k(g)$ (puisque $g \notin K$). Cela implique que K est une extension régulière de $k(f)$. Enfin le diviseur de f sur X est un multiple n.ème d'un diviseur, car son image inverse sur X' est le diviseur de g^n, donc un multiple n.ème, et on peut redescendre parce que X' est étale sur X. On aurait fini si l'application rationnelle $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ était un morphisme, c'est-à-dire si les diviseurs des zéros et des pôles de f ne se rencontraient point. En fait, on vérifie aisément (en regardant encore sur X') que les deux diviseurs en question sont les produits par n de deux courbes lisses sur k, se coupant transversalement en un point a. Remplaçant maintenant X par le schéma obtenu en faisant éclater a, les conditions précédentes ($\mathrm{div}(f)$ divisible par n, et $k(X_1) = k(X)$ extension régulière de $k(X)$) restent vérifiées, mais de plus f est un *morphisme* $X_1 \to \mathbb{P}^1$, donc on est sous
part 59 les conditions voulues.

4 La suite exacte de cohomologie

Soit S un préschéma, de sorte que la catégorie $\mathbf{Sch}_{/S}$ des préschémas sur X est déterminée, donc aussi la notion de groupe dans icelle, qu'on appellera aussi *préschéma en groupes sur* S, ou simplement S-*groupe*. Pour simplifier l'exposition et fixer les idées, nous nous bornerons le plus souvent par la suite à des groupes qui sont *affines* et *plats* sur S[2], ce qui suffira pour les applications que nous avons en vue. (Bien entendu, on rencontre de nombreux cas où ni l'une ni
293 l'autre hypothèse n'est vérifiée). Soit G un tel S-groupe, et soit P un préschéma sur S sur lequel G opère à droite, ce qui implique en particulier un morphisme

$$\pi : P \times_S G \to P$$

dans la catégorie $\mathbf{Sch}_{/S}$, satisfaisant les axiomes bien connus. On dit que P est *formellement principal homogène sous* G si le morphisme

$$P \times_S G \to P \times_S P$$

de composantes pr_1 et π est un isomorphisme ; il revient au même de dire que pour tout objet S' de $\mathbf{Sch}_{/S'}$, $P(S') = \mathrm{Hom}_S(S', P)$ considéré comme ensemble à groupes d'opérateurs $G(S') = \mathrm{Hom}_S(S', G)$, est vide ou principal homogène (i.e. vide ou isomorphe à $G(S')$ sur lequel le groupe $G(S')$ opère par translations à droite). On dit que P est *trivial* si P est isomorphe à G, sur lequel G opère par translations à droite, ou ce qui revient au même, si chacun des ensembles à opérateurs $P(S')$ sous $G(S')$ est trivial. On vérifie, par exemple par le procédé breveté

[2]En fait, pour ce qui va suivre, l'hypothèse quasi-affine au lieu d'affine suffirait, cf. note de bas de page 5.

de passage au cas ensembliste, que P *est trivial si et seulement si il est formellement principal homogème, et admet une section sur* S (ce dernier fait s'énonçant en termes catégoriques en disant que P a une section sur l'objet final $e = S$ de $\mathbf{Sch}_{/S}$, i.e. qu'il existe un morphisme de e dans P). Pour définir la notion de fibré principal homogène P sous G, plus forte que celle de fibré formellement principal homogène, il faut préciser d'abord dans $\mathbf{Sch}_{/S}$ un ensemble de morphismes qui seront utilisés pour la "descente", et joueront le rôle de "morphismes de localisation" pour "trivialiser" des fibrés. Le choix le plus adéquat varie suivant le contexte, aucun ne contenant tous les autres[3]. Ici, il sera commode d'adopter la définition suivante :

Définition 4.1 *Soit G un S-groupe. On appelle* fibré principal homogène *(à droite) sous G, un S-préschéma P à S-groupe à droite G, tel qu'il existe un recouvrement de S par des ouverts U_i, et pour tout i un morphisme de changement de base $S'_i \to U_i$ fidèlement plat et quasi-compact, tel que $P'_i = P \times_S S'_i$ soit un préschéma à opérateurs trivial sous $G' = G \times_S S'$.*

294 (On notera que le foncteur changement de base $X \mapsto X' = X \times_S S'$ étant exact à gauche, transforme groupes en groupes, objets à groupe d'opérateurs en objets à groupes d'opérateurs). Notons que 4.1 est *stable par changement de base*. Notons aussi :

Proposition 4.2 *Soient G un S-groupe, plat et quasi-compact sur S, P un S-préschéma où G opère à droite. Conditions équivalentes :*

(i) P est un fibré principal homogène sous G.

(ii) P est formellement principal homogène sous G, et le morphisme structural $P \to S$ est fidèlement plat et quasi-compact.

Si P est principal homogène sous G, alors avec les notations de 4.1 P' est fidèlement plat et quasi-compact sur S' (puisque G' l'est, et P' lui est S'-isomorphe), donc P a les mêmes propriétés au-dessus de S, (pour "surjectif" et "quasi-compact", cf. VIII 3.1, pour "plat" c'est un oubli dans les sorites de l'exposé VIII). Inversement, si (ii) est vérifié, prenons le changement de base $S' = P$, qui est bien fidèlement plat et quasi-compact sur S ; alors P' sera formellement principal homogène sur S' puisque P l'est sur S et que le foncteur changement de base est exact à gauche, d'autre part P' a une section sur S', savoir la section diagonale, donc c'est un fibré principal trivial, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.3 *Si G est affine et plat sur S, tout fibré principal homogène P sous G est affine et plat sur S.*

En effet, il le devient par extension fidèlement plate et quasi-compacte de la base, et on applique (VIII 5.6).

L'utilité de la définition 4.1 pour des S-groupes *plats* et *affines* sur S tient à (VIII 2.1), i.e. au fait que les morphismes $S' \to S$ envisagés dans 4.1 sont des morphismes de descente effective pour la catégorie des préschémas affines sur d'autres. Grâce à ce fait, la vérification des faits

[3]Voir à ce sujet SGA 3 IV, notamment § 4.

esquissés ci-dessous se fait de façon essentiellement “catégorique”[4]. Soit E un S-préschéma sur lequel le S-groupe G opère à gauche, et soit P un fibré principal homogène (à droite) sous G, nous voulons définir un fibré associé $E^{(P)}$, “localement” isomorphe à E. Pour ceci, faisons opérer
295 à droite G dans $P \times_S E$ suivant la loi $(x, y) \mapsto (xg, g^{-1}y)$, qui décrit de telles opérations dans le contexte ensembliste, et s’étend aux catégories par le procédé breveté. On posera, sous-réserve d’existence :

$$E^{(P)} = (P \times_S E)/G$$

moyennant quoi on constate que $P \times_S E$ sera un préschéma au-dessus de $T = E^{(P)}$, à groupes d’opérateurs à droite $G_T = G \times_S T$; pour être à l’aise, on aimerait que de plus $P \times_S E$ soit un fibré principal homogène sur T de groupe G_T. Pour vérifier l’existence de $E^{(P)}$ et la propriété précédente, reprenons le S' de la définition 4.1 et regardons la situation image inverse sur S' de la situation initiale. Du fait que P' est trivial i.e. isomorphe à G'_d, on voit tout de suite que $E'^{(P')}$ existe, et a la propriété voulue d’exactitude. En fait, $E' \times_{S'} P'$ est G'-isomorphe au produit $E' \times_{S'} G'$, donc $E'^{(P')}$ est isomorphe à E'. De plus, la formation du “fibré associé” dans le cas d’un espace à opérateurs trivial commute à toute extension de la base, et prenant en occurrence les diverses extensions de la base $S'' \rightrightarrows S'$ $\;S''' \;\substack{\rightarrow\\ \rightarrow\\ \rightarrow}\; S'$, où S'' et S''' sont les produits fibrés double et triple de S' sur S, on constate que $E'^{(P')}$ *est muni d’une donnée de descente relativement au morphisme $S' \to S$, et que $E^{(P)}$ existe avec les propriétés requises si et seulement si cette donnée de descente est effective* ; bien entendu $E^{(P)}$ n’est autre alors que l’objet descendu. (Utiliser le fait que $S' \to S$ est un morphisme de descente dans la catégorie des S-préschémas, cf. VIII 5.2). Il s’ensuit que *le fibré associé existe si E est affine sur S*. Nous appliquerons cette construction au cas où on a un homomorphisme de S-groupes $G \to H$, et qu’on prend pour E le S-préschéma H muni des opérations de G sur H à gauche résultant du morphisme donné ; comme H opère à droite sur lui-même de façon à commuter aux opérations de G sur H, et que (sous réserve d’existence au-dessus de S) la formation du fibré associé commute à l’extension de la base, on constate aisément que H va opérer à droite sur $P^{(H)}$, qui est dès lors un fibré principal
296 homogène sous H au sens de 4.1, et de façon précise est trivialisée par le même morphisme $S' \to S$ que P. En particulier, *à tout fibré principal homogène P sous G et tout homomorphisme de S-groupes $G \to H$, avec H affine sur S, est associé un fibré principal homogène de groupe H*, de façon fonctorielle en $(G \to H)$, et compatible avec les changements de base quelconques $T \to S$.

Définition 4.4 *Soit G un S-préschéma. On note $\mathrm{H}^0(S, G)$ l’ensemble des sections de G sur S, qu’on considèrera comme un groupe lorsque G est un S-groupe. Dans ce cas, on note $\mathrm{H}^1(S, G)$ l’ensemble des classes, à isomorphisme près, de fibrés principaux homogènes sur S de groupe S, en considérant $\mathrm{H}^1(S, G)$ comme muni du “point marqué” qui correspondant aux fibrés triviaux*[5].

[4]Cf. loc. cit. dans note de bas de page 3

[5]Cette notation n’est cohérente vis à vis des notations cohomologiques générales (SGA 4 V) que lorsqu’on dispose de critères d’effectivité de descente, qui ne sont guère assurés que si G est affine (ou seulement quasi-affine, cf. (VIII 7.9).

Ainsi, $\mathrm{H}^0(S,G)$ est un foncteur en le S-préschéma G, à valeurs dans la catégorie des ensembles. Ce foncteur est exact à gauche, a fortiori commute aux produits finis, ce qui implique en effet qu'il transforme groupes en groupes, groupes commutatifs en groupes commutatifs. De façon analogue, $\mathrm{H}^1(S,G)$ est un foncteur en le S-groupe *affine* G, à valeurs dans la catégorie des ensembles grâce à la formation des fibrés associés ; on constate facilement que ce foncteur commute aux produits finis. En particulier il transforme les groupes dans la catégorie des S-groupes affines, i.e. les S-groupes *affines commutatifs*, en des groupes de la seconde, et même en des groupes commutatifs (puisque les groupes de la première catégorie sont commutatifs). Ainsi, *si G est un S-groupe affine commutatif,* $\mathrm{H}^1(S,G)$ *est un groupe commutatif*, et un homomorphisme $G \to H$ de S-groupes affines commutatifs donne naissance à un homomorphisme de groupes $\mathrm{H}^1(S,G) \to \mathrm{H}^1(S,H)$.

Pour simplifier, nous nous bornons pour la suite à la considération de S-groupes *affines et commutatifs*. Soit

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} G'' \longrightarrow 0$$

une suite de morphismes de tels groupes, *nous dirons que cette suite est exacte si* $vu = 0$, (ce qui permet de considérer G comme un préschéma sur G'', à groupes d'opérateurs à droite $G'_{G''}$),
297 *et si G est un fibré principal homogène sur G'' de groupe $G'_{G''} = G' \times_S G''$*. Cela implique en particulier que $u\colon G' \to G$ est un noyau de v, et a fortiori cela implique l'exactitude de la suite $0 \to \mathrm{H}^0(X,G') \to \mathrm{H}^0(X,G) \to \mathrm{H}^0(X,G'')$. Cela implique de plus la possibilité de définir une application

$$\partial\colon \mathrm{H}^0(X,G'') \to \mathrm{H}^1(X,G') \quad ,$$

en associant à toute section de G'' sur S, i.e. à tout S-morphisme $f\colon S \to G''$, le fibré principal homogène P_f de groupe $G' \simeq f^*(G'_{G''})$ sur S, image inverse du fibré principal homogène G sur G''. Du point de vue S-préschémas, ce n'est donc autre que l'image inverse par $v\colon G \to G''$ du sous-préschéma image de S par l'immersion f, et les opérations de G' sur P_f sont induites par les opérations à droite de G' sur G). Nous laissons également au lecteur la vérification de la proposition suivante, qui ne présente pas de difficultés autres que de rédaction :

Proposition 4.5 *L'application $\partial\colon \mathrm{H}^0(X,G'') \to \mathrm{H}^1(X,G')$ est un homomorphisme de groupes. La suite d'homomorphismes suivante est exacte :*

$$0 \to \mathrm{H}^0(X,G') \overset{u^0}{\to} \mathrm{H}^0(X,G) \overset{v^0}{\to} \mathrm{H}^0(X,G') \overset{\partial}{\to} \mathrm{H}^1(X,G'') \overset{u^1}{\to} \mathrm{H}^1(X,G) \overset{v^1}{\to} \mathrm{H}^1(X,G'')$$

(où les homomorphismes autres que ∂ proviennent de la loi fonctorielle de H^0 resp H^1).

Remarques 4.6 Le point de vue exposé ici pour l'étude des fibrés principaux homogènes est visiblement inspiré de Serre [7], que le lecteur aura tout intérêt à consutlter. Lorsqu'on veut un formalisme qui s'applique également à des S-groupes structuraux qui sont quasi-projectifs sur S (de façon à englober les schémas abéliens projectifs en particulier), on a intérêt à modifier 4.1 en y demandant que S' soit somme de préschémas S'_i qui sont finis et localement libres sur des ouverts S_i de S recouvrant S. Les développements précédents sont alors valables, y inclus notamment 4.5, en remplaçant partout l'hypothèse affine par l'hypothèse quasi-projective, et en interprétant

de façon correspondante la définition donnée plus faut d'une suite exacte de S-groupes. Il suffit
298 en effet de remplacer la référence à (VIII 2.1) par (VIII 7.7) : les morphisme utilisés $S' \to S$ sont des morphismes de descente effective pour la catégorie fibrée des préschémas quasi-projectifs sur d'autres. On fera attention cependant que cette deuxième notion de fibré principal homogène est plus restrictive que la première 4.1.

part 60

4.7 On obtient une notion encore plus restrictive de fibré principal homogène en demandant que S soit recouvert par des ouverts S_i tels que pour tout i, $P|S_i$ soit un fibré à opérateurs trivial sous $G|S_i$: on dira alors que P est un fibré principal homogème *localement trivial*. Les classes de ces fibrés, pour G donné, forment une partie de $\mathrm{H}^1(X, G)$, qui est en correspondance biunivoque avec $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X(G))$, où $\mathscr{O}_X(G)$ est le faisceau (au sens ordinaire) des sections de G sur S, cf. [2]. Pour que ces H^1 donnent encore lieu à une suite exacte de cohomologie 4.5, il faut évidemment supposer que la suite $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ soit exacte au sens raisonnable pour ce nouveau contexte, i.e. que G soit fibré localement trivial sur G'', de groupe $G'_{G''}$; cela signifie aussi que $u\colon G' \to G$ est un noyau de $v\colon G \to G''$, et que G admet localement une section sur G''.

4.8 Il est évidemment très désirable de continuer la suite exacte 4.5 en introduisant les groupes de cohomologie supérieurs $\mathrm{H}^i(X, G)$. Cela est possible en se plaçant dans le cadre de la "Cohomologie de Weil" : on considère la catégorie $\mathscr{B}$ des préschémas quasi-compacts sur S, muni de l'ensemble $\mathscr{M}$ des morphismes fidèlement plats et quasi-compacts, qu'on appellera morphismes localisants. Un "faisceau de Weil" abélien sur S (ou mieux, sur $(\mathscr{B}, \mathscr{M})$) est alors un foncteur contravariant $\mathscr{F}$ de $\mathscr{B}$ dans la catégorie des groupes abéliens, transformant sommes en produits, et une suite $T'' = T' \times_T T' \overset{pr_1, pr_2}{\rightrightarrows} T' \xrightarrow{f} T$, avec $f \in \mathscr{M}$, en un diagramme *exact* d'ensembles $\mathscr{F}(T) \longrightarrow \mathscr{F}(T') \rightrightarrows \mathscr{F}(T'')$. Les faisceaux de Weil forment une catégorie abélienne à limites inductives exactes admettant un générateur, donc admettant suffisamment d'objets injectifs [1]. Les foncteurs dérivés droits du foncteur $\Gamma(\mathscr{F}) = \mathscr{F}(S)$ sont alors notés $\mathrm{H}^i(S, \mathscr{F})$. D'autre part, tout S-groupe commutatif définit évidemment un faisceau de Weil (VIII 5.2), dont le H^0 et H^1 ne sont autres que $\mathrm{H}^0(S, G)$ et $\mathrm{H}^1(S, G)$, ce qui permet de
299 définir les autres $\mathrm{H}^i(S, G)$ de façon raisonnable. On montre d'ailleurs qu'une suite exacte de S-groupes définit une suite exacte de faisceaux de Weil, ce qui permet de retrouver et de prolonger la suite exacte 4.5[6].

4.9 Il serait indiqué de développer les variantes non commutatives de 4.5 comme dans [2]. Pour un développement systématique, dans le cadre qui convient, des diverses notions cohomologiques esquissées dans le présent numéro, nous renvoyons à un travail en préparation de J. GIRAUD[7].

[6] Pour une étude systématique de ce point de vue, cf. SGA 4 I à IX.

[7] Cf. J. GIRAUD, *Algèbre homologique non abélienne*, à paraitre dans Springer-Verlag 1971.

5 Cas particuliers de fibrés principaux

Supposons maintenant que S soit connexe, et muni d'un point géométrique a, d'où un groupe fondamental $\pi_1(S,a)$ permettant de classifier les revêtements étales de S : la catégorie des revêtements étales de S est équivalente à la catégorie des ensembles finis où π_1 opère continûment. Il s'ensuit qu'un schéma en groupes fini et étale G sur S est déterminé essentiellement par un groupe fini ordinaire $\mathscr{G}$, sur lequel π_1 opère continûment par automorphismes de groupe. Un revêtement étale P de S où G opère à droite est déterminé essentiellement par un ensemble fini $\mathscr{P}$ où π_1 opère continûment (à gauche), et sur lequel $\mathscr{G}$ opère à droite de façon compatible avec les opérations de π_1 :

$$s(p.g) = (sp).(sg) \qquad \text{pour } s \in \pi_1\,,\ p \in \mathscr{P}\,,\ g \in \mathscr{G}\,.$$

On vérifie que P est un fibré principal homogène au sens de 4.1 si et seulement si $\mathscr{P}$ est un ensemble principal homogène sous $\mathscr{G}$ (utiliser par exemple le critère 4.2). En d'autres termes, *la catégorie des fibrés principaux homogènes sur S de groupe G est équivalente à la catégorie des fibrés principaux homogènes de groupe G dans la catégorie des ensembles finis où π_1 opère continûment.* On en déduit en particulier une bijection canonique, fonctorielle en G :

$$\text{(*)} \qquad \mathrm{H}^1(S,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\pi_1,\mathscr{G}) \quad ,$$

300 où le deuxième membre désigne l'ensemble des classes, à isomorphisme près, des fibrés principaux homogènes sous $\mathscr{G}$ dans la catégorie des ensembles finis où π_1 opère (inutile d'ailleurs de préciser : continûment), ensemble qui s'explicite de façon bien connue comme ensemble quotient de l'ensemble $Z^1(\pi_1,G)$ des 1-cocycles $\varphi : \pi_1 \to \mathscr{G}$ (satisfaisant $\varphi(1) = 1$, $\varphi(st) = \varphi(s)(s.\varphi(t))$) par le groupe $\mathscr{G}$ qui y opère de façon naturelle).

Un cas important est celui où π_1 opère trivialement dans $\mathscr{G}$, i.e. lorsque G est un revêtement complètement décomposé de S, isomorphe à la somme de $\mathscr{G}$ exemplaires de S ; on écrit alors aussi $\mathrm{H}^1(S,\mathscr{G})$ au lieu de $\mathrm{H}^1(S,G)$, et cet ensemble est en correspondance biunivoque (*) avec $\mathrm{H}^1(\pi_1,\mathscr{G}) = \mathrm{Hom}(\pi_1,\mathscr{G})/$automorphismes intérieurs de $\mathscr{G}$. On notera d'ailleurs que dans ce cas, un fibré principal homogène sur S de groupe G n'est autre chose qu'un *revêtement principal* de S de groupe $\mathscr{G}$ (V 2.7), et la correspondance biunivoque précédente est celle qui se déduit de la correspondance entre revêtements principaux de S de groupe $\mathscr{G}$, *ponctués* au-dessus de a, et les homomorphismes continus de $\pi_1(S,a)$ dans $\mathscr{G}$ (V fin du N° 5).

L'intérêt de relier la théorie des revêtements étales avec celle des fibrés principaux (déjà implicite dans A. Weil, Généralisation des Fonctions Abéliennes, et explicitée par S. Lang dans sa théorie géométrique du corps de classes, cf. Serre [5]), vient du fait que tout S-groupe qui est fini et étale sur S peut se plonger dans un S-groupe H, affine et lisse sur S, à fibres connexes, commutatif lorsque G l'est de sorte que par la suite exacte 4.5 (et éventuellement ses variantes non commutatives), la classification "discrète" des revêtements principaux de groupe G peut s'étudier à l'aide de la classification "continue" des fibrés principaux de groupe H, et réciproquement d'ailleurs. Pour l'idée de la construction générale de l'immersion de G dans H (assez peu utilisée en pratique semble-t-il), se reporter à [5, VI 2.8]. Nous nous contentons de développer

au N° suivant deux cas particuliers importants, d'ailleurs classiques. Nous y aurons besoin d'un
301 résultat auxiliaire :

Proposition 5.1 *Soit S un préschéma, G un S-groupe isomorphe à $\mathrm{Gl}(n)_S$ (par exemple $\mathbb{G}_{m\,S}$) ou $\mathbb{G}_{a\,S}$, alors tout fibré principal homogène sous G est localement trivial.*

Précisons que $\mathrm{Gl}(n)_S$ (n entier ≥ 0) désigne le S-groupe qui représente le foncteur contravariant $T \mapsto \mathrm{Gl}(n, \Gamma(T, \mathscr{O}_T))$ en le S-préschéma T, en particulier $\mathbb{G}_{m\,S}$ ("groupe multiplicatif sur S") représente le foncteur contravariant $T \mapsto \Gamma(T, \mathscr{O}_T^*)$, donc comme préschéma sur S est isomorphe à $\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_S[t, t^{-1}]$, où t est une indéterminée. De même $\mathbb{G}_{a\,S}$ représente le foncteur contravariant $T \mapsto \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$, il est donc isomorphe comme S-préschéma à $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_S[t])$, où t est une indéterminée. Notons que par dévissage, 5.1 redonne le résultat de locale trivialité de Rosenlicht, relatif au cas où G admet une "suite de composition" dont les facteurs consécutifs sont des groupes du type envisagé ici. (Pour une étude plus fine des questions de locale trivialité des fibrés principaux homogènes, cf. [7] et [3]).

La première assertion se démontre en remarquant que $G(T) = \mathrm{Aut}(\mathscr{O}_T^n)$, et que les morphismes $S' \to S$ intervenant dans 4.1 (i.e. qui sont fidèlement plats et quasi-compacts) sont des morphismes de descente effective pour la catégorie fibrée des Modules localement isomorphes à $\mathscr{O}_T^n$, i.e. localement libres de rang n (VIII 1.12). La deuxième se démontre de façon analogue, en notant que dans ce cas on a $G(T) = \mathrm{Aut}(\mathscr{E}_T)$, où $\mathscr{E}_T$ est l'*extension* triviale de $\mathscr{O}_T$ par $\mathscr{O}_T$ (et où les automorphismes bien entendu doivent respecter la structure d'extension), et que les morphismes $S' \to S$ intervenant dans 4.1 sont des morphismes de descente effective pour la catégorie fibrée des extensions de $\mathscr{O}_T$ par $\mathscr{O}_T$ (comme il résulte facilement de VIII 1.1), et que de telles extensions sont automatiquement localement triviales.

Remarque 5.2 On notera que le même type de démonstration s'applique au groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n)_S$, compte tenu qu'une forme alternée sur un module localement isomorphe à $\mathscr{O}_S^{2n}$, qui est "non dégénérée" i.e. définit un isomorphisme de ce Module sur son dual, est localement isomorphe à la forme standard. Le résultat pour le groupe orthogonal est par contre faux, déjà
302 si S est le spectre d'un corps, car il peut y avoir des formes quadratiques sur un corps qui ne sont pas isomorphes à la forme standard. D'ailleurs on montre essentiellement dans [3] que les groupes Gl, Sp, $\mathbb{G}_a$ et ceux qui se dévissent en tels groupes, sont à peu de choses près les seuls pour lesquels on ait un résultat de trivialité locale du type considéré ici.

Corollaire 5.3 *On a des bijections canoniques*

$$\mathrm{H}^1(S, \mathrm{Gl}(n)_S) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^1(S, \mathrm{Gl}(n, \mathscr{O}_S)) \quad ,$$

en particulier

$$\mathrm{H}^1(S, \mathbb{G}_{m\,S}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S^*) \quad ,$$

et

$$\mathrm{H}^1(S, \mathbb{G}_{a\,S}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S) \quad ,$$

où les deuxièmes membres désignent des cohomologies de l'espace topologique S à coefficients dans des faisceaux ordinaires.

En particulier, $\mathrm{H}^1(S, \mathrm{Gl}(n)_S)$ s'identifie à l'ensemble des classes, à isomorphisme près, de Modules localement libres de rang n sur S, et $\mathrm{H}^1(S, \mathbb{G}_{a\,S})$ s'identifie à l'ensemble des classes
part 61 d'extensions du Module $\mathscr{O}_S$ par lui-même.

6 Application aux revêtements principaux : théories de Kummer et d'Artin–Schreier

Proposition 6.1 *Soient S un préschéma, n un entier > 0, soit $u_n \colon \mathbb{G}_{m\,S} \to \mathbb{G}_{m\,S}$ l'homomorphisme de puissance n.ème, et $\mu_{n\,S}$ son noyau. Alors $\mu_{n\,S}$ est fini et localement libre de rang n sur S, et il est étale sur S si et seulement si pour tout $s \in S$, la caractéristique de s est première à n. La suite d'homomorphismes*

$$0 \to \mu_{n\,S} \to \mathbb{G}_{m\,S} \xrightarrow{u_n} \mathbb{G}_{m\,S} \to 0$$

est exacte au sens du N° 4. (On l'appellera la suite exacte de Kummer *sur S, relativement à l'entier n).*

303 On a

$$\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_S[t, t^{-1}],$$

et u_n correspond à l'homomorphisme u_n sur les $\mathscr{O}_S$-algèbres affines, donné par

$$u_n(t) = t^n,$$

d'autre part la section unité de $\mathbb{G}_{m\,S}$ correspond à l'homomorphisme d'augmentation de $\mathscr{O}_S$-algèbres, donné par

$$\varepsilon(t) = 1,$$

dont le noyau est donc l'Idéal principal $(t-1)$. L'image de ce dernier par u_n est donc l'Idéal principal $(1-t^n)$, et on trouve :

$$\mu_{n\,S} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_S[t]/(1-t^n),$$

ce qui montre en particulier que $\mu_{n\,S}$ est fini sur S, et défini par une Algèbre sur S qui est libre de rang n, ayant la base formée des t^i $(0 \leq i \leq n-1)$. Pour qu'il soit étale en $s \in S$, il faut et il suffit que l'Algèbre réduite $k[t]/(1-t^n)$, où $k = k(s)$, obtenue par adjonction formelle des racines n.èmes de l'unité à k, soit séparable sur k, i.e. les racines de $1-t^n$ dans une clôture algébrique de k sont toutes distinctes, ce qui équivaut au fait que n soit premier à la caractéristique. Enfin, pour montrer que la suite d'homomorphismes dans 6.1 est exacte, on est ramené en vertu du critère 4.2 à prouver que v est fidèlement plat. On peut évidemment supposer S affine d'anneau A, donc $\mathbb{G}_{m\,S}$ affine d'anneau $B = A[t, t^{-1}]$, et il suffit de vérifier que u_n fait de B un module libre de rang n sur B, ou ce qui revient au même, que u_n est injectif, et que $A[t, t^{-1}]$ est un module libre de rang n sur $A[t^n, t^{-n}]$. En effet, on vérifie facilement que les t^i $(0 \leq i \leq n-1)$ forment une base de l'un sur l'autre, ce qui achève la démonstration.

304

Définition 6.2 *On appelle* $\mu_{n\,S}$ *le* groupe de Kummer de rang n sur S, *et on appelle* revêtement principal Kummérien de rang n S *tout fibré principal homogène sur* S *de groupe le groupe de Kummer de rang* n.

L'ensemble de ces revêtements est un groupe, noté $\mathrm{H}^1(S, \mu_{n\,S})$ ou simplement $\mathrm{H}^1(S, \mu_n)$. On notera que la formation du groupe de Kummer de rang n sur S est compatible avec l'extension de la base, donc que $\mu_{n\,S}$ provient par extension de la base du *groupe de Kummer absolu* μ_n sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Désignons par $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$ le S-groupe défini par le groupe fini ordinaire $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si G est un S-groupe quelconque, les homomorphismes de S-groupes u de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$ dans G correspondent biunivoquement, et de façon compatible avec le changement de base, aux sections de G sur S dont la puissance n.ème est la section unité, en faisant correspondre à u l'image par u de la section de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$ sur S défini par le générateur $1 \bmod n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ceci posé :

Corollaire 6.3 *Si* $\mu_{n\,S}$ *est étale sur* S, *on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les isomorphismes de* S*-groupes* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S \xrightarrow{\sim} \mu_{n\,S}$, *et les sections de* $\mathscr{O}_S$ *qui sont d'ordre* n *exactement sur chaque composante connexe de* S *(une telle section s'appellera "racine primitive* n*.ème de l'unité sur* S*"). Donc pour que* $\mu_{n\,S}$ *soit isomorphe en tant que* S*-groupe à* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$, *il faut et il suffit qu'il soit étale sur* S *i.e. que les caractéristiques résiduelles de* S *soient premières à* n, *et qu'il éxiste une racine primitive* n*.ème de l'unité sur* S.

Cela explique le rôle joué dans la théorie kummérienne classique par l'hypothèse que le corps de base (jouant le rôle de S) soit de caractéristique première à n et contienne les racines n.èmes de l'unité, et par le choix d'une racine primitive n.ème de l'unité. Une fois qu'on dispose du langage des schémas, il n'y a plus lieu de s'embarraser de ces hypothèses, et il convient de raisonner directement sur μ_n au lieu de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi, la conjonction de 6.1, 4.5 et 5.3 nous donne la relation générale suivante entre la théorie des revêtements principaux kummériens et celle des groupes de Picard :

305

Proposition 6.4 *Soient* S *un préschéma, on a une suite exacte canonique*

$$0 \to \mathrm{H}^0(S, \mu_n) \to \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S^*) \to \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S^*) \to \mathrm{H}^1(S, \mu_n) \to \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S^*) \to \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S^*),$$

d'où, en posant $\mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S) = \mathrm{Pic}(S)$, *et en désignant pour tout groupe ábelien* A, *par* ${}_nA$ *et* A_n *les noyau et conoyau de la multiplication par* n *dans* A, *la suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S)_n^* \to \mathrm{H}^1(S, \mu_n) \to {}_n\mathrm{Pic}(S) \to 0.$$

Nous allons expliciter deux cas importants, où l'un ou l'autre terme extrême de cette suite exacte sont nuls :

Corollaire 6.5 *Supposons* ${}_n\mathrm{Pic}(S) = 0$, *(par example que* S *soit le spectre d'un anneau local, ou d'un anneau factoriel), et soit* A *l'anneau* $\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S)$. *Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^1(S, \mu_n) \xrightarrow{\sim} A^*/A^{*n}.$$

C'est essentiellement l'énoncé classique de la théorie de Kummer, lorsque S est le spectre d'un corps.

Corollaire 6.6 *Supposons que tout élément de* $\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S)$ *soit une puissance* n*.ème, par exemple que* $\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S)$ *soit un composé de corps algébriquement clos ou que* S *soit réduit et propre sur un corps algébriquement clos* k. *Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^1(S, \mu_n) \xrightarrow{\sim} {}_n\mathrm{Pic}(S).$$

En particulier, lorsque S est propre et connexe sur un corps algébriquement clos k, cela met en relation le groupe fondamental de S avec les points d'ordre fini du schéma de Picard P de S sur k ; ainsi on aura un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq {}_nP(k)$$

306 pour n premier à la caractéristique, qui est souvent utilisé en géométrie algébrique. Comme application, lorsque la composante connexe P^0 de P est un schéma en groupes complet, de dimension g, on voit en utilisant les résultats rappelés dans le N° 2, et la finitude du groupe de torsion de Néron-Sévéri, que pour tout nombre premier ℓ premier à la caractéristique, la composante ℓ.primaire du groupe fondamental $\pi_1(S)$ rendu abélien est un module de type fini et de rang $2g$ sur l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques (et d'ailleurs libre sauf pour un nombre fini au plus de valeurs de ℓ). Comme l'a remarqué Serre, cela permet de prouver sous certaines conditions que lorsque X est un schéma plat et projectif sur S connexe, alors les schémas de Picard des fibres de X ont toutes la même dimension, en appliquant le théorème de semicontinuité (SGA X 2.3) ; l'argument de Serre s'applique dès que le schéma de Picard de X sur S existe, et que les Picards connexes des fibres de X sur S sont des schémas en groupes propres, par exemple lorsque les fibres géométriques de X sur S sont normales (X étant toujours plat et projectif sur S), en particulier si X est lisse et projectif sur S.

Soit maintenant p un nombre premier, et supposons que S soit un préschéma de caractéristique p, i.e. tel que $p \cdot \mathscr{O}_S = 0$. Alors l'homomorphisme de puissance p.ème dans $\mathscr{O}_S$ est additif, et le morphisme correspondant, obtenu en remplaçant S par un T variable sur S :

$$F\colon \mathbb{G}_{a\,S} \to \mathbb{G}_{a\,S}$$

est donc un homomorphisme de S-groupes, qu'on appelle l'*homomorphisme de Frobenius* (N.B. Un tel morphisme est défini pour tout S-préschéma G qui provient par extension de la base d'un préschéma G_0 sur le corps premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et ce morphisme est un homomorphisme de groupes si G_0 est un préschéma en groupes). Nous poserons :

$$\wp = \mathrm{id} - F\colon \mathbb{G}_{a\,S} \to \mathbb{G}_{a\,S}.$$

Considérons d'autre part le S-groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S$ défini par le groupe fini ordinaire $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, nous avons dit que pour tout S-groupe G, les homomorphismes de S-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S$ dans G correspondent biunivoquement aux sections de G sur S dont la puissance p.ème est la section
307 unité. Lorsque $G = \mathbb{G}_{a\ S}$, elles correspondent donc aux sections quelconques de G sur S. Prenant en particulier la section de $\mathbb{G}_{a\ S}$ sur S correspondant à la section unité du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_S$, on trouve un homomorphisme de S-groupes

$$i\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathbb{G}_{a\ S}$$

Proposition 6.7 *La suite d'homomorphismes de S-groupes*

$$0 \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S \to \mathbb{G}_{a\ S} \to G_{a\,S} \to 0$$

est exacte (au sens du N° 4). (On l'appelle la suite exacte d'Artin-Schreier *sur S).*

Il suffit de le prouver sur le corps premier $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il suffit de remarquer que l'homomorphisme $\wp^*\colon k[t] \to k[t]$ défini par $\wp^*(t) = t - t^p$ fait de $k[t]$ un module libre de rang p sur $k[t]$, de façon précise que $k[t]$ est un module libre sur $k[s]$, où $s = t - t^p$, ayant la base formée des t^i $(0 \leq i \leq p-1)$.

On en conclut, utilisant 4.5 et 5.3 :

Proposition 6.8 *On a une suite exacte canonique :*

$$0 \to \mathrm{H}^0(S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S) \to \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S) \to \mathrm{H}^1(S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S) \to \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S),$$

d'où une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S)/\wp\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S) \to \mathrm{H}^1(S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S)^F \to 0,$$

(où l'exposant F dans le dernier terme signifie le sous-groupe des invariants par l'endomorphisme F, égal au noyau de $\wp = \mathrm{id} - F$).

Explicitons encore deux cas extrêmes :

Corollaire 6.9 *Supposons que $\mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S)^F = 0$, par exemple que S soit un schéma affine. Alors, posant $A = \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S)$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^1(S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} A/\wp A.$$

C'est la *théorie d'Artin-Schreier* dans la forme classique, du moins lorsque A est le spectre
part 62 d'un corps.

308

Corollaire 6.10 *Supposons que $\wp\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S) = \mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S)$, par exemple que $\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S)$ soit un composé de corps algébriquement clos, ou que S soit propre sur un corps algébriquement clos. Alors on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{H}^1(S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S)^F$$

Remarques 6.11 Le dernier énoncé est dû à J.P. Serre [9]. Il est possible également de développer une théorie analogue pour le groupe structural $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ pour n quelconque, en utilisant au lieu de $\mathbb{G}_a$ le schéma en groupes de Witt $\mathbb{W}_n$, cf. loc cit. On notera qu'en caractéristique $p > 0$, la théorie de Kummer ne donne plus de renseignement sur les revêtements principaux d'ordre p, puisque μ_p est alors un groupe "infinitésimal" i.e. radiciel sur la base, donc sans rapport direct avec $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; aussi á première vue, la théorie de ces revêtements n'est plus justiciable (lorsque S est un schéma propre sur un corps algébriquement clos pour fixer les idées), de la théorie du schéma de Picard comme dans 6.6. Néanmoins, si on se rappelle que l'espace tangent de Zariski à l'origine dans $\mathbf{Pic}_{S/K}$[8] s'identifie à $\mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S)$, on constate que *la connaisance du schéma en groupes* ${}_p\mathbf{Pic}_{S/k}$*, noyau de la multiplication par* p *dans* $\mathbf{Pic}_{S/k}$*, implique celle de* $\mathrm{H}^1(S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ *aussi bien que celle de* $\mathrm{H}^1(S, \mu_p)$ *; on notera qu'elle implique aussi celle de* $\mathrm{H}^1(S, \alpha_p)$, où α_p désigne le schéma en groupes infinitésimal sur le corps premier, noyau de $F\colon \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ (qui peut se décrire aussi comme le spectre de l'algèbre enveloppante restreinte de la p-algèbre de Lie triviale de dimension 1) : en effet la suite exacte 4.5 donne ici :

$$\mathrm{H}^1(S, \alpha_p) \simeq \mathrm{Ker}(F\colon \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S) \to \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S)),$$

et plus généralement, désignant par α_{p^n} le noyau dans $\mathbb{G}_a$ du n.ème itéré de F, on aura

$$\mathrm{H}^1(S, \alpha_{p^n}) \simeq \mathrm{Ker}(F^n\colon \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S) \to \mathrm{H}^1(S, \mathscr{O}_S)).$$

En fait, la connaisance de ${}_p\mathbf{Pic}_{S/k}$ équivaut à celle de $\mathrm{H}^1(S, G)$ pour tout groupe algébrique
309 commutatif fini annulé par p, plus généralement, la connaisance de ${}_{p^n}\mathbf{Pic}_{S/k}$ équivaut à celle de $\mathrm{H}^1(S, G)$ pour tout groupe algébrique commutatif fini G annulé par p^n, en vertu du théorème suivant qui englobe dans le cas envisagé à la fois la théorie de Kummer et celle de Artin-Schreier :

Soit G un groupe algébrique fini sur k, $D(G) = \mathbf{Hom}_{k-\text{groupes}}(G, \mathbb{G}_m)$ son *dual de Cartier* (dont l'algèbre affine est portée par l'espace vectoriel dual de l'algèbre affine de G, i.e. par l'hyparalgèbre de G au sens de Dieudonné-Cartier), alors on a un isomorphisme canonique :

$$(*) \qquad \mathrm{H}^1(S, G) \simeq \mathrm{Hom}_{k-\text{groupes}}(D(G), \mathbf{Pic}_{S/k}).$$

(NB. S est un schéma propre sur k algébriquement clos, tel que $\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S) = k$). Cette formule peut encore s'exprimer en disant que le "vrai groupe fondamental" de S auquel il était fait allusion au N° 2, rendu abélien, est isomorphe à la limite projective des $D(P_i)$, où P_i parcourt les sous-groupes algébriques *finis* de $\mathbf{Pic}_{S/k}$, qu'on notera $T^\bullet(\mathbf{Pic}_{X/k})$. Lorsque S est une variété abélienne, on a vu dans 2.1 que ce groupe est également isomorphe au "vrai" module de Tate $T_\bullet(S) = \varprojlim_n S$, et l'isomorphisme $(*)$ s'écrit alors de façon plus frappante

$$\mathrm{Ext}^1(A, G) \simeq \mathrm{Hom}(D(G), B),$$

A étant une variété abélienne, B sa duale, G un groupe algébrique fini sur k. Les résultats qu'on vient d'indiquer peuvent se généraliser d'ailleurs au cas où k est remplacé par un préschéma de base quelconque, et à d'autres groupes de coefficients G que des groupes finis.

[8]Pour la définition de $\mathbf{Pic}_{S/K}$, cf. A. Grothendieck, Sém. Bourbaki N° 232, (Février 1962).

7 Bibliographie

310

[1] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. Journal, Vol. 9, pp. 119–221, 1957.

[2] A. Grothendieck, A general theory of fibre spaces with structure sheaf, University of Kansas, 1955.

[3] A. Grothendieck, Torsion homologique et sections rationnelles, Séminaire Chevalley, 16 juin 1958.

[4] S. Lang, Abelian varieties, Interscience tracts in pure and applied mathematics, N$^{\text{o}}$ 7, New York.

[5] J.P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Actualités Scient. et Ind. N$^{\text{o}}$ 1264, Hermann, Paris, 1959.

[6] J.P. Serre, Groupes proalgébriques, Publications Mathématiques de l'IHES N$^{\text{o}}$ 7, pp. 1–67, 1960.

[7] J.P. Serre, Espaces fibrés algébriques, Séminaire Chevalley, 21 avril 1958.

[8] J.P. Serre, Quelques propriétés des variétés abéliennes en car. p, American Journal of Math., vol. 80, pp. 715–739, 1958.

[9] J.P. Serre, Sur la topologie des variétés algébriques en car. p, Symposium Internacional de Topologia Algebraica, 1958.

[10] J.P. Serre, On the fundamental group of a unirational variety, Journal London Math. Society vol. 34, pp. 481–484, 1959.

Exposé XII

Géométrie algébrique et géométrie analytique

311

Mme. M. RAYNAUD [1]

Procédant comme dans [10], on associe à tout schéma X localement de type fini sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ un espace analytique X^{an} dont l'ensemble sous-jacent est $X(\mathbb{C})$.

Dans les N° 2 et 3 de cet exposé, nous donnons un "dictionnaire" entre les propriétés usuelles de X et de X^{an} et entre les propriétés d'un morphisme $f\colon X \to Y$ et du morphisme associé $f^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$.

Nous montrons ensuite que les théorèmes de comparaison entre faisceaux cohérents sur X et X^{an}, établis dans [10 N° 12] pour une variété projective, sont encore valables lorsque X est un schéma propre.

Enfin nous prouvons au N° 5 l'équivalence de la catégorie des revêtements étales finis de X et de la catégorie des revêtements étales finis de X^{an}. En prime au lecteur, nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de Grauert-Remmert [6], utilisant la résolution des singularités [8].

1 Espace analytique associé à un schéma

312

Soit X un schéma localement de type fini sur $\mathbb{C}$. Soit Φ le foncteur de la catégorie des espaces analytiques [4 N° 9] dans la catégorie des ensembles, que à un espace analytique $\mathfrak{X}$ associe l'ensemble des morphismes d'espaces annelés en $\mathbb{C}$-algèbres $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{X}, X)$. On a le théorème suivant :

[1] D'après des notes inédites de A. Grothendieck.

Théorème 1.1 (et définition) *Le foncteur Φ est représentable par un espace analytique X^{an} et un morphisme $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$. On dit que X^{an} est l'espace analytique associé à X.*

Si $|X^{\mathrm{an}}|$ est l'ensemble sous-jacent à X^{an}, φ induit une bijection de $|X^{\mathrm{an}}|$ sur l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points de X à valeurs dans $\mathbb{C}$. De plus, pour chaque point x de X^{an}, le morphisme

$$\varphi_x : \mathscr{O}_{X,\varphi(x)} \to \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}},x},$$

qui est nécessairement local, donne par passage aux complétés un isomorphisme

$$\widehat{\varphi}_x : \widehat{\mathscr{O}}_{X,\varphi(x)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{O}}_{X^{\mathrm{an}},x},$$

En particulier le morphisme φ est plat.

Notons que le fait que φ induise une bijection de X^{an} sur $X(\mathbb{C})$ résulte de la propriété universelle de X^{an}. D'autre part on a les assertions suivantes :

a) Si le théorème est vrai pour un schéma Y, il en est de même pour tout sous-schéma X de Y. Supposons d'abord que X soit un sous-schéma ouvert de Y ; si $\psi\colon Y^{\mathrm{an}} \to Y$ est le
313 morphisme canonique, $\psi^{-1}(X)$ est un ouvert de Y^{an} que l'on muni de la structure d'espace analytique induite par celle de Y^{an}. Comme tout morphisme d'un espace analytique $\mathfrak{X}$ dans X se factorise à travers Y^{an} d'après la propriété universelle de ce dernier, donc à travers X^{an} qui est le produit fibré $Y^{\mathrm{an}} \times_Y X$, X^{an} est l'espace analytique associé à X. Enfin l'assertion concernant les φ_x est évidente.

Il suffit maintenant de considérer le cas où X est un sous-schéma fermé de Y. Soit I le $\mathscr{O}_Y$-Idéal cohérent définissant X ; alors $I \cdot \mathscr{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur $\mathscr{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$ qui définit un sous-espace analytique fermé X^{an} de Y^{an} ; on voit comme dans le cas d'un sous-schéma ouvert que X^{an} est l'espace analytique associé à X. Soit $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ le morphisme canonique. Pour tout point x de X^{an}, le morphisme φ_x n'est autre que le morphisme

$$\mathscr{O}_{Y,\psi(x)}/I_{\psi(x)} \to \mathscr{O}_{Y^{\mathrm{an}},x}/I_{\psi(x)} \cdot \mathscr{O}_{Y^{\mathrm{an}},x}$$

induit par ψ_x ; son complété

$$\widehat{\varphi}_x : \widehat{\mathscr{O}}_{Y,\psi(x)}/I_{\psi(x)} \cdot \widehat{\mathscr{O}}_{Y,\psi(x)} \to \widehat{\mathscr{O}}_{Y^{\mathrm{an}},x}/I_{\psi(x)} \cdot \widehat{\mathscr{O}}_{Y^{\mathrm{an}},x}$$

est un isomorphisme puisque $\widehat{\psi}_x$ en est un, ce qui démontre a).

b) Si l'on a deux $\mathbb{C}$-schémas X_1, X_2, tels que X_1^{an} et X_2^{an} existent, alors il en est de même de $(X_1 \times X_2)^{\mathrm{an}}$. Soient en effet $\varphi_1\colon X_1^{\mathrm{an}} \to X_1$, $\varphi_2\colon X_2^{\mathrm{an}} \to X_2$ les morphismes canoniques, p_1, p_2 les deux projections de $X_1^{\mathrm{an}} \times X_2^{\mathrm{an}}$. On déduit formellement de EGA I 1.8.1 que $X_1 \times X_2$ est le produit de X_1 et X_2 dans la catégorie des espaces annelés en an-
314 neaux locaux ; il en résulte que les morphismes $\varphi_1 \cdot p_1$ et $\varphi_2 \cdot p_2$ définissent un morphisme $\varphi\colon X_1^{\mathrm{an}} \times X_2^{\mathrm{an}} \to X_1 \times X_2$ et que le couple $(X_1^{\mathrm{an}} \times X_2^{\mathrm{an}}, \varphi)$ représente le foncteur $\mathfrak{X} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{X}, X_1 \times X_2)$.

c) Si $\mathfrak{E}^1$ désigne l'espace affine de dimension 1, i.e. l'espace topologique $\mathbb{C}$ muni du faisceau des fonctions holomorphes, le foncteur $\mathfrak{X} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{X}, E^1_{\mathbb{C}})$ est répresentable par $\mathfrak{E}^1$, le morphisme canonique $\varphi\colon \mathfrak{E}^1 \to E^1_{\mathbb{C}}$ étant le morphisme évident. En effet se donner un morphisme d'un espace analytique $\mathfrak{X}$ dans $E^1_{\mathbb{C}}$ équivaut à se donner un élément de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, ce qui revient aussi à se donner un morphisme de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{E}^1$. On a évidemment une bijection $|\mathfrak{E}^1| \simeq E^1(\mathbb{C})$, et, pour chaque point $x \in \mathfrak{E}^1$, le morphisme $\widehat{\varphi}_x$ n'est autre que le morphisme identique d'un anneau de séries formelles à une variable sur $\mathbb{C}$.

On déduit de b) et c) que le théorème est vrai pour l'espace affine $E^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 0$. Utilisant a), on voit qu'il en est de même pour tout schéma affine X, localement de type fini sur $\mathbb{C}$. Si l'on ne suppose plus X affine et si (X_i) est un recouvrement de X par des ouverts affines, il résulte de la propriété universelle et de a) que les X_i^{an} se recollent et définissent ainsi l'espace analytique
part 63 X^{an} associé à X.

1.2 Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de $\mathbb{C}$–schémas localement de type fini. Si $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ et $\psi\colon Y^{\mathrm{an}} \to Y$ sont les morphismes canoniques, il résulte de la propriété universelle de Y^{an} qu'il existe un unique morphisme $f^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ tel que le diagrame

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{an}} & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle f^{\mathrm{an}}}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ Y^{\mathrm{an}} & \longrightarrow & Y \end{array}$$

315 soit commutatif. On a donc défini un foncteur Φ de la catégorie des $\mathbb{C}$–schémas localement de type fini dans la catégorie des espaces analytiques.

Le foncteur Φ commute aux limites projectives finies. Il suffit en effet de voir que Φ commute aux produits fibrés. Or, si X, Y, Z, sont des schémas localement de type fini sur $\mathbb{C}$, il résulte du fait que $X \times_Z Y$ est le produit fibré de X et Y au–dessus de Z dans la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux que $X^{\mathrm{an}} \times_{Z^{\mathrm{an}}} Y^{\mathrm{an}}$ satisfait à la propriété universelle qui caractérise $(X \times_Z Y)^{\mathrm{an}}$.

1.3 Soient X un $\mathbb{C}$–schéma localement de type fini, X^{an} l'espace analytique associé, $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ le morphisme canonique. Si F est un $\mathscr{O}_X$–Module, l'image inverse $\varphi^* F = F^{\mathrm{an}}$ est un faisceau de modules sur $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}$. On définit ainsi un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_X$–modules dans la catégorie des Modules sur X^{an}. Ce foncteur commute aux limites inductives (EGA 0 4.3.2). Le faisceau $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ étant cohérent [4 nº 18 §2 th.2], il transforme faisceaux cohérents en faisceaux cohérents (EGA 0 5.3.11). On a de plus :

Proposition 1.3.1 *Le foncteur qui à un $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}$–Module F associe son image inverse F^{an} sur X^{an} est exact, fidèle, conservatif.*

L'exactitude résulte du fait que le morphisme $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ est plat (1.1). Prouvons que le foncteur $F \mapsto F^{\mathrm{an}}$ est fidèle. Compte tenu de l'exactitude, il suffit de montrer que, si F^{an} est nul, il en est de même de F. Or, pour tout point x de X^{an}, on a alors $F_{\varphi(x)} \otimes_{\mathscr{O}_{X,\varphi(x)}} \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}},x} = 0$. Le morphisme $\mathscr{O}_{X,\varphi(x)} \to \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ étant fidèlement plat, on a $F_{\varphi(x)} = 0$ pour tout point fermé $\varphi(x)$ de X, et, comme X est de Jacobson (EGA IV 10.4.8), ceci implique que F est nul.

316 Le fait que le foncteur $F \mapsto F^{\mathrm{an}}$ soit conservatif est formel à partir de l'exactitude et de la fidélité.

2 Comparaison des propriétés d'un schéma et de l'espace analytique associé

Proposition 2.1 *Soient X un $\mathbb{C}$–schéma localement de type fini, X^{an} l'espace analytique associé, n un entier. Considérons la propriété P d'être*
(i) non vide
(i') discret
(ii) de Cohen-Macaulay
(iii) (S_n)
(iv) régulier
(v) (R_n)
(vi) normal
(vii) réduit
(viii) de dimension n.
Alors, pour que x possède la propriété P, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de X^{an}.

Soit $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ le morphisme canonique. (i) résulte du fait que l'on a $|X^{\mathrm{an}}| = X(\mathbb{C})$ (1.1) et du fait que X est de Jacobson (EGA IV 10.4.8). Dire que X (resp. X^{an}) est discret équivaut à dire que l'on a $\dim X = 0$ (resp. $\dim X^{\mathrm{an}} = 0$ d'après [4 n° 19 §4 cor.6]) ; (i') résulte donc de (viii).

Soit P l'une des propriétés (ii) à (vii). Pour que X possède la propriété P, il faut et il suffit que P soit vérifiée en chaque point fermé de X ; en effet, X étant excellent (EGA IV 7.8.6 (iii)),
317 l'ensemble des points où X vérifie P est un ouvert (loc.cit.) et, si cet ouvert contient tous les points fermés, il est égal à X tout entier. Dire que X (resp. X^{an}) a la propriété P équivaut donc à dire que, pour tout point x de X^{an}, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,\varphi(x)}$ (resp. $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$) a la propriété P. Comme le fait qu'un anneau local excellent ait la propriété P se voit après passage au complété, la proposition résulte des isomorphismes $\widehat{\mathscr{O}}_{X,\varphi(x)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{O}}_{X^{\mathrm{an}},x}$ dans les cas (ii) à (vii). Il en est de même dans le cas (viii), compte tenu des relations

$$\dim X = \sup_x \dim \mathscr{O}_{X,\varphi(x)} \qquad \dim X^{\mathrm{an}} = \sup_x \dim \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$$

où $x \in X^{\mathrm{an}}$. Ceci achève la démonstration.

Proposition 2.2 *Soient X un $\mathbb{C}$–schéma localement de type fini, $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ le morphisme canonique, T une partie localement constructible de X. Alors on a la relation*

$$\varphi^{-1}(\overline{T}) = \overline{\varphi^{-1}(T)}.$$

On peut suposser que T est un ouvert dense de X. Soit H le sous–schéma fermé réduit de X d'espace sous–jacent $X - T$; l'espace associé H^{an} est un sous–space analytique fermé de X^{an} d'espace sous–jacent $X^{\mathrm{an}} - \varphi^{-1}(T)$. On doit montrer que tout point x de H^{an} appartient à $\overline{\varphi^{-1}(T)}$. Or, en un tel point x, le germe d'espace analytique (X^{an}, x) contient le sous–germe (H^{an}, x), et celui-ci est défini par un Idéal non nilpotent de $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$. Il résulte alors du Nullstellensatz [4 n° 19 §4 cor.3] que tout voisinage ouvert de x contient des points de X^{an} qui
part 64 n'appartiennent pas à H^{an}, ce qui prouve bien que l'on a $x \in \overline{\varphi^{-1}(T)}$.

318 **Corollaire 2.3** *Soient X un $\mathbb{C}$-schéma localement de type fini, $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ le morphisme canonique, T une partie localement constructible de X. Pour que T soit une partie ouverte (resp. une partie fermée, resp. une partie dense), il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $\varphi^{-1}(T)$.*

Le corollaire résulte de 2.2 et du fait que, X étant un schéma de Jacobson (EGA IV 10.4.8), deux parties localement constructibles de X qui ont même trace sur l'ensemble très dense $X(\mathbb{C})$ sont égales.

Proposition 2.4 *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma localement de type fini. Pour que X soit connexe (resp. irréductible), il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de X^{an}.*

Supposons X^{an} connexe (resp. irréductible). L'image $X(\mathbb{C})$ de X^{an} dans X est alors connexe (resp. irréductible). Il en résulte que X est connexe (resp. irréductible) car les parties fermées de X et $X(\mathbb{C})$ se correspondent bijectivement (EGA IV 10.1.2).

Inversement supposons X connexe (resp. irréductible), et montrons qu'il en est de même de X^{an}. On peut se borner au cas où X est irréductible. Supposons en effet X connexe. Etant donné un point x de X, l'ensemble des points $y \in X$ tels qu'il existe une suite finie de sous-schémas fermés irréductibles $X_1, \ldots, X_n$ de X, avec $x \in X_1$, $y \in X_n$, $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq n-1$, est un ensemble à la fois ouvert et fermé, donc égal à X tout entier. Pour une suite $X_1, \ldots, X_n$ telle que précédemment, on a aussi $X_i^{\mathrm{an}} \cap X_{i+1}^{\mathrm{an}} \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq n-1$; si l'on suppose démontré que les X_i^{an} sont connexes, il en est alors de même de X^{an}.

319 On suppose désormais X irréductible. On peut supposer de plus X affine. En effet, si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X par des ouverts affines, deux de ces couverts ont une intersection non vide, et la même propriété est donc vraie pour le recouvrement $(U_i^{\mathrm{an}})_{i \in I}$ de X^{an} ; si l'on suppose démontré que les U_i^{an} sont irréductibles, il en est alors de même de X^{an}.

On peut supposer de plus que X est normal. Soit en effet $\tilde{X}$ le normalisé de X ; comme le morphisme $\tilde{X} \to X$ est surjectif, il est de même de $\tilde{X}^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$, ce qui prouve que, si $\tilde{X}^{\mathrm{an}}$ est irréductible, il est de même de X^{an}.

On suppose désormais X affine normal. Comme les anneaux locaux de X^{an} sont intègres, il revient au même de dire que X^{an} est irréductible ou qu'il est connexe. En effet, si $\mathscr{F}$ est une partie analytique fermée de X^{an}, l'ensemble des points x de X^{an} où l'on a $\mathrm{codim}_x(\mathscr{F}, X^{\mathrm{an}}) = 0$ est un sous-ensemble analytique fermé de X^{an} [4 n° 20 A Cor. 1] qui est aussi ouvert ; si X^{an} est connexe, ceci prouve que, si l'on a $\mathscr{F} \neq X^{\mathrm{an}}$, $\mathscr{F}$ est rare, donc que X^{an} est irréductible. On est ainsi ramené à montrer que X^{an} est connexe.

Soit

$$i\colon X \to P$$

une compactification de X, où P est un $\mathbb{C}$-schéma projectif normal et i une immersion ouverte dominante. Il résulte alors de [10 n° 12 th. 1] que P^{an} est connexe. Comme X^{an} est obtenu en enlevant à P^{an} une partie analytique fermée rare, il resulte de 2.5 ci-dessous que X^{an} est aussi
320 connexe.

Lemme 2.5 *Soient $\mathscr{P}$ un espace analytique normal connexe, $\mathscr{Y}$ une partie analytique fermée rare, alors $\mathscr{X} = \mathscr{P} - \mathscr{Y}$ est connexe.*

Lorsque $\mathscr{Y}$ est de codimension ≥ 2, la proposition résulte de [11 n° 3 prop. 4]. Dans le cas général on peut supposer, quitte à enlever à $\mathscr{P}$ une partie analytique fermée de codimension ≥ 2, que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Y}$ (considéré comme sous-espace analytique réduit de $\mathscr{P}$) sont réguliers. D'après le théorème des fonctions implicites, tout point y de $\mathscr{Y}$ possède un voisinage $\mathscr{U}$ isomorphe à une boule d'un espace affine $\mathscr{E}^n$, de sorte que $\mathscr{U} \cap \mathscr{Y}$ soit défini par l'annulation d'un certain nombre de fonctions coordonnées. Ceci prouve que $\mathscr{U} - \mathscr{U} \cap \mathscr{Y}$ est connexe, et il en est donc de même de $\mathscr{X}$.

Corollaire 2.6 *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma localement de type fini ; le morphisme*

$$\pi_0(X^{\mathrm{an}}) \to \pi_0(X)$$

induit par le morphisme canonique $X^{\mathrm{an}} \to X$ est bijectif.

3 Comparaison des propriétés des morphismes

Proposition 3.1 *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas localement de type fini, $f^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ le morphisme déduit de f sur les espaces analytiques associés. Soit P la propriété d'être*

(i) plat

(ii) net (i.e. non ramifié)

(iii) étale

(iv) lisse

(v) normal

321 *(vi) réduit*

(vii) injectif

(viii) séparé

(ix) un isomorphisme

(x) un monomorphisme

(xi) une immersion ouverte.

Alors, pour que f possède la propriété P, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de f^{an}.

Notons $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ et $\psi\colon Y^{\mathrm{an}} \to Y$ les morphismes canoniques. Soient x un point de X^{an}, $y = f^{\mathrm{an}}(x)$. Les morphismes $\mathscr{O}_{Y^{\mathrm{an}},y} \to \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ et $\mathscr{O}_{Y,\psi(y)} \to \mathscr{O}_{X,\varphi(x)}$ déduits de f et f^{an} donnent le même morphisme par passage aux complétés (1.1). D'après [2 ch. 3 § 5 prop.4] (resp. EGA IV 17.4.4) il revient donc au même de dire que f^{an} vérifie la propriété (i) (resp.(ii)) ou de dire que f verifie (i) (resp.(ii)) en chaque point fermé de X. Comme l'ensemble des points de X où (i) (resp. (ii)) est vérifié est un ouvert (EGA IV 11.1.1 et I 3.3), ceci démontre (i) et (ii), donc aussi (iii).

Soit P la propriété (iv) (resp.(v), resp.(vi)). Compte tenu de 2.1 ((v), (vi),(vii)), il revient au même de dire que les fibres géométriques de f^{an} aux différents points y de Y^{an} sont régulières (resp. normales, resp. réduites) ou qu'il en est ainsi des fibres géométriques de f aux différents points fermés $\psi(y)$ de Y. Les cas (iv) (resp.(v), resp.(vi)) résultent alors de (i) et du fait que l'ensemble des points de Y où les fibres géométriques de f sont régulières est un ouvert (EGA IV 12.1.7).

(vii). Si f est injectif, il en est de même de f^{an}. Inversement supposons f^{an} injectif et mon-
322 trons qu'il en est de même de f. On peut supposer f de type fini. Le morphisme f^{an} étant injectif, les fibres de f aux points fermés de Y son radicielles ; comme l'ensemble des points de Y dont la fibre est radicielle est localement constructible (EGA IV 9.6.1) et comme Y est un schéma de Jacobson, f a toutes ses fibres radicielles donc est injectif.

(viii). Soient $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ et $\Delta^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}} \times_{Y^{\mathrm{an}}} X^{\mathrm{an}}$ les immersions diagonales, $\Theta\colon X^{\mathrm{an}} \times_{Y^{\mathrm{an}}} X^{\mathrm{an}} \to X \times_Y X$ le morphisme canonique. En vertu de 2.3 il revient au même de dire que $\Delta(X)$ est fermé dans $X \times_Y X$ ou que $\Delta^{\mathrm{an}}(X^{\mathrm{an}})$ est fermé dans $X^{\mathrm{an}} \times_{Y^{\mathrm{an}}} X^{\mathrm{an}}$.

Comme une immersion ouverte n'est autre qu'un morphisme étale injectif (EGA IV 17.9.1 et [4 n° 13 § 1]), (xi) résulte de (iii) et de (vii). Un isomorphisme étant la même chose qu'une immersion ouverte surjective, (ix) résulte de (xi) et de (3.2) ci-dessous. Dire que f est un monomorphisme équivaut à dire que la morphisme diagonal $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ est un isomorphisme,
part 65 donc (x) résulte de (ix).

Proposition 3.2 *Soient X et Y deux $\mathbb{C}$-schémas localement de type fini, $f\colon X \to Y$ un morphisme de type fini, $f^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ le morphisme déduit de f sur les espaces analytiques associés. Soir P la propriété d'être* *(i) surjectif*

(ii) dominant

(iii) une immersion fermée

(iv) une immersion

323 *(v) propre*[2]

(vi) fini.

Alors, pour que f possède la propriété P, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de f^{an}.

Soient $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ et $\psi\colon Y^{\mathrm{an}} \to Y$ les morphismes canoniques.

(i). Si f est surjectif, pour tout point y de Y^{an}, $f^{-1}(\psi(y))$ est une partie fermée non vide de X ; elle contient donc au moins un point fermé, ce qui prouve que f^{an} est surjectif. Inversement, si f^{an} est surjectif ; $f(X)$ est une partie localement constructible de Y (EGA IV 1.8.4) qui contient tous les points fermés de Y ; on a donc $f(X) = Y$.

(ii) résulte de 2.2.

(iii). Si f est une immersion fermée, il en est de même de f^{an} d'après 1.1 a). Inversement, si f^{an} est une immersion fermée, il en est de même de f d'après 3.1 (x) et 3.2 (v), car cela revient à dire que f est un monomorphisme propre (EGA IV 8.11.5).

(iv). Il est clair que, si f est une immersion, il en est de même de f^{an}. Inversement supposons que f^{an} soit une immersion, et soient T l'image de X dans Y, $\overline{T}$ l'adhérence schématique de f. On a une factorisation de f,

$$X \xrightarrow{i} \overline{T} \xrightarrow{j} J\ ,$$

où j est une immersion fermée, i le morphisme canonique, et on en déduit la factorisation suivante de f^{an}

$$X^{\mathrm{an}} \xrightarrow{i^{\mathrm{an}}} \overline{T}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{j^{\mathrm{an}}} Y^{\mathrm{an}}\ .$$

324 Comme $T = \underline{f(X)}$ est une partie localement constructible de Y (EGA IV 1.8.4), on a, d'après 2.2, $\overline{T}^{\mathrm{an}} = \overline{f^{\mathrm{an}}(X^{\mathrm{an}})}$. Il en résulte que $i^{\mathrm{an}}(X^{\mathrm{an}})$ est un ouvert de $\overline{T}^{\mathrm{an}}$, donc que $i(X)$ est un ouvert de $\overline{T}$. On considère la factorisation canonique de i

$$X \xrightarrow{i_1} i(X) \xrightarrow{i_2} \overline{T}.$$

Le morphisme i_1^{an} est un monomorphisme propre, donc il en est de même de i_1 d'après 3.2 (v) et 3.1 (x) ; ceci prouve que i_1 donc aussi f est une immersion.

(v). Supposons que f soit propre et montrons qu'il en est de même de f^{an}. Le fait que f^{an} soit propre étant local sur Y^{an}, on peut supposer Y affine. D'après le lemme de Chow (EGA II 5.6.1), on peut trouver un Y-schéma projectif X' et un morphisme projectif surjectif

$$g\colon X' \to X.$$

[2]Nous dirons qu'un morphisme d'espaces analytiques est propre s'il l'est au sens de [1 ch.1 §10 n° 1] et s'il est separé.

Le morphisme $(fg)^{\rm an} = f^{\rm an}g^{\rm an}$ est projectif donc propre, $g^{\rm an}$ est surjectif, et il résulte de [1 ch. 1 §10] que $f^{\rm an}$ est propre.

Inversement supposons $f^{\rm an}$ propre et montrons qu'il en est de même de f. D'après 3.1 (viii) f est séparé. Il reste à prouver que f est universellement fermé, et il suffit même de montrer que f est fermé ; en effet, pour tout Y-schéma Y' localement de type fini, le morphisme

$$f_{(Y')} = h\colon X \times_Y Y' \to Y'$$

sera aussi fermé puisque $h^{\rm an}$ est propre. Soit T une partie fermée de X ; $f(T)$ est un ensemble localement constructible, et l'on a

$$f^{\rm an}(\varphi^{-1}(T)) = \psi^{-1}(f(T)).$$

325 Comme $f^{\rm an}$ est propre, $\psi^{-1}(f(T))$ est une partie fermée de $Y^{\rm an}$, et il résulte donc de 2.2 que l'on a

$$\psi^{-1}(\overline{f(T)}) = \psi^{-1}(f(T)) .$$

Cela entraîne que l'on a $f(T) = \overline{f(T)}$, i.e. que f est fermée donc que f est propre.

(vi). Il revient au même de dire qu'un morphisme est fini ou qu'il est propre à fibres finies (EGA III 4.4.2 et [4 n° 19 § 5]). Comme l'ensemble des points où les fibres de f sont finies est localement constructible (EGA IV 9.7.9), les fibres de f sont finies si et seulement si il en est ainsi des fibres de $f^{\rm an}$; (vi) résulte donc de (v).

Remarque 3.3

a) soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas localement de type fini. Le fait que $f^{\rm an}$ soit un isomorphisme local n'entraîne pas qu'il en soit de même de f. En effet, si f est étale, $f^{\rm an}$ est étale donc est un isomorphisme local [4 n° 13 § 1], mais il n'en est pas nécessairement ainsi de f.

b) l'enoncé 3.2 n'est pas vrai si l'on ne suppose pas f de type fini. Montrons par exemple que $f^{\rm an}$ peut être une immersion fermée sans qu'il en soit de même de f. Il suffit en effet de prendre pour X la somme de $\mathbb{Z}$ copies de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$, et pour Y la droite affine, et pour f le morphisme obtenu en envoyant les points de X sur des points distincts de Y formant une partie discrète.

4 Théorèmes de comparaison cohomologique et théorèmes d'existence

326

L'objet de ce numéro est de redémontrer les résultats de [3 n° 2 th. 5 et th. 6] ; ces derniers généralisent au cas d'un schéma propre les théorèmes établis dans [10 n° 12] lorsque X est projectif, et les étendent au cas relatif. Des résultats plus généraux, concernant les schémas relatifs propres sur un espace analytique, sont prouvés dans [7 ch. VIII n° 3].

Rappelons que la cohomologie de Čech utilisée dans [10 n° 12] coïncide avec la cohomologie usuelle dans le cas algébrique comme dans le cas analytique (EGA III 1.4.1. et [5 II 5.10]).

4.1 Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas localement de type fini et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle f^{\mathrm{an}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array} \qquad .$$

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module, on a, pour tout entier $p \geq 0$, des morphismes

$$\mathrm{R}^p f_* \mathscr{F} \xrightarrow{i} \mathrm{R}^p f_*(\varphi_* \mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{j} \mathrm{R}^p (f.\varphi)_* \mathscr{F}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{k} \psi_*(\mathrm{R}^p f_*^{\mathrm{an}} \mathscr{F}^{\mathrm{an}}) \qquad ,$$

où i se déduit du morphisme canonique $\mathscr{F} \to \varphi_* \mathscr{F}^{\mathrm{an}}$, et j, k sont des “edge-homomorphismes” de suites spectrales de Leray. Au composé $k.j.i$ est associé un morphisme canonique

327 (4.1.1) $$\theta_p\colon (\mathrm{R}^p f_* \mathscr{F})^{\mathrm{an}} \to \mathrm{R}^p f_*^{\mathrm{an}}(\mathscr{F}^{\mathrm{an}})$$

Théorème 4.2 *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de $\mathbb{C}$-schémas localement de type fini, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors, pour tout entier $p \geq 0$ le morphisme (4.1.1)*

$$\theta_p\colon (\mathrm{R}^p f_* \mathscr{F})^{\mathrm{an}} \to \mathrm{R}^p f_*^{\mathrm{an}}(\mathscr{F}^{\mathrm{an}})$$

est un isomorphisme.

1) *Cas où f est projectif.* La démonstration est analogue à celle de [10 n° 13]. Rappelons-la brièvement. On se ramène au cas où X est un espace projectif type $\mathbb{P}^r_Y$ au dessus de Y. Soit $\mathscr{Y} = Y^{\mathrm{an}}$, $\mathscr{P} = \mathbb{P}^r_{\mathscr{Y}}$; on prouve d'abord que l'on a

$$f_*^{\mathrm{an}} \mathscr{O}_{\mathscr{P}} = \mathscr{O}_{\mathscr{Y}} \qquad , \qquad \mathrm{R}^p f_*^{\mathrm{an}}(\mathscr{O}_{\mathscr{P}}) = 0 \qquad \text{pour } p > 0$$

Pour vérifier les relations précédentes, on peut en effet se ramener au cas où $\mathscr{Y}$ est une boule $\mathscr{B}$ d'un espace affine $\mathscr{E}^n$. On considère le “recouvrement standard” $\{\mathscr{U}_i\}$ de $\mathscr{P}$ par $r+1$ ouverts isomorphes a $\mathscr{B} \times \mathscr{E}^r$. Comme ces ouverts sont de Stein, on a, pour tout entier $p \geq 0$, des isomorphismes

$$\mathrm{H}^p(\{\mathscr{U}_i\}, \mathscr{O}_{\mathscr{P}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^p(\mathscr{P}, \mathscr{O}_{\mathscr{P}})$$

On peut alors exprimer les sections du faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathscr{P}}$ sur les ouverts $\mathscr{U}_i$ et sur leurs intersections en termes de séries de Laurent ; un calcul facile preuve que l'on a

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{P}, \mathscr{O}_{\mathscr{P}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathscr{Y}, \mathscr{O}_{\mathscr{Y}}) \qquad , \qquad \mathrm{H}^p(\mathscr{P}, \mathscr{O}_{\mathscr{P}}) = 0 \qquad \text{pour } p > 0$$

La démonstration s'achève alors en recopiant [10 n° 12 lemme 5], les groupes de cohomologie étant remplacés par les faisceaux de cohomologie.

328 2) *Cas où f est propre*. On utilise EGA III 3.1.2 pour se ramener au cas projectif. Soit $\mathscr{K}$ la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents tels que θ_p soit un isomorphisme pour tout $p \geq 0$. Il suffit de prouver que, pour toute suite exacte $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ dont deux termes sont dans $\mathscr{K}$, il en est de même du troisième, qu'un facteur direct d'un objet de $\mathscr{K}$ est dans $\mathscr{K}$, et que, pour tout point x de X, on peut trouver un objet $\mathscr{F}$ de $\mathscr{K}$ tel que l'on ait $F_x \neq 0$.

Le première condition résulte par application du lemme des cinq du diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & (\mathrm{R}^p f_*\mathscr{F}')^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{R}^p f_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{R}^p f_*\mathscr{F}'')^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{R}^{p+1} f_*\mathscr{F}')^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & \mathrm{R}^p f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}'^{\mathrm{an}} \arrow[r] & \mathrm{R}^p f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}} \arrow[r] & \mathrm{R}^p f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}''^{\mathrm{an}} \arrow[r] & \mathrm{R}^{p+1} f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}'^{\mathrm{an}} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd} ,$$

et on vérifie de facon analogue la deuxième condition.

Pour vérifier la trosième condition, on peut se borner au cas où X est un schéma irréductible de point générique x. On pouvait supposer Y noethérien dès le début. D'après le lemme de Chow (EGA II 5.6.1), on peut trouver un Y-schéma projectif X' et un morphisme projectif surjectif $g\colon X' \to X$. D'autre part il existe un entier n tel que l'on ait $\mathrm{R}^p\, g_*(\mathscr{O}_{X'}(n)) = 0$ pour tout $p > 0$ et que le morphisme canonique $g^*g_*(\mathscr{O}_{X'}(n)) \to \mathscr{O}_{X'}(n)$ soit surjectif (EGA III 2.2.1). Si l'on pose $\mathscr{F} = g_*(\mathscr{O}_{X'}(n))$ le faisceau $\mathscr{F}$ répond à la question. En effet on a $F_x \neq 0$; de plus la suite spectrale de Leray

$$\mathrm{R}^p f_*(\mathrm{R}^q\, g_*(\mathscr{O}_{X'}(n))) \Longrightarrow \mathrm{R}^{p+q}(f.g)_*(\mathscr{O}_{X'}(n))$$

étant dégénérée, on a un isomorphisme

$$\mathrm{R}^p f_*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^p(f.g)_*(\mathscr{O}_{X'}(n))$$

329 Comme dans le cas algébrique on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{R}^p f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^p(f.g)_*^{\mathrm{an}}(\mathscr{O}_{X'}(n)^{\mathrm{an}}),$$

et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{R}^p f_*\mathscr{F})^{\mathrm{an}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\theta_p"'] & (\mathrm{R}^p(f.g)_*(\mathscr{O}_{X'}(n)))^{\mathrm{an}} \arrow[d, "\psi_p"'] \\
\mathrm{R}^p f_*^{\mathrm{an}}\mathscr{F}^{\mathrm{an}} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{R}^p(f.g)_*^{\mathrm{an}}(\mathscr{O}_{X'}(n)^{\mathrm{an}})
\end{tikzcd}$$

est commutatif. D'après 1) ψ_p est un isomorphisme ; il en est donc de même de θ_p, ce qui achève
part 66 la démonstration.

Corollaire 4.3 *Soient X un $\mathbb{C}$-schéma propre, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors, pour tout entier $p \geq 0$, le morphisme canonique*

$$\mathrm{H}^p(X, F) \to \mathrm{H}^p(X^{\mathrm{an}}, F^{\mathrm{an}})$$

est un isomorphisme.

Théorème 4.4 *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma propre. Le foncteur qui, à tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent F, associe son image inverse F^{an} sur X^{an} est une équivalence de catégories.*

1) *Le foncteur est pleinement fidèle*. Soient en effet F et G deux $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents. Le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(F,G) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(F^{\mathrm{an}},G^{\mathrm{an}})$$

s'identifie au morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(X,\mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_X}(F,G)) \to \mathrm{H}^0(X^{\mathrm{an}},\mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_X}(F,G))$$

330 (EGA 0_{I} 6.7.6). Comme $\mathbf{Hom}_{\mathscr{O}_X}(F,G)$ est cohérent, il résulte de 4.3 que ce morphisme est bijectif.

2) *Le foncteur est essentiellement surjectif*. Lorsque X est projectif l'assertion résulte de [10 n° 12 th.3]. Le cas général se ramène au précédent en utilisant le lemme de Chow (EGA II 5.6.1). Soient en effet X' un $\mathbb{C}$-schéma projectif, $f\colon X' \to X$ un morphisme projectif surjectif, U un ouvert dense de X tel que f induise un isomorphisme $f^{-1}(U) \simeq U$. On raisonne par récurrence noethérienne sur X ; on peut donc supposer que, pour tout faisceau cohérent $\mathscr{G}$ sur X^{an} tel que l'on puisse trouver une partie fermée Y de X distincte de X, satisfaisant à la relation $Y^{\mathrm{an}} \supset \mathrm{Supp}\,\mathscr{G}$, il existe un faisceau cohérent G sur X tel que l'on ait un isomorphisme $G^{\mathrm{an}} \simeq \mathscr{G}$.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de modules cohérent sur $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}$, $\mathscr{K}$ et $\mathscr{L}$ les faisceaux cohérents définis par la condition que la suite

$$0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{F} \to f^{\mathrm{an}}_* f^{\mathrm{an}*}\mathscr{F} \to \mathscr{L} \to 0$$

soit exacte. Comme X' est projectif, il existe un $\mathscr{O}_{X'}$-Module cohérent F' tel que l'on ait $F'^{\mathrm{an}} \simeq f^{\mathrm{an}*}\mathscr{F}$; on déduit alors de 4.2 que l'on a un isomorphisme $(f_*F')^{\mathrm{an}} \simeq f^{\mathrm{an}}_* f^{\mathrm{an}*}\mathscr{F}$. Comme $\mathscr{K}|U^{\mathrm{an}}$ et $\mathscr{L}|U^{\mathrm{an}}$ sont nuls, il existe des $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents K et L tel que l'on ait des isomorphismes $K^{\mathrm{an}} \simeq \mathscr{K}$, $L^{\mathrm{an}} \simeq \mathscr{L}$. D'après 1) le morphisme $f^{\mathrm{an}}_* f^{\mathrm{an}*}\mathscr{F} \to \mathscr{L}$ provient d'un unique morphisme $f_*F' \to L$; soit $I = \mathrm{Ker}(f_*F' \to L)$. Le faisceau $\mathscr{F}$ est alors extension
331 de I^{an} par K^{an}, et il suffit de voir que cette extension provient par image inverse d'une extension de I par K. Il suffit donc de prouver que le morphisme canonique

$$(*) \qquad \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_X}(I,K)^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(I^{\mathrm{an}},K^{\mathrm{an}}) \quad q \neq 1$$

est bijectif. Or on a des isomorphismes $\mathbf{Ext}^q_{\mathscr{O}_X}(I,K)^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(I^{\mathrm{an}},K^{\mathrm{an}})$ pour tout entier $q \geq 0$ (EGA 0_{III} 12.3.5), et un morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(X,\mathbf{Ext}^q_{\mathscr{O}_X}(I,K)) & \Longrightarrow & \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathscr{O}_X}(I,K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^p(X^{\mathrm{an}},\mathbf{Ext}^q_{\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(I^{\mathrm{an}},K^{\mathrm{an}})) & \Longrightarrow & \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(I^{\mathrm{an}},K^{\mathrm{an}}). \end{array}$$

Ce morphisme est un isomorphisme car, d'après 4.3, il en est ainsi sur les termes E_2^{pq}, et ceci démontre la bijectivité de $(*)$.

Corollaire 4.5 *Le foncteur qui à tout $\mathbb{C}$-schéma propre X associe X^{an} est pleinement fidèle.*

On doit montrer que, si X et Y sont deux $\mathbb{C}$-schémas propres, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X^{\mathrm{an}}, Y^{\mathrm{an}})$$

est bijective. Or se donner un morphisme de X dans Y (resp. de X^{an} dans Y^{an}) équivaut à se donner son graphe, i.e. un sous-schéma fermé Z de $X \times Y$ (resp. un sous-espace analytique fermé $\mathfrak{Z}$ de $X^{an} \times Y^{\mathrm{an}}$), tel que la restriction de la première projection $X \times Y \to X$ à Z (resp.
332 de $X^{\mathrm{an}} \times Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ à $\mathfrak{Z}$) soit un isomorphisme. Comme la donnée d'un sous-schéma fermé de $X \times Y$ (resp. d'un sous-espace analytique fermé de $X^{\mathrm{an}} \times Y^{\mathrm{an}}$) équivaut à celle d'un faisceau cohérent d'idéaux sur $\mathscr{O}_{X\times Y}$ (resp. sur $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}\times Y^{\mathrm{an}}}$), le corollaire résulte de 4.4.

Corollaire 4.6 *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma propre. Le foncteur qui, à tout schéma fini (resp. étale fini) X' au-dessus de X, associe X'^{an} est une équivalence de la catégorie des schémas finis (resp. étales finis) au-dessus de X dans la catégorie des espaces analytiques finis (resp. étales finis) au-dessus de X^{an}.*

En effet se donner un morphisme fini $X' \to X$ (resp. $X'^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$) équivaut à se donner un faisceau cohérent d'algèbres sur $\mathscr{O}_X$ (resp. sur $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}$) [4 n° 19 § 5 th.2]. Le corollaire résulte donc de 4.4 dans le cas non respé, et le cas respé s'en déduit compte tenu de 3.1 (iii).

5 Théorèmes de comparaison des revêtements étales

5.0 Précisons la notion de revêtement fini d'un espace analytique. Si $\mathfrak{X}$ est un espace analytique, on dit qu'un espace analytique $\mathfrak{X}'$ fini au-dessus de $\mathfrak{X}$ est un revêtement fini de $\mathfrak{X}$ si toute
part 67 composante irréductible de $\mathfrak{X}'$ domine une composante irréductible de $\mathfrak{X}$.

Théorème 5.1 ("Théorème d'existence de Riemann".) *Soient X un $\mathbb{C}$-schéma localement de type fini, X^{an} l'espace analytique associé à X. Le foncteur Ψ qui, à tout revêtement étale fini X'
333 de X, associe X'^{an} est une équivalence de la catégorie des revêtements étales finis de X dans la catégorie des revêtements étales finis de X^{an}.*

1) *Le foncteur Ψ est pleinement fidèle.* Soient X' at X'' deux revêtements étales finis de X, et prouvons que l'application canonique

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_X(X', X'') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X^{\mathrm{an}}}(X'^{\mathrm{an}}, X''^{\mathrm{an}})$$

est bijective. On peut supposer X' connexe. Se donner un X-morphisme de X' dans X'' équivaut à se donner une composante connexe X_i de $X' \times_X X''$ telle que le morphisme $X_i \to X'$ induit par la première projection soit un isomorphisme. Comme les composantes connexes de $X' \times_X X''$

correspondent bijectivement aux composantes connexes de $X'^{\mathrm{an}} \times_{X^{\mathrm{an}}} X''^{\mathrm{an}}$ (2.6) et qu'un morphisme $X_i \to X'$ est un isomorphisme si et seulement si il en est ainsi de $X_i^{\mathrm{an}} \to X'^{\mathrm{an}}$, ceci démontre la bijectivité de $(*)$.

2) *Le foncteur* Ψ *est essentiellement surjectif.* Soit $\mathfrak{X}'$ un revêtement étale fini de X^{an} et prouvons qu'il existe un revêtement étale X' de X tel que l'on ait un isomorphisme $X'^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}'$. Compte tenu de 1) la question est locale sur X, et on peut donc supposer X affine.

a) Réduction au cas où X est normal. On peut supposer X réduit. Supposons en effet le théorème démontré pour $X_{\mathrm{réd}}$. Le foncteur qui, à un revêtement étale fini X' de X fait correspondre le revêtement étale fini $X'^{\mathrm{an}}_{\mathrm{réd}}$ de $X^{\mathrm{an}}_{\mathrm{réd}}$ est alors une équivalence. Comme il s'obtient en composant Ψ avec le foncteur Θ qui, à un revêtement étale fini de X^{an} associe son image inverse sur $X^{\mathrm{an}}_{\mathrm{réd}}$, et que Θ est pleinement fidèle, ceci montre que Ψ est une équivalence de catégories.

334 On peut supposer X normal. Soit en effet $\widetilde{X}$ le normalisé de X, $p\colon \widetilde{X} \to X$ le morphisme canonique. Comme p est fini, p est un morphisme de descente effective pour la catégorie des revêtements étales (IX.4.7). Le théorème étant supposé démontré pour $\widetilde{X}$, si l'on pose $\widetilde{\mathfrak{X}}' = \mathfrak{X}' \times_{X^{\mathrm{an}}} \widetilde{X}^{\mathrm{an}}$, il existe un revêtement étale $\widetilde{X}'$ de $\widetilde{X}$ et un isomorphisme $\widetilde{X}'^{\mathrm{an}} \simeq \widetilde{\mathfrak{X}}'$. Il résulte alors de 1) que la donnée de descente naturelle que l'on a sur $\widetilde{\mathfrak{X}}'$ se relève en une donnée de descente sur $\widetilde{X}'$ relativement à $\widetilde{X} \to X$; ceci prouve l'existence d'un revêtement étale X' de X tel que l'on ait un isomorphisme $i\colon X'^{\mathrm{an}} \times_{X^{\mathrm{an}}} \widetilde{X}^{\mathrm{an}} \simeq \widetilde{\mathfrak{X}}'$, dont les images inverses par les deux projections de $\widetilde{X}^{\mathrm{an}} \times_{X^{\mathrm{an}}} \widetilde{X}^{\mathrm{an}}$ soient les mêmes. D'après IX.3.2, dont la démonstration est valable dans le cas analytique, le morphisme $\widetilde{X}^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ est un morphisme de descente pour la catégorie des revêtements étales, et par suite i provient d'un isomorphisme $X'^{\mathrm{an}} \simeq \mathfrak{X}'$.

b) Réduction au cas où X est régulier. Soient U l'ouvert des points réguliers de X, $i\colon U \to X$, $i^{\mathrm{an}}\colon U^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ les morphismes canoniques ; comme X est normal, on a $\operatorname{codim}(X-U, X) \geq 2$. Supposons qu'il existe un revêtement étale U' de U tel que l'on ait $U'^{\mathrm{an}} \simeq \mathfrak{X}'|U^{\mathrm{an}}$ et montrons qu'alors U' se prolonge en un revêtement étale X' de X tel que l'on ait $X'^{\mathrm{an}} \simeq \mathfrak{X}'$. Il suffit de voir que U' se prolonge en un revêtement étale X' de X ; en effet on aura alors un isomorphisme $X'^{\mathrm{an}}|U^{\mathrm{an}} \simeq \mathfrak{X}'|U^{\mathrm{an}}$; mais, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont les faisceaux cohérents d'algèbres sur $\mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ définissant respectivement $\mathfrak{X}'$ et X'^{an}, le fait que X soit normal et que l'on ait $\operatorname{codim}(X-U, X) \geq 2$ entraîne que les morphismes canoniques

$$\mathscr{F} \longrightarrow i_*^{\mathrm{an}}(\mathscr{F}|U^{\mathrm{an}}) \qquad \mathscr{G} \longrightarrow i_*^{\mathrm{an}}(\mathscr{G}|U^{\mathrm{an}})$$

335 sont des isomorphismes [11 n° 3 prop.4]. Il en résulte que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ donc aussi X'^{an} et $\mathfrak{X}'$ sont isomorphes.

Soit $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ le morphisme canonique. Comme le problème de prolonger U' à X est local sur X, il suffit de prouver que, pour tout point y de $X^{\mathrm{an}} - U^{\mathrm{an}}$, le revêtement étale $U'_{\varphi(y)} = U' \times_X \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,\varphi(y)}$ de $U_{\varphi(y)} = U \times_X \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,\varphi(y)}$ se prolonge à $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,\varphi(y)}$. Soit H la $\mathscr{O}_U$-Algèbre cohérente définissant U'. Le morphisme canonique

$$\alpha\colon (i_*H)^{\mathrm{an}} \longrightarrow i_*^{\mathrm{an}}(H^{\mathrm{an}}) = \mathscr{F}$$

définit un morphisme de faisceaux de modules sur $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}},y}$:

$$\alpha_y \colon (i_* H)^{\mathrm{an}}_y \longrightarrow \mathscr{F}_y \ ,$$

dont la restriction à $U_y = U_{\varphi(y)} \times_{\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,\varphi(y)}} \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}},y}$ est un isomorphisme. Mais ceci prouve que $H|U_y$ est trivial, donc que $U'_{\varphi(y)}$ se prolonge à $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,\varphi(y)}$.

c) Cas où X est affine régulier. Soit

$$j \colon X \longrightarrow P$$

une compactification de X, où P est un $\mathbb{C}$-schéma projectif et j une immersion ouverte dominante. Grâce au théorème de résolution des singularités [8], on peut trouver un schéma régulier R, un morphisme projectif $r \colon R \to P$, tel que r induise un isomorphisme $r^{-1}(X) \simeq X$ et que
336 $r^{-1}(X)$ soit le complémentaire dans R d'un diviseur à croisements normaux. Soit

$$k \colon X \longrightarrow R$$

l'immersion canonique. On va montrer qu'il existe un revêtement fini normal (5.0) $\mathfrak{R}'$ de R^{an} qui prolonge le revêtement étale X'^{an}. D'après la proposition 5.3 ci-dessous, un tel revêtement est unique ; le problème de prolonger X'^{an} est donc locale sur R^{an} au voisinage de $R^{\mathrm{an}} - X^{\mathrm{an}}$. Or chaque point de $R^{\mathrm{an}} - X^{\mathrm{an}}$ a un voisinage ouvert $\mathfrak{V}$ isomorphe à une boule d'un espace affine $\mathfrak{E}^n$, tel que $\mathfrak{V} - \mathfrak{V} \cap X^{\mathrm{an}}$ soit défini par l'annulation des p premières fonctions coordonnées $z_1, \dots, z_p$, avec $0 \leq p \leq n$. Le groupe fondamental de $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} \cap X^{\mathrm{an}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^p$, et tout revêtement étale de $\mathfrak{U}$ est quotient d'un revêtement de la forme

$$\mathfrak{U}'' = \mathfrak{U}[T_1, \dots, T_p]/(T_1^{n_1} - z_1, \dots, T_p^{n_p} - z_p) \ ,$$

où les n_i sont des entiers > 0, par un sous-groupe H du groupe de Galois $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_p\mathbb{Z}$ de $\mathfrak{U}''$. Or $\mathfrak{U}''$ se prolonge en le revêtement régulier

$$\mathfrak{V}'' = \mathfrak{V}[T_1, \dots, T_p]/(T_1^{n_1} - z_1, \dots, T_p^{n_p} - z_p) \ ,$$

de $\mathfrak{V}$ sur lequel H opère, et le quotient de $\mathfrak{V}''$ par H est le prolongement cherché.

La démonstration s'achève alors grâce à 4.6. Le revêtement $\mathfrak{R}'$ provient d'un revêtement fini R' de R ; la restriction de R' à X est un revêtement X' de X tel que l'on ait $X'^{\mathrm{an}} \simeq \mathfrak{X}'$, et
337 d'après 3.1(iii) X' est un revêtement étale de X.

Corollaire 5.2 *Soient X un $\mathbb{C}$-schéma localement de type fini connexe, $\varphi \colon X^{\mathrm{an}} \to X$ le morphisme canonique, x un point de X^{an}. Soit $\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x)$ le groupe fondamental de l'espace topologique X^{an} au point x, $\pi_1(X, \varphi(x))$ le groupe fondamental du schéma X au point $\varphi(x)$ (V.7). Alors $\pi_1(X, \varphi(x))$ est canoniquement isomorphe au complété de $\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x)$, pour la topologie des sous-groupes d'indice fini.*

Soit en effet $\mathscr{C}$ la catégorie des revêtements étales finis de X^{an}, F le foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathbf{Ens}$ qui, à tout revêtement étale fini $\mathfrak{X}'$ de X^{an} associe l'ensemble des points de $\mathfrak{X}'$ au-dessus de x, et soit $\widehat{\pi}_1(X^{\mathrm{an}}, x)$ le groupe profini associé à $\mathscr{C}$ et F comme il est dit dans V.4. Comme tout revêtement étale fini de X^{an} est quotient du revêtement universel par un sous-groupe d'indice fini, $\widehat{\pi}_1(X^{\mathrm{an}}, x)$ n'est autre que le complété de $\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x)$ pour la topologie des sous-groupes d'indice fini. Le corollaire résulte donc de 5.1 et V.6.10.

Proposition 5.3 *Soient $\mathfrak{X}$ un espace analytique normal, $\mathfrak{Y}$ un sous-ensemble analytique fermé tel que $\mathfrak{U} = \mathfrak{X} - \mathfrak{Y}$ soit dense dans $\mathfrak{X}$. Alors le foncteur qui, à tout revêtement normal fini (5.0) $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ associe sa restriction à $\mathfrak{U}$ est pleinement fidèle.*

Soient $\mathfrak{X}'$ and $\mathfrak{X}''$ deux revêtements finis normaux de $\mathfrak{X}$. On doit montrer que l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{X}'|\mathfrak{U}, \mathfrak{X}''|\mathfrak{U})$$

est bijective. Soient u, v deux $\mathfrak{X}$-morphismes de $\mathfrak{X}'$ dans $\mathfrak{X}''$ dont les restrictions à $\mathfrak{U}$ sont les
338 mêmes et prouvons que $u = v$. Les morphismes u et v coïncident sur l'ouvert dense $\mathfrak{U} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$, donc sur les espaces topologiques sous-jacents. D'après [4 n° 19 §4 cor.5] ceci prouve que l'on a $u = v$.

Soit maintenant u un $\mathfrak{U}$-morphisme de $\mathfrak{X}'|\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{X}''|\mathfrak{U}$ et montrons qu'il se prolonge à $\mathfrak{X}'$ tout entier. On peut supposer $\mathfrak{X}'$ régulier. En effet, $\mathfrak{X}'$ étant normal, on peut trouver un ouvert $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{X}$ dont le complémentaire soit une partie analytique de codimension ≥ 2, tel que $\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{V} = \mathfrak{V}'$ soit régulier. Soit $\mathfrak{V}'' = \mathfrak{X}'' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{V}$ et supposons la proposition démontrée pour $\mathfrak{V}$. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{V}' \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr] \arrow[dd, "g'"'] & & \mathfrak{X}' \arrow[dd, "f'"] & \\
& \mathfrak{V}'' \arrow[rr, "i''"] \arrow[dl, "g''"] & & \mathfrak{X}'' \arrow[dl, "f''"] \\
\mathfrak{V} \arrow[rr, "i"] & & \mathfrak{X} &
\end{tikzcd}$$

À u est associé un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{V}}$-Algèbres $g''_*\mathscr{O}_{\mathfrak{V}''} \to g'_*\mathscr{O}_{\mathfrak{V}'}$, d'où l'on déduit un morphisme

$$i_*g''_*\mathscr{O}_{\mathfrak{V}''} \longrightarrow i_*g'_*\mathscr{O}_{\mathfrak{V}'} \ .$$

Compte tenu des isomorphismes $i'_*\mathscr{O}_{\mathfrak{V}'} \simeq \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$, $i''_*\mathscr{O}_{\mathfrak{V}''} \simeq \mathscr{O}_{\mathfrak{X}''}$ [11 n° 3 prop.4] on en déduit un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Algèbres

$$f''_*\mathscr{O}_{\mathfrak{X}''} \longrightarrow f'_*\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} \ ,$$

d'où le morphisme $\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}''$ cherché.

339 On suppose désormais $\mathfrak{X}'$ régulier. Soient $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' - \mathfrak{U}'$. On considère $\mathfrak{Y}'$ comme sous-espace analytique réduit de $\mathfrak{X}'$; si $\mathfrak{Y}'_1$ est le fermé singulier de $\mathfrak{Y}'$, on a

$\dim \mathfrak{Y}'_1 < \dim \mathfrak{Y}'$ [4 n° 20 D. Th.3]. On voit donc par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{Y}'$ que l'on peut supposer $\mathfrak{Y}'$ lisse. Comme il suffit de prolonger u à un voisinage ouvert de chaque point de $\mathfrak{Y}'$, on peut supposer par le théorème des fonctions implicites que $\mathfrak{X}'$ est une boule d'un espace affine $\mathfrak{E}^n$ et $\mathfrak{Y}'$ le fermé défini par l'annulation des p premières fonctions coordonnées $z_1, \dots, z_p$, avec $0 \leq p \leq n$.

On associe à u une section s de $p\colon \mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ au-dessus de $\mathfrak{U}'$; quitte à restreindre $\mathfrak{X}'$, on peut supposer $p_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}''})$ engendré par des éléments $x_1, \dots, x_q$ de $\Gamma(\mathfrak{X}', p_*\mathscr{O}_{\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}''})$; soient $u_1, \dots, u_q \in \Gamma(\mathfrak{U}', \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$ les images par s de $x_1|\mathfrak{U}', \dots, x_q|\mathfrak{U}'$. Dire que s se prolonge à $\mathfrak{X}'$ revient à dire que les $u_1, \dots, u_q$ se prolongent en des sections de $\Gamma(\mathfrak{X}', \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$. Mais, puisque f est fini, chaque u_i est une série de Laurent en $z_1, \dots, z_p$, à coéfficients des séries entières en $z_{p+1}, \dots, z_n$, qui satisfont à des relations des dépendence intégrale. Il en résulte que u_i est borné donc est une série entière en $z_1, \dots, z_n$, et par suite se prolonge à $\mathfrak{X}'$.

On peut se demander si le foncteur introduit dans 5.3 est une équivalence de catégories. On a une réponse à cette question grâce au théorème de GRAUERT-REMMERT [6] dont nous donnons une démonstration ci-dessous utilisant la résolution des singularités. On aurait aussi pu utiliser le théorème de GRAUERT-REMMERT pour démontrer 5.1 ; c'est ce que l'on faisait
part 68 avant de disposer de [8].

340 **Théorème 5.4** (Théorème de GRAUERT-REMMERT) *Soient $\mathfrak{X}$ un espace analytique normal, $\mathfrak{Y}$ un sous-ensemble analytique fermé tel que $\mathfrak{U} = \mathfrak{X} - \mathfrak{Y}$ soit dense dans $\mathfrak{X}$. Soit $\mathfrak{U}'$ un revêtement normal fini de $\mathfrak{U}$; on suppose qu'il existe une partie analytique fermée rare $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{X}$ telle que la restriction de $\mathfrak{U}'$ à $\mathfrak{U} - \mathfrak{U} \cap \mathfrak{S}$ soit étale. Alors il existe un revêtement fini normal $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ qui prolonge $\mathfrak{U}'$, et $\mathfrak{X}'$ est unique à isomorphisme près.*

L'unicité résulte de 5.3. Le problème de prolonger $\mathfrak{U}'$ est donc local sur $\mathfrak{X}$. On peut supposer $\mathfrak{U}$ régulier et $\mathfrak{U}'$ étale sur $\mathfrak{U}$. En effet l'ensemble des points réguliers de $\mathfrak{U}$ est un ouvert $\mathfrak{V}$ dense dans $\mathfrak{X}$ dont le complémentaire est une partie analytique [4. n° 20 D th.2] et il suffit de remplacer $\mathfrak{U}$ par l'ouvert $\mathfrak{V} - \mathfrak{V} \cap \mathfrak{S}$.

Soit y un point de $\mathfrak{X} - \mathfrak{U}$ et montrons que l'on peut prolonger $\mathfrak{U}'$ à un voisinage de y. Quitte à restreindre $\mathfrak{X}$ à un voisinage ouvert de y, il résulte du théorème de résolution des singularités [8] que l'on peut trouver un espace analytique régulier $\mathfrak{X}_1$, un morphisme projectif $f\colon \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}$ induisant par restriction à $\mathfrak{U}$ un isomorphisme $\mathfrak{U}_1 = f^{-1}(\mathfrak{U}) \simeq \mathfrak{U}$, tel que $\mathfrak{U}_1$ soit le complémentaire dans $\mathfrak{X}_1$ d'un diviseur à croisements normaux. Montrons que $\mathfrak{U}'$ se prolonge en un revêtement fini normal de $\mathfrak{X}_1$. Comme la question est locale sur $\mathfrak{X}_1$, on peut supposer que $\mathfrak{X}_1$ est une boule d'un espace affine $\mathfrak{E}^n$ et que $\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{U}_1$ est défini par l'annulation des p premières fonctions coordonnées $z_1, \dots, z_q$, avec $0 \leq p \leq n$. Le revêtement étale $\mathfrak{U}'$ de $\mathfrak{U}_1$ est quotient d'un revêtement de la forme

$$\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1[T_1, \dots, T_p] / \left(T_1^{n_1} - z_1, \dots, T_p^{n_p} - z_p\right)$$

341 par un sous-groupe H du groupe de Galois de $\mathfrak{U}_2$. Le revêtement $\mathfrak{U}_2$ se prolonge en le revêtement

$$\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1[T_1, \dots, T_p] / \left(T_1^{n_1} - z_1, \dots, T_p^{n_p} - z_p\right)$$

de $\mathfrak{X}_1$ sur lequel H opère, et $\mathfrak{X}_2/H$ prolonge $\mathfrak{U}'$ à $\mathfrak{X}_1$.

Notons $\mathfrak{X}'_1$ le revêtement fini normal de $\mathfrak{X}_1$ qui prolonge $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{F}_1$ la $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_1}$-Algèbre cohérente définie par $\mathfrak{F}_1$. D'après le théorème de finitude de GRAUERT-REMMERT [4 n° 15 th.1.1], $f_*\mathfrak{F}_1$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Algèbre cohérente. Il lui correspond donc un revêtement fini $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ qui est d'ailleurs normal puisque $\mathfrak{X}'_1$ l'est, et $\mathfrak{X}'$ est le prolongement de $\mathfrak{U}'$ cherché.

Remarque 5.5 Dans l'énoncé 5.4, on ne peut supprimer l'hypothèse sur le lieu des points où le morphisme $\mathfrak{U}' \to \mathfrak{U}$ n'est pas étale. Soit par exemple $\mathfrak{X}$ le disque unité du plan complexe, $\mathfrak{U}$ le complémentaire de l'origine dans $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}[T]/(T^2 - \sin 1/z)$, où z est la fonction coordonnée sur $\mathfrak{X}$. Alors $\mathfrak{U}'$ est un revêtement fini normal de $\mathfrak{U}$ qui ne se prolonge pas à $\mathfrak{X}$. Supposons en effet que $\mathfrak{U}'$ se prolonge en un revêtement fini $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$; le lieu des points de $\mathfrak{X}$ où le morphisme $\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ n'est pas étale est alors un fermé analytique qui contient tous les points z tels que l'on ait $\sin 1/z = 0$, ce qui est absurde.

On peut cependant supprimer l'hypothèse sur le lieu singulier du morphisme $\mathfrak{U}' \to \mathfrak{U}$ lorsque l'on a $\operatorname{codim}(\mathfrak{X} - \mathfrak{U}, \mathfrak{X}) \geq 2$. On peut en effet supposer $\mathfrak{U}$ régulier. Le lieu des points de $\mathfrak{U}$ où $\mathfrak{U}' \to \mathfrak{U}$ n'est pas étale est un diviseur de $\mathfrak{U}$, et il résulte du théorème de REMMERT-STEIN
342 [9 th.3] qu'il est la trace sur $\mathfrak{U}$ d'un diviseur de $\mathfrak{X}$. Or, dans ce cas, si $\mathfrak{A}$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{U}}$-Algèbre cohérente telle que $\mathfrak{U}' = \operatorname{Spec an}(\mathfrak{A})$, si $i : \mathfrak{U} \to \mathfrak{X}$ est le morphisme canonique, il suffit de prendre $\mathfrak{X}' = \operatorname{Spec an}(i_*\mathfrak{A})$; on sait en effet que $i_*\mathfrak{A}$ est cohérents [11 n° 1 th.1].

6 Bibliographie

343

[1] N. BOURBAKI, Topologie Générale, Hermann, Paris (1960).

[2] N. BOURBAKI, Algèbre Commutative, Hermann, Paris (1961).

[3] H. CARTAN. Séminaire E.N.S., Paris (1956-57).

[4] H. CARTAN. Séminaire E.N.S., Paris (1960-61).

[5] R. GODEMENT, Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris (1958).

[6] H. GRAUERT et R. REMMERT, Komplexe Räume, Math. Ann., 136 (1958).

[7] M. HAKIM, Schémas relatifs, thèse, Paris (1967).

[8] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Annals of Math., 39 (1964).

[9] R. REMMERT et K. STEIN, Ueber die wesentlichen singularitäten analytischer mengen, Math. Ann., 126 (1953) p. 263–306.

[10] J.P. Serre, Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique, Annales de l'Institut Fourier, VI (1956), p. 1–42.

[11] J.P. Serre, Prolongement des Faisceaux analytiques cohérents, Annales de l'Institut Fourier, XVI (1966), p. 363–374.

Exposé XIII

Propreté cohomologique des faisceaux d'ensembles et des faisceaux de groupes non commutatifs

344

par Mme. M. RAYNAUD [1]

Cet exposé se propose d'utiliser la cohomologie étale pour généraliser certains résultats de IX et X. Il montre aussi comment on peut étendre aux faisceaux en groupes non nécessairement commutatifs les résultats de SGA 5 II qui ont encore un sens pour de tels faisceaux. On suppose connues les notions de cohomologie étale exposées dans SGA 4.

Le résultat principal (2.4) donne un exemple important de morphisme non propre $f\colon\ U \to\ S$, qui soit "cohomologiquement propre en dimension $\leq\ 1$", c'est-à-dire tel que, pour certains faisceaux en groupes F sur U (au sens de la topologie étale), la formation de f_*F et $\mathrm{R}^1\, f_*F$ commute à tout changement de base $S' \to\ S$. Cette propriété est en effet satisfaite par l'ouvert U d'un schéma X propre sur S, complémentaire d'un diviseur D à croisements normaux relativement à S, du moins si l'on impose à F d'être constant fini, d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de S. Si l'on ne suppose plus F d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de S, on a un résultat analogue en remplaçant $\mathrm{R}^1\, f_*F$ par le sous-faisceau $\mathrm{R}^1_t\, f_*F$ obtenu en se bornant à considérer les torseurs sous F "modérément ramifiés sur X relativement à S". En particulier cela permet de montrer que le groupe fondamental modérément ramifié d'une courbe algébrique propre et lisse sur un corps séparablement clos, privée d'un nombre fini de points fermés, est topologiquement de type fini (2.12).

345 Le n° 4 est consacré à la suite exacte d'homotopie et à la formule de Künneth.

part 69 Enfin un appendice donne des variantes utiles du lemme d'Abhyankar démontré dans X.3.6.

[1] D'après des notes inédites de A. Grothendieck.

0 Rappels sur la théorie des champs

Nous utiliserons dans ce qui suit la théorie des champs exposée dans [1] et [2]. Nous nous bornons au cas du site étale d'un schéma. Etant donné un schéma X, notons $X_{\text{ét}}$ le site étale de X. Rappelons qu'un champ sur X est une catégorie fibrée au-dessus de $X_{\text{ét}}$ telle que, pour tout schéma X' étale sur X et pour tout couple d'objet x, y de la fibre $F_{X'}$, le préfaisceau $\mathbf{Hom}_{X'}(x, y)$ soit un faisceau, et telle que, pour tout morphisme étale surjectif $X'' \to X'$, tout objet de $F_{X''}$ muni d'une donnée de descente relativement à $X'' \to X'$ soit image inverse d'un objet de $F_{X'}$.

On note $F(X')$ la catégorie des sections cartésiennes de F/X'. Plus généralement, si $\mathbf{Sch}_X$ est la catégorie des schémas au-dessus de X munie de la topologie étale, le champ F peut s'étendre en un champ $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{Sch}_X$ et, pour tout morphisme $f\colon X' \to X$, on note encore $F(X')$ la catégorie des sections cartésiennes de ce champ $\mathscr{F}$ au-dessus de X'.

Une gerbe est un champ tel que, pour tout schéma X' étale sur X et pour tout couple d'objets x, y de $F_{X'}$, tout morphisme de x dans y soit un isomorphisme, que x et y soient localement isomorphes, et tel que l'ensemble des objets X' de $X_{\text{ét}}$ tels que $F_{X'}$ soit non vide est un raffinement de $X_{\text{ét}}$. Par exemple le champ des torseurs sous un faisceau en groupes est une gerbe qui, de plus, a une section cartésienne. Réciproquement une gerbe qui a une section, i.e. telle qu'il existe un
346 objet x de F_X, est équivalente au champ des torseurs sous le faisceau en groupes $\mathbf{Aut}_X(x)$.

On a une notion évidente de sous-gerbe et de sous-gerbe maximale d'un champ F. Etant donné une section cartésienne x de $F(X)$, il existe une unique sous-gerbe maximale G_x de F telle que x se factorise à travers G_x. On appelle G_x la sous-gerbe engendrée par x ; c'est par définition une gerbe triviale. Le préfaisceau SF défini par

$$SF(X') = \{\text{sous-gerbes maximales de } F|X'\}$$

est un faisceau appelé, faisceau des sous-gerbes maximales de F. Soit O le préfaisceau défini par

$$O(X') = \{\text{classes d'objets de } F_{X'} \text{ mod. isomorphisme}\}.$$

En associant à tout objet x de $F_{X'}$ la sous-gerbe maximale de $F|X'$, engendrée par x, on obtient un morphisme

$$O \to SF\,;$$

d'après [2, III 2.1.4], ce morphisme fait de SF un faisceau associé à O.

Un champ F est dit *constructible* (*resp. ind-$\mathbb{L}$-fini*, $\mathbb{L}$ étant un ensemble de nombres premiers) si, pour tout schéma X' étale sur X et pour tout objet x de $F_{X'}$, il en est ainsi du faisceau $\mathbf{Aut}_{X'}(x)$ [2, VII 2.2.1]. On dit qu'un champ est l-constructible s'il est constructible et si le faisceau des sous-gerbes maximales est constructible.

1 Propreté cohomologique

1.0 Soient S un schéma, $f\colon X \to Y$ un morphisme de S-schémas. Si S' est un S-schéma, on considère le diagramme suivant, dont tous les carrés sont cartésiens :

(1.0.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[d] & Y' \arrow[l, "g"'] \arrow[d] \\ S & S' \arrow[l] \end{tikzcd}.$$

347

Si Y_1 est un schéma étale au-dessus de Y, on pose $X_1 = X \times_Y Y_1$, $Y'_1 = Y' \times_Y Y_1$, et on considère le carré cartésien

(1.0.2)
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "f_1"'] & X'_1 \arrow[l, "h_1"'] \arrow[d, "f'_1"] \\ Y_1 & Y'_1 \arrow[l, "g_1"'] \end{tikzcd}.$$

Définition 1.1 *Soit F un champ sur X. On dit que (F, f) est* cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ *(resp. en dimension $\leqslant 0$, resp. en dimension $\leqslant 1$) si, pour tout S-schéma S', le foncteur canonique (défini de façon évidente par la propriété universelle de l'image inverse de champs) :*

$$g^* f_* F \to f'_* h^* F \qquad \textit{(cf.1.0.1)}$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories).

S'il n'y a pas de confusion possible sur S, en particulier si $S = Y$, on dit cohomologiquement propre au lieu de cohomologiquement propre relativement à S.

1.2 Soit F un faisceau d'ensembles sur X ; soit Φ le champ en catégories discrètes associé à F, i.e. le champ dont la fibre au-dessus de tout schéma X_1 étale sur X est la catégorie discrète ayant pour ensemble d'objets $F(X_1)$. On dit que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. en dimension $\leqslant 0$) si (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ (resp. en dimension $\leqslant 1$).

348 Le morphisme canonique

(1.2.1)
$$g^* f_* F \to f'_* h^* F$$

donne par passage aux champs en catégories discrètes associées le morphisme canonique

$$g^* f_* \Phi \to f'_* h^* \Phi.$$

Par suite dire que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. en dimension $\leqslant 0$) équivaut à dire que, pour tout S-schéma S', le morphisme (1.2.1) est injectif (resp. bijectif).

1.3 Soit F un faisceau en groupes sur X et Φ le champ des torseurs sur X de groupe F [1, II 2.3.2]. On dit que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$, resp. $\leqslant 1$) si (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$, resp. $\leqslant 1$). La condition de propreté cohomologique peut s'expliciter comme suit.

Proposition 1.3.1 *Les notations sont celles de (1.0.1) et (1.0.2). Soit F un faisceau en groupes sur X. On désigne par F' (resp. F_1, resp. F'_1, etc.), l'image inverse de F sur X' (resp. sur X_1, resp. sur X'_1, etc.). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$, resp. $\leqslant 1$).

(ii) Pour tout morphisme $S' \to S$, pour tout schéma Y_1 étale au-dessus de Y, et pour tout torseur P sur X_1 de groupe F_1, si ${}^P F_1$ désigne le groupe tordu de F_1 par P [1, II 4.1.2.3], le morphisme canonique

$$a_0 \colon g_1^*(f_{1*}({}^P F_1)) \to f'_{1*}({}^{P'} F'_1)$$

est injectif (resp. a_0 est bijectif et le morphisme canonique

$$a_1 \colon g^*(\mathrm{R}^1 f_* F) \to \mathrm{R}^1 f'_* F'$$

349 *est injectif, resp. a_0 et a_1 sont bijectifs).*

(ii bis) Pour tout morphisme $S' \to S$, pour tout schéma Y_1 étale au-dessus de Y, pour tout torseur P sur X_1 de groupe F_1, et pour tout torseur R sous ${}^P F_1$, le morphisme canonique

$$\alpha_0 \colon g_1^*(f_{1*} R) \to f'_{1*} R'$$

est injectif (resp. α_0 est bijectif, resp. les morphismes α_0 et

$$\alpha_1 \colon g_1^*(\mathrm{R}^1 f_{1*}({}^P F_1)) \to \mathrm{R}^1 f'_{1*}({}^{P'} F'_1)$$

sont bijectifs).

Démonstration (i) $\Rightarrow$ (ii bis). D'après [1, II 4.2.5] tout torseur R de groupe ${}^P F_1$ est de la forme $R = Q \overset{F_1}{\wedge} P^\circ$, où Q est un torseur de groupe F_1 et P° l'opposé de P. On a alors $R' \simeq Q' \overset{F'_1}{\wedge} P'^\circ$. Soit Φ le champ des torseurs sous F et soient x, y (resp. x', y') les objets de la catégorie fibre $(g^* f_* \Phi)_{Y'_1}$ (resp. $(f'_* \Phi')_{Y'_1}$) associés à P, Q (resp. P', Q'). On a la relation

$$Q \overset{F_1}{\wedge} P^\circ \simeq \mathbf{Hom}_{F_1}(P, Q),$$

et il en résulte que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{Hom}_{Y'_1}(x, y) \simeq g_1^* f_{1*}(Q \overset{F_1}{\wedge} P^\circ), \ \mathbf{Hom}_{Y'_1}(x', y') \simeq f'_{1*}(Q' \overset{F'_1}{\wedge} P'^\circ).$$

Par suite le morphisme α_0 s'identifie au morphisme

$$\mathbf{Hom}_{Y'_1}(x, y) \to \mathbf{Hom}_{Y'_1}(x', y'),$$

d'où il résulte que, si (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$, α_0 est injectif et que, si (F, f) est cohomologiquement propre en dimension $\leqslant 0$, α_0 est bijectif.

Supposons maintenant que (F, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$, i.e. que le morphisme canonique

$$\varphi\colon\ g^* f_* \Phi \to f'_* \Phi'$$

350 soit une équivalence. Soit G le faisceau des sous-gerbes maximales du champ $f_*\Phi$ [1, III 2.1.8] ; on a alors un isomorphisme $G \simeq \mathrm{R}^1 f_* F$. Comme g^*G est le faisceau des sous-gerbes maximales de $g^* f_* \Phi$ [2, III 2.1.5.5], le morphisme α_1 est obtenu à partir de $\varphi | Y'_1$ en prenant les faisceaux des sous-gerbes maximales, donc est un isomorphisme.

(ii bis) $\Rightarrow$ (ii). Il suffit de montrer que, si les morphismes α_0 sont bijectifs, alors les morphismes a_1 sont injectifs. Soient Y'_1 un schéma étale au-dessus de Y', s et t deux éléments de $g^*(\mathrm{R}^1 f_* F)(Y'_1)$ ayant même image dans $\mathrm{R}^1 f'_* F'(Y'_1)$ et montrons que l'on a $s = t$. L'assertion est locale pour la topologie étale de Y'_1 et, compte tenu de la définition de l'image inverse $g^*(\mathrm{R}^1 f_* F)$, on peut supposer que Y'_1 est l'image inverse d'un schéma Y_1 étale au-dessus de Y et que s et t proviennent de torseurs P et Q sur X_1. L'hypothèse faite sur s et t signifie alors que les images inverses P' et Q' de P et Q sur X'_1 sont isomorphes localement pour la topologie étale de Y'_1. Si l'on pose $R = \mathbf{Hom}_{F_1}(P, Q)$, le fait que le morphisme

$$g_1^* f_{1*} R \to f'_{1*} R'$$

soit bijectif prouve que P et Q sont isomorphes localement pour la topologie étale de Y_1, donc que l'on a $s = t$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Pour prouver que φ est fidèle (resp. pleinement fidèle), il suffit de montrer que, si Y_1 est un schéma étale sur Y, si P, Q sont deux torseurs sur X_1 de groupe F_1, si x, y (resp. x', y') sont les objets de $(g^* f_* \Phi)_{Y'_1}$ (resp. $(f'_* \Phi')_{Y'_1}$) associés à P, Q (resp. P', Q'), le morphisme

$$a\colon\ \mathrm{Hom}(x, y) \to \mathrm{Hom}(x', y')$$

est injectif (resp. bijectif). Or a s'identifie au morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(Y'_1, g_1^* f_{1*}(Q \overset{F_1}{\wedge} P^\circ)) \to \mathrm{H}^0(Y'_1, f'_{1*}(Q' \overset{F'_1}{\wedge} P'^\circ)).$$

351 Si l'on a $\mathrm{Hom}(x, y) \neq \emptyset$, alors $Q \overset{F_1}{\wedge} P^\circ$ est un torseur sous ${}^P F_1$ localement trivial sur Y_1 ; il en résulte que $f_{1*}(Q \overset{F_1}{\wedge} P^\circ)$ est un torseur sous $f_{1*}({}^P F_1)$, et que $g_1^* f_{1*}(Q \overset{F_1}{\wedge} P^\circ)$ est un torseur trivial. Le morphisme a s'identifie alors au morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(Y_1, g_1^* f_{1*}({}^P F_1)) \to \mathrm{H}^0(Y'_1, f'_{1*}({}^{P'} F'_1)).$$

Il en est de même si l'on a $\mathrm{Hom}(x', y') \neq \emptyset$ et si a_1 est injectif car alors $Q' \overset{F_1'}{\wedge} P'^{\circ}$ est trivial, et il résulte de l'injectivité de a_1 que P et Q sont localement isomorphes sur Y_1. On en conclut que, si a_0 est injectif (resp. si a_0 est bijectif et a_1 injectif), φ est fidèle (resp. pleinement fidèle).

Il reste à montrer que, si a_0 et a_1 sont bijectifs, le foncteur φ est essentiellement surjectif. Soient Y'' un schéma étale au-dessus de Y', $X'' = X' \times_{Y'} Y''$ et soit P'' un torseur sur X'' de groupe $F'' = F'|X''$. On va montrer qu'il existe un élément x de $(g^* f_* \Phi)_{Y''}$ dont l'image dans $(f'_* \Phi')_{Y''}$ est isomorphe à P''. Soit p'' la classe de P''. Du fait que a_1 est surjectif résulte que l'on peut trouver un morphisme étale surjectif $Y_1'' \to Y''$, un morphisme étale $Y_1 \to Y$ tel que l'on ait un morphisme $Y_1'' \to Y_1'$ et un torseur P_1 sur X_1 de groupe F_1 dont l'image inverse P_1'' sur X_1'' soit isomorphe à l'image inverse de P''. Utilisant le fait que φ est pleinement fidèle, on voit que l'objet x_1 de $(g^* f_* \Phi)_{Y_1''}$ qui correspond à P_1'' est muni d'une donnée de descente relativement à $Y_1'' \to Y''$, donc provient d'un élément x de $(g^* f_* \Phi)_{Y''}$. Comme l'image de x dans $(f'_* \Phi')_{Y''}$ est P'', ceci prouve que φ est essentiellement surjectif et achève la démonstration.

Exemple 1.4 Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme propre. Il résulte de [2, VII 2.2.2] que, pour tout champ ind-fini F sur X, le couple (F, f) est cohomologiquement propre (relativement à Y) en dimension $\leqslant 1$. En particulier, pour tout faisceau d'ensembles (resp. tout faisceau de groupes,
352 resp. tout faisceau en groupes ind-fini) F sur X, (F, f) est cohomologiquement propre en dimension $\leqslant 0$ (resp. en dimension $\leqslant 0$, resp. en dimension $\leqslant 1$).

part 70

Remarques 1.5 a) Soit F un faisceau en groupes sur X tel que (F, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$). Si l'on considère F comme faisceau d'ensembles, (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$), mais la réciproque est fausse.

Soit par exemple Y le spectre d'un anneau de valuation discrète strictement local de point fermé t, de point générique s, $f\colon X \to Y$ un schéma non vide sur Y dont la fibre fermée est vide, F un faisceau en groupes constant non trivial sur X et P un torseur sous F tel que l'on ait $\mathrm{H}^0(X_s, {}^P F|X_s) = 1$. Alors $({}^P F, f)$ est cohomologiquement propre relativement à Y en dimension $\leqslant -1$ lorsque l'on considère ${}^P F$ comme faisceau d'ensembles. Si l'on conside ${}^P F$ comme faisceau en groupes, on a un isomorphisme ${}^{P^{\circ}}({}^P F) \simeq F$; comme le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(X, F) \to \mathrm{H}^0(X_t, F|X_t) = 1$$

n'est pas injectif, ceci prouve que $({}^P F, f)$ n'est pas cohomologiquement propre relativement à Y en dimension $\leqslant -1$.

b) Supposons f cohérent (i.e. quasi-compact et quasi-séparé). Soit F un champ sur X. Pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y', on note $\overline{Y}$ (resp. $\overline{Y}'$) le localisé strict de Y (resp. Y') en $\overline{y}$, et on pose $\overline{X} = X \times_Y \overline{Y}$, $\overline{X}' = X' \times_{Y'} \overline{Y}'$, etc. Pour que (F, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$, resp. $\leqslant 1$), il faut et il suffit que, pour tout S-schéma S' et pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y', le foncteur canonique

$$\overline{F}(\overline{X}) \to \overline{F}'(\overline{X}')$$

soit fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence).

353 En effet, si S' est un S-schéma, pour que le foncteur

$$g^* f_* F \to f'_* F'$$

soit fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence), il faut et il suffit qu'il en soit ainsi du foncteur induit sur les fibres aux différents points géométriques $\overline{y}'$ de $\overline{Y}'$ [2, III 2.1.5.9]. L'assertion résulte donc du calcul des fibres géométriques de l'image directe d'un champ par un morphisme cohérent [2, VII 2.1.5].

c) Soit F un champ sur X. Le fait que (F, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$, resp. $\leqslant 1$) est local sur Y pour la topologie étale.

   Soit S' un S-schéma, F' l'image inverse de F sur X' (cf. (1.0.1)). Si (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$, il en est de même de (F', f'). Mais, si (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$), il n'en est pas nécessairement de même de (F', f').

   Soit par exemple S' un anneau de valuation discrète, $f' \colon E_{S'} \to S'$ l'espace affine au-dessus de S', x un point fermé de $E_{S'}$ au-dessus du point générique de S' et F' le faisceau d'ensembles sur $E_{S'}$ dont la restriction à $E_{S'} - \{x\}$ est le faisceau constant à un élément et dont la fibre en un point géométrique au-dessus de x a deux éléments. Alors (F', f') n'est pas cohomologiquement propre relativement à S' en dimension $\leqslant -1$. Soient $S = S'[Z]$, $f \colon E_S \to S$ l'espace affine sur S et T une partie fermée de $X = E_S$ qui ne rencontre par le fermé $Z = 0$ et telle que $f(T)$ contienne le point générique de S. Soient G l'image inverse de F' sur X et F le faisceau sur X obtenu en prolongeant $G|X - T$ par le vide. Alors (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$, mais il

354 n'en est plus de même après le changement de base $S' \to S$ défini par $Z = 0$.

d) Soit F un champ sur X tel que (F, f) soit cohomologiquement propre relativement à Y en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$, resp. $\leqslant 1$). Alors, pour tout point géométrique $\overline{y}$ de Y, le foncteur canonique

$$(f_* F)_{\overline{y}} \to F(X_{\overline{y}})$$

   est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories).

Proposition 1.6 *Soient $f \colon X \to Y$ et $g \colon Y \to Z$ deux S-morphismes, Φ un champ sur X.*

1) Supposons que (Φ, f) et $(f_*\Phi, g)$ soient cohomologiquement propres relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$, resp. $\leqslant 1$). Alors il en est de même de (Φ, gf).

2) Supposons que (Φ, gf) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. que (Φ, gf) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ et (Φ, f) cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$, resp. que (Φ, gf) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$ et (Φ, f) cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$). Alors $(f_*\Phi, g)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. en dimension $\leqslant 0$, resp. en dimension $\leqslant 1$).

Pour tout S-schéma S', on considère le diagramme suivant, dont tous les carrés sont cartésiens :

(1.6.1)
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h"'] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "k"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & S' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & S \end{tikzcd} .$$

le morphisme canonique
$$m^*(g_*f_*\Phi) \to g'_*f'_*(h^*\Phi)$$
355 s'identifie au composé des morphismes canoniques

$$m^*(g_*f_*\Phi) \xrightarrow{i} g'_*(k^*f_*\Phi) \xrightarrow{j} g'_*f'_*(h^*\Phi).$$

1) L'hypothèse entraîne que i et j sont fidèles (resp. pleinement fidèles, resp. des équivalences) ; il en est donc de même de ji.
2) L'hypothèse entraîne que ji est fidèle (resp. que ji est pleinement fidèle et j fidèle, resp. que ji est une équivalence et j pleinement fidèle) ; il en résulte que i est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence).

Corollaire 1.7 *Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ deux S-morphismes, et soit F un faisceau en groupes sur X. Supposons que (F, gf) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. que (F, gf) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ et que (F, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$). Alors (f_*F, g) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. en dimension $\leqslant 0$).*

Reprenons les notations de (1.6.1) et, pour tout schéma Y_1 étale au-dessus de Y, notons f_1, F_1 les images inverses respectives de f, F par le morphisme $Y_1 \to Y$. Soient Φ le champ des torseurs sous F et Ψ le champ des torseurs sous f_*F. On a un foncteur canonique

$$\varphi\colon \Psi \to f_*\Phi,$$

obtenu en associant à tout schéma Y_1 étale sur Y et à tout torseur P sur Y_1 de groupe $f_{1*}F_1$ le torseur $\tilde{P}$ sur X_1 déduit de f_1^*P par l'extension du groupe structural $f_1^*f_{1*}F_1 \to F_1$. Le foncteur φ est pleinement fidèle. En effet, si P et Q sont deux torseurs sur Y_1 de groupe $f_{1*}F_1$, on a un morphisme canonique
$$\mathbf{Isom}_{f_{1*}F_1}(P, Q) \to f_{1*}(\mathbf{Isom}_{F_1}(\tilde{P}, \tilde{Q}))$$
356 qui est un isomorphisme car il en est ainsi localement. On en déduit que le morphisme canonique

$$\mathrm{Isom}_{f_{1*}F_1}(P, Q) \to \mathrm{Isom}_{F_1}(\tilde{P}, \tilde{Q})$$

est un isomorphisme, donc que φ est pleinement fidèle.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} g'_* k^* \Psi \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g'_* k^*(\varphi)"'] & m^*(g_* \Psi) \arrow[d, "m^* g_*(\varphi)"] \\ g'_* k^*(f_* \Phi) \arrow[r, "j"] & m^*(g_* f_* \Phi) \end{tikzcd} ,$$

où i et j sont les morphismes de changement de base. Il résulte de 1.6 2) que j est fidèle (resp. pleinement fidèle). Comme $g'_* k^*(\varphi)$ et $m^* g_*(\varphi)$ sont pleinement fidèles, on déduit du diagramme ci-dessus que i est fidèle (resp. pleinement fidèle).

Corollaire 1.8 *Soient $f\colon X \to Y$ un S-morphisme cohérent, $g\colon Y \to Z$ un S-morphisme propre, Φ un champ ind-fini sur X [2, VII 2.2.1]. Supposons que (Φ, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$, resp. $\leqslant 1$), alors il en est de même de (Φ, gf).*

Comme f est cohérent, $f_*\Phi$ est un champ ind-fini (SGA 4 IX 1.6 (ii)). Le corollaire résulte
part 71 donc de 1.6 1) et 1.4.

Corollaire 1.9 *Soient $f\colon X \to Y$ un S-morphisme entier, $g\colon Y \to Z$ un S-morphisme. Si F est un faisceau d'ensembles sur X, pour que (f_*F, g) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$), il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de (F, gf). Si F est un faisceau en groupes sur X, pour que (f_*F, g) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. $\leqslant 0$, resp. $\leqslant 1$), il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de (F, gf).*

357 L'assertion relative au cas d'un faisceau d'ensembles résulte de 1.6 et du fait que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$. Soient F un faisceau en groupes sur X et Φ le champ des torseurs sous F. D'après SGA 4 VIII 5.8, tout torseur sous F est localement trivial sur Y. Il en résulte que le champ $f_*\Phi$ est équivalent au champ des torseurs sous f_*F, l'équivalence étant obtenue en associant à tout schéma Y_1 étale sur Y et à tout torseur P sur $X_1 = X \times_Y Y_1$ de groupe $F|X_1$ le torseur f_*P de groupe $f_*F|Y_1$. Comme (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$, le corollaire résulte donc de 1.6.

Définitions 1.10

1.10.1 Soit E une catégorie et considérons un diagramme

$$\Phi \xrightarrow{p} \Phi_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \Phi_2 ,$$

où Φ, Φ_1, Φ_2 sont des catégories fibrées au-dessus de E et les flèches des morphismes de catégories fibrées, et soit

$$a\colon p_1 p \xrightarrow{\sim} p_2 p$$

un isomorphisme de foncteurs.

On dit que le diagramme ci-dessus est exact si la condition suivante est satisfaite

a) Pour tout couple d'objets x, y de Φ et tout morphisme $f\colon p(x) \to p(y)$ tel que l'on ait $p_1(f) = p_2(f)$ ($p_1 p$ et $p_2 p$ étant identifiés grâce à a), il existe un unique morphisme $g\colon x \to y$ tel que l'on ait $p(g) = f$.

1.10.2 Considérons le diagramme

$$\Phi \xrightarrow{p} \Phi_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \Phi_2 \overset{p_{23}}{\underset{p_{12}}{\overset{p_{31}}{\rightrightarrows\!\!\!\to}}} \Phi_3\ ,$$

358 où Φ, Φ_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, sont des catégories fibrées sur E et les flèches des morphismes de catégories fibrées. Supposons donnés des isomorphismes de foncteurs

$$a\colon p_1 p \xrightarrow{\sim} p_2 p$$

$$a_1\colon p_{31}p_2 \xrightarrow{\sim} p_{12}p_1,\ a_2\colon p_{12}p_2 \xrightarrow{\sim} p_{23}p_1,\ a_3\colon p_{23}p_2 \xrightarrow{\sim} p_{31}p_1$$

tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
p_{23}p_1p \arrow[r, "\mathrm{id}.a"] & p_{23}p_2p \arrow[r, "a_3.\mathrm{id}"] & p_{31}p_1p \arrow[d, "\mathrm{id}.a"] \\
p_{12}p_2p \arrow[u, "a_2.\mathrm{id}"] & p_{12}p_1p \arrow[l, "\mathrm{id}.a"] & p_{31}p_2p \arrow[l, "a_1.\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}\ .$$

On identifie p_1p et p_2p, $p_{31}p_2$ et $p_{12}p_1$, etc.

On dit que le diagramme ci-dessus est exact si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Analogue à la condition a) de 1.10.1.

b) Pour tout objet x_1 de Φ_1 et pour tout isomorphisme $u\colon p_1(x_1) \xrightarrow{\sim} p_2(x_1)$ tel que l'on ait

(1.10.2.1) $$p_{23}(u)p_{31}(u) = p_{12}(u)^{-1},$$

il existe un objet x de Φ tel que l'on ait un isomorphisme $i\colon p(x) \xrightarrow{\sim} x_1$ rendant commutatif le diagramme

(1.10.2.2) $$\begin{tikzcd}
p_1p(x) \arrow[r, equal] \arrow[d, "p_1(i)"'] & p_2p(x) \arrow[d, "p_2(i)"] \\
p_1(x_1) \arrow[r, "\sim"', "u"] & p_2(x_1)
\end{tikzcd}$$

1.10.3 On définit de façon évidente la notion de morphisme de diagrammes exacts de catégories fibrées au-dessus d'une catégorie E.

359

1.10.4 Nous utiliserons en particulier la notion de diagramme exact dans le cas où E est un site et Φ, Φ_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, des champs sur E.

Soient $f\colon E \to E'$ un morphisme de sites et

$$\Phi \xrightarrow{p} \Phi_1 \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \Phi_2 \overset{p_{23}}{\underset{p_{12}}{\overset{p_{31}}{\rightrightarrows}}} \Phi_3 \tag{1.10.4.1}$$

un diagramme exact de champs sur E. On obtient par image directe un diagramme

$$f_*\Phi \longrightarrow f_*\Phi_1 \rightrightarrows f_*\Phi_2 \rightrightarrows f_*\Phi_3$$

qui est évidemment exact.

Si $h\colon E'' \to E$ est un morphisme de sites, on a de même un diagramme exact

$$h^*\Phi \xrightarrow{p''} h^*\Phi_1 \overset{p''_1}{\underset{p''_2}{\rightrightarrows}} h^*\Phi_2 \overset{p''_{23}}{\underset{p''_{12}}{\overset{p''_{31}}{\rightrightarrows}}} h^*\Phi_3$$

Vérifions d'abord la condition a) de 1.10.2. Soient F'' un objet de E'', x'' et y'' deux objets de $(h^*\Phi)_{F''}$, x''_1 et y''_1 leurs images respectives dans $h^*\Phi_1$ et x''_2, y''_2 leurs images dans $h^*\Phi_2$. Soit $u''_1\colon x''_1 \to y''_1$ un morphisme tel que l'on ait $p''_1(u''_1) = p''_2(u''_1)$ et prouvons que u''_1 provient d'un unique morphisme $u''\colon x'' \to y''$. La question étant locale sur F'', on peut supposer qu'on a un objet F_1 de E, un morphisme de F'' dans l'image inverse F''_1 de F_1 par h, des objets x, y de Φ_{F_1} dont les images inverses sur F'' sont x'' et y''. Soient x_1, y_1 (resp. x_2, y_2) les images de x, y dans Φ_1 (resp. Φ_2). On peut supposer que u''_1 provient d'un morphisme $u_1\colon x_1 \to y_1$, tel que l'on ait $p_1(u_1) = p_2(u_1)$. Vu l'exactitude de (1.10.4.1), on obtient un unique morphisme $u\colon x \to y$ dont l'image inverse par h est le morphisme u'' cherché.

360 La condition b) de 1.10.2 se vérifie de façon analogue. Soient x''_1 un objet de $(h^*\Phi_1)_{F''}$, $u''\colon p''_1(x''_1) \to p''_2(x''_1)$ un morphisme satisfaisant à la relation

$$p''_{23}(u'')p''_{31}(u'') = p''_{12}(u'')^{-1},$$

et prouvons qu'il existe un objet x'' de $(h^*\Phi)_{F''}$ et un isomorphisme $i''\colon p''(x'') \simeq x''_1$ rendant commutatif un diagramme analogue à (1.10.2.2). Comme la question est locale sur F'', on peut supposer qu'on a un objet F_1, un morphisme $F'' \to F''_1$ comme ci-dessus, et un objet x_1 de $(\Phi_1)_{F_1}$ dont l'image inverse dans $(h^*\Phi_1)_{F''}$ est x''_1. De même on peut supposer que u'' provient d'un morphisme $u\colon p_1(x_1) \to p_2(x_1)$ satisfaisant à (1.10.2.2). L'existence d'un objet x de Φ_{F_1}, dont l'image inverse par h soit un élément x'' répondant à la question, résulte alors de l'exactitude de (1.10.4.1).

Exemples 1.11 1) Soit $f\colon X_1 \to X$ un *morphisme de descente* pour la catégorie des faisceaux étales sur des schémas variables (par exemple un morphisme universellement submersif (SGA 4 VIII 9.3)). Soient $X_2 = X_1 \times_X X_1$, $g\colon X_2 \to X$ la projection canonique et

F un faisceau d'ensembles sur X. Il résulte alors de loc. cit. que l'on a une suite exacte de faisceaux d'ensembles

$$F \longrightarrow f_* f^* F \rightrightarrows g_* g^* F \, . \tag{1.11.1}$$

Si Φ est le champ en catégories discrètes associé à F et Φ_3 le champ final sur X, i.e. le champ dont toutes les fibres sont réduites à un seul élément ayant pour seul morphisme le morphisme identique, dire que la suite (1.11.1) est exacte revient à dire qu'il en est ainsi du diagramme de champs

$$\Phi \longrightarrow f_* f^* \Phi \rightrightarrows g_* g^* \Phi \mathrel{\substack{\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow}} \Phi_3 \, .$$

361

2) Soit $f\colon X_1 \to X$ un *morphisme de descente effective* pour la catégorie des faisceaux étales sur des schémas variables (par exemple un morphisme propre surjectif, ou un morphisme entier surjectif, ou un morphisme fidèlement plat localement de présentation finie (SGA 4 VIII 9.4)). Soient $X_2 = X_1 \times_X X_1$, $g\colon X_2 \to X$ la projection canonique, $X_3 = X_1 \times_X X_1 \times_X X_1$, $h\colon X_3 \to X$ le morphisme canonique. Soient Φ un champ sur X, $\Phi_1 = f_* f^* \Phi$, $\Phi_2 = g_* g^* \Phi$, $\Phi_3 = h_* h^* \Phi$. On a alors un diagramme exact

$$\Phi \longrightarrow \Phi_1 \rightrightarrows \Phi_2 \mathrel{\substack{\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow}} \Phi_3,$$

où les flèches sont les morphismes canoniques associés aux projections.

Considérons en effet Φ comme un champ sur la catégorie $\mathbf{Sch}_X$ des schémas au-dessus de X, munie de la topologie étale. Alors, d'après [2, VII 2.2.8], Φ est aussi un champ pour la topologie la plus fine sur $\mathbf{Sch}_X$ pour laquelle les morphismes couvrants sont les morphismes de descente effective pour la catégorie des faisceaux étales. L'exactitude du diagramme ci-dessus en résulte aussitôt.

part 72

Proposition 1.12 *Soient S un schéma, $f\colon X \to Y$ un S-morphisme.*

1) Soit

$$\Phi \longrightarrow \Phi_1 \rightrightarrows \Phi_2$$

un diagramme exact de champs sur X. Supposons que (Φ_1, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ et que (Φ_2, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$. Alors (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$.

2) Soit

$$\Phi \longrightarrow \Phi_1 \rightrightarrows \Phi_2 \mathrel{\substack{\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow}} \Phi_3$$

un diagramme exact de champs sur X. Supposons que (Φ, f) soit cohomologiquement
362 *propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$, que (Φ_2, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ et que (Φ_3, f) soit cohomologiquement propre à S en dimension $\leqslant -1$. Alors (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$.*

Pour tout S-schéma S', on considère le diagramme commutatif suivant dont tous les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & S' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Démontrons 2), la démonstration de 1) étant analogue. Comme les foncteurs image directe et image inverse transforment diagramme exact de champs en diagramme exact (1.10.4), on a le morphisme de diagrammes exacts de champs suivant :

$$\begin{tikzcd} g^*f_*\Phi \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & g^*f_*\Phi_1 \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] \arrow[d, "\varphi_1"'] & g^*f_*\Phi_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "\varphi_2"'] & g^*f_*\Phi_3 \arrow[d, "\varphi_3"'] \\ f'_*h^*\Phi \arrow[r] & f'_*h^*\Phi_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & f'_*h^*\Phi_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & f'_*h^*\Phi_3 \end{tikzcd} .$$

Par hypothèse φ_1 est une équivalence de catégories, φ_2 est pleinement fidèle et φ_3 fidèle. Il résulte donc du diagramme précédent que φ est une équivalence.

Proposition 1.13 *Soit $f\colon X \to Y$ un S-morphisme.*

1) *Soit*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & H \end{tikzcd}$$

un diagramme exact de faisceaux d'ensembles sur X. Supposons que (G, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ et que (H, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$. Alors (F, f) est cohomologiquement
363 *propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$.*

2) *Soit $F \to G$ un monomorphisme de faisceaux en groupes sur X. Si Y_1 est un schéma étale sur Y, on pose $X_1 = Y_1 \times_Y X$, et on note f_1 (resp. F_1, resp. G_1) l'image inverse de f (resp. F, resp. G) sur Y_1 (cf. 1.0.2). Supposons que (G, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ (resp. en dimension $\leqslant 1$) et que, pour tout schéma Y_1 étale sur Y et pour tout torseur Q sous G_1, $(Q/F_1, f_1)$ soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ (resp. en dimension $\leqslant 0$). Alors (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ (resp. en dimension $\leqslant 1$).*

3) *Soit $F \to G$ un monomorphisme de faisceaux en groupes sur X. Supposons que (F, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$ et que (G, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$. Alors, pour tout torseur Q sous G, $(Q/F, f)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$.*

Démonstration.

1) Soit Φ (resp. Φ_1, resp. Φ_2) le champ en catégories discrètes associé à F (resp. G, resp. H) et soit Φ_3 le champ final sur X. On a alors un diagramme exact

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r] & \Phi_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \Phi_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \Phi_3 \end{tikzcd} .$$

Par hypothèse (Φ_1, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$ et (Φ_2, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ (1.2). Comme (Φ_3, f) est évidemment cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$, il résulte de 1.12 que (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$, i.e. que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$.

2) Montrons d'abord que, si (G, f) est cohomologiquement propre relativement à S en di-
364 mension $\leqslant 0$ et si les $(Q/F_1, f_1)$ sont cohomologiquement propres relativement à S en dimension $\leqslant -1$, alors (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$. D'après 1.3.1 il suffit de prouver que, pour tout schéma Y_1 étale au-dessus de Y et pour tout torseur P sur X_1 de groupe F_1, $({}^P F_1, f_1)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ quand on considère ${}^P F_1$ comme un faisceau d'ensembles, et que le morphisme canonique

$$d\colon g^*(\mathrm{R}^1 f_* F) \to \mathrm{R}^1 f'_* F'$$

est injectif. La première assertion résulte aussitôt de 1) car, si Q désigne le torseur déduit de P par l'extension $F_1 \to G_1$ du groupe structural, on a un isomorphisme ${}^Q G_1/{}^P F_1 \xrightarrow{\sim} Q/F_1$.

Montrons que d est injectif. Il suffit de prouver que, si Y_1 est un schéma étale au-dessus de Y, si P et $\tilde{P}$ sont deux torseurs sous F_1 dont les images inverses P' et $\tilde{P}'$ sur X'_1 sont isomorphes, alors, quitte à faire une extension étale surjective de Y_1, P et $\tilde{P}$ deviennent isomorphes. Choisissons un isomorphisme $p'\colon P' \xrightarrow{\sim} \tilde{P}'$. Soient Q (resp. $\tilde{Q}$) le torseur déduit de P (resp. $\tilde{P}$) par l'extension du groupe structural $F_1 \to G_1$. Les images inverses Q' (resp. $\tilde{Q}'$) de Q (resp. $\tilde{Q}$) sur X'_1 se déduisent de P' (resp. $\tilde{P}'$) par extension du groupe structural $F'_1 \to G'_1$; soit $q'\colon Q' \xrightarrow{\sim} \tilde{Q}'$ l'isomorphisme que l'on obtient de même à partir de p'. Comme (G, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$, on peut supposer, quitte à faire une extension étale surjective de Y_1, que q' est l'image d'un isomorphisme $q\colon Q \xrightarrow{\sim} \tilde{Q}$. Au torseur P (resp. $\tilde{P}$) est associée une section x de Q/F_1 (resp. une section $\tilde{x}$ de $\tilde{Q}/F_1$), et, pour que P et $\tilde{P}$ soient isomorphes, il faut et il suffit que l'on ait un isomorphisme $Q \xrightarrow{\sim} \tilde{Q}$ tel que l'isomorphisme

$$e\colon \mathrm{H}^0(X_1, Q/F_1) \to \mathrm{H}^0(X_1, \tilde{Q}/F_1)$$

qu'on en déduit, transforme x en $\tilde{x}$. On prend l'isomorphisme q. Les sections $e(x)$ et $\tilde{x}$ de $\mathrm{H}^0(X_1, \tilde{Q}/F_1)$ ont même image dans $\mathrm{H}^0(X'_1, \tilde{Q}'/F'_1)$. Comme $(\tilde{Q}/F_1, f_1)$ est cohomolo-
365 giquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$, quitte à faire une extension étale surjective de Y_1, on a bien $e(x) = \tilde{x}$, ce qui démontre l'injectivité de d.

Pour achever la démonstration, il reste à prouver que, si (G, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$, et si, pour tout schéma Y_1 étale au-dessus de Y et tout torseur Q sur X_1 de groupe F_1, $(Q/F_1, f_1)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$, alors le morphisme d est surjectif. Soient P' un torseur sur X'_1 de groupe F'_1, Q' le torseur sous G'_1 obtenu à partir de P' par extension du groupe structural. La donnée de P' est équivalente à celle de Q' et d'une section x' de $\mathrm{H}^0(X'_1, Q'/F'_1)$. Il résulte alors de la surjectivité du morphisme

$$g^*(\mathrm{R}^1 f_*G) \to \mathrm{R}^1 f'_*G'$$

que, quitte à faire une extension étale surjective de Y_1, il existe un torseur Q sous G_1, dont l'image inverse sur X'_1 est isomorphe à Q'. Utilisant le fait que $(Q/F_1, f_1)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$, on peut de même supposer qu'il existe un élément x de $\mathrm{H}^0(X_1, Q/F_1)$ dont l'image dans $\mathrm{H}^0(X'_1, Q'/F'_1)$ est x'. La donnée de Q et de x détermine un torseur P sous F_1, dont l'image inverse sur X_1 est isomorphe à P', ce qui démontre la surjectivité de d.

3) Montrons que $(Q/F, f)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$, i.e. que, pour tout S-schéma S', pour tout schéma Y_1 étale au-dessus de Y, si x, $\tilde{x}$ sont deux éléments de $\mathrm{H}^0(X_1, Q_1/F_1)$ dont les images x', $\tilde{x}'$ dans $\mathrm{H}^0(X'_1, Q'_1/F'_1)$ sont égales, alors, après extension surjective de Y_1, on a $x = \tilde{x}$. A x (resp. $\tilde{x}$) est associé un torseur P (resp. $\tilde{P}$) sous F_1, tel que Q_1 se déduise de P (resp. $\tilde{P}$) par l'extension $F_1 \to G_1$ du groupe structural. De la relation $x' = \tilde{x}'$ résulte que l'on a un isomorphisme $u' \colon P' \xrightarrow{\sim} \tilde{P}'$ tel que l'isomorphisme induit sur Q'_1 par u' soit l'identité. Comme (F, f) est
366 cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$, on en déduit que, après extension étale surjective de Y_1, on a un isomorphisme $u \colon P \to \tilde{P}$ relevant u' ; le fait que (G, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant -1$ entraîne alors que l'on a $x = \tilde{x}$.

Montrons que $(Q/F, f)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$. Soient Y'' un schéma étale sur Y' et x'' un élément de $\mathrm{H}^0(X'', Q''/F'')$. A x'' est associé un torseur P'' sur X'' de groupe F''. Comme (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$, on peut trouver des morphismes étales surjectifs $Y''_1 \to Y''$ et $Y_1 \to Y$, tels que l'on ait un morphisme $Y''_1 \to Y'_1$, et un torseur P sur X_1 de groupe F_1 dont l'image inverse sur X''_1 soit isomorphe à l'image inverse de P''. Il résulte alors du fait que (G, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 0$ que l'on peut même choisir Y''_1 et Y_1 tels que le torseur déduit de P par extension du groupe structural $F_1 \to G_1$ soit isomorphe à Q_1 ; il correspond à P un élément x de $\mathrm{H}^0(X_1, Q_1/F_1)$, dont l'image dans $\mathrm{H}^0(X''_1, Q''_1/F''_1)$ est isomorphe à l'image inverse de x'',
part 73 ce qui achève la démonstration.

Proposition 1.14 *Soient $f \colon X \to S$ un S-schéma, F un faisceau d'ensembles ou de groupes sur X (resp. un faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes, où $\mathbb{L}$ est un ensemble de nombres premiers). Supposons F localement constant, (F, f) cohomologiquement propre en dimension $\leqslant 0$ (resp. en dimension $\leqslant 1$) et f localement 0-acyclique (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$) (SGA 4 XV 1.11). Alors, pour toute spécialisation $\overline{s}_1 \to \overline{s}_2$ de points géométriques de S, le morphisme de spécialisation (SGA 4 VIII 7.1)*

$$a_0 \colon (f_*F)_{\overline{s}_2} \to (f_*F)_{\overline{s}_1}$$

est un isomorphisme, et, si F est un faisceau en groupes, le morphisme

$$a_1 \colon (\mathrm{R}^1 f_*F)_{\overline{s}_2} \to (\mathrm{R}^1 f_*F)_{\overline{s}_1}$$

est injectif (resp. les morphismes a_0 et a_1 sont des isomorphismes).

367 La démonstration s'obtient en recopiant mot à mot celle de SGA 4 XVI 2.3, mais en y remplaçant l'expression "propre" par l'expression "cohomologiquement propre".

Corollaire 1.15 *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme, Φ un champ sur X, $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers. Supposons que, pour tout schéma X_1 étale sur X et pour tout couple d'objets x, y de Φ_{X_1}, le faisceau $\mathbf{Hom}_{X_1}(x, y)$ soit localement constant, que le faisceau $\mathbf{Aut}_{X_1}(x)$ soit un ind-$\mathbb{L}$-groupe localement constant, et que le faisceau des sous-gerbes maximales $S\Phi$ de Φ [1 III 2.1.7] soit localement constant. Supposons que (Φ, f) soit cohomologiquement propre en dimension $\leqslant 1$ et que f soit localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$. Alors, pour toute spécialisation $\overline{s}_1 \to \overline{s}_2$ de points géométriques de S, le morphisme de spécialisation*

$$a\colon (f_*\Phi)_{\overline{s}_2} \to (f_*\Phi)_{\overline{s}_1}$$

est une équivalence de catégories.

Soient $\overline{S}_1$ (resp. $\overline{S}_2$) le localisé strict de S en $\overline{s}_1$ (resp. le localisé strict de S en $\overline{s}_2$), $\overline{X}_2$, $\overline{\Phi}_2$ (resp. $\overline{X}_1$, $\overline{\Phi}_1$) les images inverses de X_2, Φ_2 sur $\overline{S}_2$ (resp. de X_1, Φ_1 sur $\overline{S}_1$) et considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}_1 & \xrightarrow{h} & \overline{X}_2 \\ {\scriptstyle \overline{f}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_2} \\ \overline{S}_1 & \xrightarrow{g} & \overline{S}_2 \end{array} .$$

On doit montrer que le foncteur

$$\varphi\colon \overline{\Phi}_2(\overline{X}_2) \to \overline{\Phi}_1(\overline{X}_1)$$

368 est une équivalence. Le foncteur φ est pleinement fidèle ; soient en en effet x, y deux objets de $(\overline{\Phi}_2)_{\overline{X}_2}$; le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\overline{X}_2}(x, y) \to \mathrm{Hom}_{\overline{X}_1}(\varphi(x), \varphi(y))$$

s'identifie au morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(\overline{X}_2, \mathbf{Hom}_{\overline{X}_2}(x, y)) \to \mathrm{H}^0(\overline{X}_1, h^*(\mathbf{Hom}_{\overline{X}_2}(x, y)).$$

Ce morphisme est un isomorphisme d'après 1.14.

Montrons que φ est une équivalence. Soient x_1 un objet de $\overline{\Phi}_1(\overline{X}_1)$ et G_1 la sous-gerbe maximale de $\overline{\Phi}_1$ engendrée par x_1. Le morphisme

$$\mathrm{H}^0(\overline{X}_2, S\overline{\Phi}_2) \to \mathrm{H}^0(\overline{X}_1, h^*(S\overline{\Phi}_2)) = \mathrm{H}^0(\overline{X}_1, S\overline{\Phi}_1)$$

est bijectif, et il existe donc une sous-gerbe maximale G_2 de $\overline{\Phi}_2$ telle que h^*G_2 soit isomorphe à G_1. Il suffit alors de prouver que le foncteur

$$G_2 \to h_*h^*G_2$$

est une équivalence. Mais, sous cette forme, la question est locale pour la topologie étale sur $\overline{X}_2$. On peut donc supposer que G_2 est une gerbe de torseurs sous le groupe des automorphismes d'un objet de G_2, cas où l'assertion résulte de 1.14.

Corollaire 1.16 *Les hypothèses sont celles de 1.14. Si l'on suppose de plus que F est un faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes) et que f_*F (resp. $\mathrm{R}^1 f_*F$) est constructible, alors f_*F (resp. $\mathrm{R}^1 f_*F$) est localement constant.*

Le corollaire résulte de 1.14 grâce à SGA 4 IX 2.11.

Remarque 1.17 Rappelons que la condition f localement 0-acyclique est satisfaite si f est plat à fibres séparables, X et Y localement noethériens (SGA 4 XV 4.1), et que la condition f loca-
369 lement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ est satisfaite si f est lisse, $\mathbb{L}$ étant l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristiques résiduelles de S (SGA 4 XV 2.1).

2 Un cas particulier de propreté cohomologique : diviseurs à croisements normaux relatifs

2.0 Soient R un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et L une K-algèbre étale ; L est alors produit direct d'un nombre fini de corps L_i, où L_i est une extension étale de K. Si L_i' désigne l'extension galoisienne engendrée par L_i dans une clôture algébrique de L_i, on dit que L est *modérément ramifiée* sur R si les L_i' sont des extensions modérément ramifiées au sens de X 3, i.e. si un groupe d'inertie I_i de $L_i'|K$ est d'ordre premier à la caractéristique résiduelle p de R.

On sait que I_i est en tous cas extension d'un groupe cyclique d'ordre premier à p par un p-groupe. (Cela résulte de [5 ch.IV prop.7 cor.4] lorsque l'extension résiduelle de R est séparable. La démonstration donnée dans loc. cit. s'étend au cas général de la façon suivante. Reprenons les hypothèses et les notations de loc. cit. mais sans supposer l'extension résiduelle séparable. Soit H_i le sous-groupe du groupe d'inertie G_0, ensemble des éléments s de G_0 tels que l'on ait $s\pi/\pi \in U^i$ pour toute uniformisante π de A_L. On vérifie alors que G_0/H_1 est un groupe d'ordre premier à p et que, pour $i \geqslant 1$, les H^i/H^{i+1} sont des p-groupes, d'où l'on déduit le résultat annoncé.)

2.0.1 Dans le cas où R est strictement local, on a la caractérisation simple suivante : la K-algèbre L est modérément ramifiée sur R si et seulement si les $[L_i : K]$ sont premiers à p. De plus, si L est modérément ramifiée sur R, les L_i sont des extensions cycliques de K. En effet,
370 lorsque R est strictement local, I_i est égal au groupe de Galois de L_i' sur K. Comme on vient de le rappeler I_i est extension d'un groupe cyclique d'ordre premier à p par un p-groupe. Si l'on suppose L_i' modérément ramifiée sur R, I_i est alors un groupe cyclique d'ordre premier à p. Il en résulte que $[L_i : K]$ est premier à p et que l'on a $L_i = L_i'$. Inversement, si $[L_i : K]$ est premier

à p, I_i ne peut contenir de p-sous-groupe distingué non trivial ; I_i est donc un groupe cyclique d'ordre premier à p, ce qui prouve que L_i est modérément ramifiée sur R.

2.0.2 Soient R un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, L une K-algèbre étale, et soient $\overline{R}$ un localisé strict de R, $\overline{K}$ son corps de fractions, $\overline{L} = L \otimes_K \overline{K}$. Alors, pour que L soit modérément ramifiée sur R, il faut et il suffit que $\overline{L}$ soit modérément ramifiée sur $\overline{R}$. On se ramène en effet au cas où L est un corps. Soient alors $\overline{L} = \prod_i \overline{L}_i$, où les $\overline{L}_i$ sont des corps extensions de $\overline{K}$; si L' est l'extension galoisienne engendrée par L, et, si $L' = L' \otimes_K \overline{K}$, on a de même une décomposition de $\overline{L}'$ en produit de corps, $L' = \prod_j \overline{L}'_j$ et chaque $\overline{L}_i$ est sous-extension d'au moins l'un des $\overline{L}'_j$. Comme L' est une extension galoisienne de K, les $\overline{L}'_j$ sont des extensions galoisiennes de $\overline{K}$. Supposons L modérément ramifiée sur R ; comme le groupe de Galois de $\overline{L}'_j|K$ est isomorphe au groupe d'inertie de $L'|K$, les L'_j sont aussi modérément ramifiées sur $\overline{R}$, et il en est donc de même des $\overline{L}_i$. Inversement, supposons $\overline{L}$ modérément ramifiée sur $\overline{R}$. Pour chaque j, soit v_j la valuation discrète de $\overline{L}'_j$ qui prolonge la valuation de $\overline{K}$ et notons encore v_j la valuation induite sur L'. Quand j varie, v_j parcourt l'ensemble des valuations de L qui prolongent la valuation de K. Soient $G = \mathrm{Gal}(L'|K)$, $H = \mathrm{Gal}(L'|L)$, I_j le groupe d'inertie de $L'|K$ en v_j, J_j le groupe d'inertie de $L'|L$ en v_j. Le groupe I_i est extension d'un groupe cyclique d'ordre premier à p par un p-groupe P_j. Comme les $\overline{L}_i$ sont modérément ramifiées sur $\overline{R}$, I_j/J_j est d'ordre premier à p, donc on a $P_j \subset J_j$. Par suite le groupe H contient tous les P_j donc
371 aussi le groupe P engendré par les P_j pour j variable. Mais le groupe P est invariant dans G car un automorphisme intérieur de G transforme les I_j entre eux donc aussi les P_j entre eux. Il en résulte que P est un sous-groupe de H distingué dans G, donc, puisque L' est l'extension galoisienne engendrée par L, que l'on a $P = 1$, ce qui prouve que L est modérément ramifiée sur R.

Soient plus généralement $R \to R'$ un morphisme d'anneaux de valuation discrète tel que l'image d'une uniformisante π de R soit une uniformisante π' de R' et que l'extension résiduelle $k(R')$ soit une extension séparable de $k(R)$. Soient K le corps des fractions de R, K' le corps des fractions de R', L une K-algèbre étale, $L' = L \otimes_K K'$. Alors, pour que L soit modérément ramifiée sur R, il faut et il suffit que L' soit modérément ramifiée sur R'. On peut en effet supposer R et R' strictement locaux. D'après 2.0.1 il suffit de prouver que, lorsque L est un corps, il en est de même de L'. Soient $\tilde{R}$ le normalisé de R dans L, $\tilde{\pi}$ une uniformisante de $\tilde{R}$, $\tilde{R}' = \tilde{R} \otimes_R R'$. L'extension $k(\tilde{R})|k(R)$ étant radicielle et l'extension $k(R')|k(R)$ étale, $k(\tilde{R}) \otimes_{k(R)} k(R')$ est un corps [EGA IV 4.3.2 et 4.3.5]. Ceci prouve que $\tilde{R}'$ est un anneau local, et, comme π a pour image π' dans R', on a $k(\tilde{R}') = \tilde{R}'/(\tilde{\pi})$; par suite $\tilde{R}'$ est un anneau de valuation discrète [5, ch.I §2 prop. 2] donc L' est un corps.

2.0.3 Par réduction au cas strictement local, on voit qu'une sous-algèbre d'une algèbre modérément ramifiée est modérément ramifiée, que le produit tensoriel de deux algèbres modérément ramifiées est modérément ramifié, qu'une algèbre modérément ramifiée le reste après extension de l'anneau de valuation discrète, qu'une algèbre qui devient modérément rapart 74 mifiée après une extension modérément ramifiée est modérément ramifiée.

372

2.1 Soient X un S-schéma, D un diviseur ≥ 0 sur X. Rappelons (SGA 5 II 4.2) qu'on dit que D est strictement à *croisements normaux relativement à* S s'il existe une famille finie $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, telle que l'on ait $D = \sum_{i\in I} \operatorname{div}(f_i)$ et que la condition suivante soit réalisée :

2.1.0 Pour tout point x de $\operatorname{Supp} D$, X est lisse sur S en x, et, si l'on note $I(x)$ l'ensemble des $i \in I$ tels que $f_i(x) = 0$, le sous-schéma $V((f_i)_{i\in I(x)})$ est lisse sur S de codimension $\operatorname{card}.I(x)$ dans X.

Le diviseur D est dit à *croisements normaux relativement à* S si, localement sur X pour la topologie étale, il est strictement à croisements normaux.

Soit D un diviseur à croisements normaux relativement à S. On pose $Y = \operatorname{Supp} D$, $U = X - Y$, et on note $i\colon U \to X$ l'immersion canonique. Pour tout point géométrique $\overline{s}$ de S et pour tout point maximal y de la fibre géométrique $Y_{\overline{s}}$, l'anneau $R = \mathscr{O}_{X_{\overline{s}},y}$ est un anneau de valuation discrète.

Dans la suite de ce numéro, nous utiliserons la définition technique suivante :

Définition 2.1.1 *Soit F un faisceau d'ensembles sur U. On dit que F est* modérément ramifié sur X *(*le long de D*)* relativement à S *si, pour tout point géométrique $\overline{s}$ de S, la condition suivante est satisfaite :*

Pour tout point maximal y de $Y_{\overline{s}}$, la restriction de F au corps des fractions K de $\mathscr{O}_{X_{\overline{s}}}$ est représentable par le spectre d'une K-algèbre étale L, modérément ramifiée sur $\mathscr{O}_{X_{\overline{s}},y}$.

Le plus souvent, quand il ne pourra en résulter de confusion, nous omettrons la mention de
373 D dans la terminologie.

Définition 2.1.2 *Si F est un faisceau en groupes sur U, modéréments ramifié sur X relativement à S, on désigne par*

$$\mathrm{H}^1_t(U, F)$$

le sous-ensemble de $\mathrm{H}^1(U, F)$ formé des classes de torseurs sour F qui sont modérément ramifiés sur X relativement à S.

Soit
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[dl, "f"] \\ T & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de S-schémas, avec i comme dans 2.1 ; on désigne par

$$\mathrm{R}^1_t\, g_* F$$

le faisceau sur T associé au préfaisceau $T' \mapsto \mathrm{H}^1_t(U', F)$, où T' parcourt les schémas étales au-dessus de T et où $U' = U \times_T T'$; $\mathrm{R}^1_t\, g_* F$ est un sous-faisceau de $\mathrm{R}^1\, g_* F$.

Notons que, si g est cohérent, si $\overline{t}$ est un point géométrique de T, $\overline{T}$ le localisé strict de T en $\overline{t}$, $\overline{U} = U \times_T \overline{T}$, on a un isomorphisme

$$(\mathrm{R}^1_t\, g_* F)_{\overline{t}} \simeq \mathrm{H}^1_t(\overline{U}, \overline{F}) \tag{2.1.2.1}$$

2.1.3 Soit $C_t((U, X)/S)$ ou simplement C_t la catégorie des revêtements étales de U qui sont modérément ramifiés sur X relativement à S. Supposons U connexe et soit a un point géométrique de U. Soit Γ_t le foncteur qui, à un revêtement étale U' de U modérément ramifié sur X relativement à S fait correspondre l'ensemble des points géométriques de U' au-dessus de a. De 2.0 résulte que le couple (C_t, Γ_t) satisfait aux axiomes (G_1) à (G_6) de V.4. Par suite Γ_t
374 est représentable par un pro-objet qu'on appele le *revêtement universel modérément ramifié de (U, X) relativement à S ponctué en a.* Le groupe opposé au groupe des U-automorphismes du revêtement universel modérément ramifié est appelé le *groupe fondamental modérément ramifié* et noté

$$\Pi^t_1((U, X)/S, a) \text{ ou simplement } \Pi^t_1(U, a) \text{ ou même } \Pi^t_1(U).$$

C'est évidemment un quotient du groupe fondamental $\Pi_1(U, a)$ (V.6.9).

2.1.4 Soient F un faisceau en groupes sur U, P un torseur à droite de groupe F, Q un torseur à gauche de groupe F, et supposons P et Q modérément ramifiés sur X relativement à S. Alors il en est de même de $P \overset{F}{\wedge} Q$. On se ramène en effet à montrer que, si R est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et si F est un schéma en groupes étale fini sur K, et, si P et Q sont deux torseurs sous F modérément ramifiés sur R, alors il en est de même de $P \overset{F}{\wedge} Q$. Or $T = P \overset{F}{\wedge} Q$ est un quotient de $P \times_K Q$. Si L, M, N désignent les K-algèbres représentant respectivement T, P, Q, alors L est une sous-algèbre de $M \otimes_K N$, et il résulte de 2.0.3 que L est modérément ramifiée sur R.

On déduit de ce qui précède que, si F est un faisceau en groupes sur U et s'il existe un torseur de groupe F, modérément ramifié sur X relativement à S, alors F est modérément ramifié sur X relativement à S. En effet le torseur P° opposé de P est modérément ramifié sur X relativement à S, puisqu'il est isomorphe à P en tant que faisceau d'ensembles. Si ${}^P F$ est le groupe tordu de F par P, on a un isomorphisme

$$F \simeq P^\circ \overset{{}^P F}{\wedge} P$$

et par suite F est modérément ramifié sur X relativement à S.

On voit comme précédemment que, si $F \to F'$ est un morphisme de faisceaux en groupes sur U, modérément ramifiés sur X relativement à S, et si P est un torseur sous F modérément ramifié

375 sur X relativement à S, alors le torseur P' déduit de P par l'extension du groupe structural $F \to F'$ est modérément ramifié sur X relativement à S.

En particulier le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^1(U, F) \to \mathrm{H}^1(U, F')$$

donne par restriction à $\mathrm{H}^1_t(U, F)$ un morphisme canonique

$$\mathrm{H}^1_t(U, F) \to \mathrm{H}^1_t(U, F')$$

2.1.5 Soient $S' \to S$ un morphisme et notons U' (resp. X', etc.) l'image inverse de U (resp. X, etc.) sur S'. Si F est un faisceau d'ensembles sur U modérément ramifié sur X relativement à S, il résulte de la définition 2.1.1 et de 2.0.3 que F' est modérément ramifié sur X' relativement à S'.

Si maintenant F est un faisceau en groupes sur U, l'image inverse sur S' d'un torseur sous F modérément ramifié sur X relativement à S est un torseur sous F' modérément ramifié sur X' relativement à S'. En particulier on a un foncteur canonique

$$C_t((U, X)/S) \to C_t((U', X')/S'). \tag{2.1.5.1}$$

Supposons U et U' connexes et soient a un point géométrique de U, a' un point géométrique de U' au-dessus de a ; on déduit de ce qui précède un morphisme canonique

$$\Pi^t_1(U', a') \to \Pi^t_1(U, a). \tag{2.1.5.2}$$

Si $S' \to S$ est un morphisme et $h \colon T' \to T$ la projection canonique, le morphisme

$$h^*(\mathrm{R}^1\, g_* F) \to \mathrm{R}^1\, g'_* F'$$

donne par restriction un morphisme canonique

$$h^*(\mathrm{R}^1_t\, g_* F) \to \mathrm{R}^1_t\, g'_* F' \tag{2.1.5.3}$$

376

2.1.6 Soit F un faisceau en groupes sur U, modérément ramifié sur X relativement à S. Les notations étant celles de 2.1.2, on a des suites exactes canoniques :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(X, i_*F) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1_t(U, F) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1_t\, i_*F) \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{R}^1\, f_*(i_*F) & \longrightarrow & \mathrm{R}^1_t\, g_*F & \longrightarrow & f_*(\mathrm{R}^1_t\, i_*F). \end{array} \tag{2.1.6.1}$$

La première s'obtient à partir de la suite exacte (SGA 4 III 3.2) :

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, i_*F) \longrightarrow \mathrm{H}^1(U, F) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1\, i_*F).$$

Il suffit en effet de montrer que l'image de $\mathrm{H}^1(X, i_*F)$ dans $\mathrm{H}^1(U, F)$ est en fait contenue dans $\mathrm{H}^1_t(U, F)$ et que l'image de $\mathrm{H}^1_t(U, F)$ dans $\mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1\, i_*F)$ est en fait contenue dans $\mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1_t\, i_*F)$. Or l'image inverse sur U d'un torseur sous i_*F est un torseur sous i^*i_*F qui est évidemment modérément ramifié sur X relativement à S, donc il en est de même après l'extension du groupe structural $i^*i_*F \to F$, ce qui prouve l'existence de la flèche $\mathrm{H}^1(X, i_*F) \to \mathrm{H}^1_t(U, F)$. Le fait que l'image de $\mathrm{H}^1_t(U, F)$ dans $\mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1\, i_*F)$ soit contenue dans $\mathrm{H}^0(X, \mathrm{R}^1_t\, i_*F)$ résulte aussitôt de la définition de $\mathrm{R}^1_t\, i_*F$. Ceci prouve l'existence de la
part 75 première suite exacte, et la deuxième s'en déduit par localisation.

2.2 On conserve les notations de 2.1. Nous allons définir une notion d'objet modérément ramifié d'un champ Φ sur U lorsque celui-ci est donné, localement *sur* X et sur S pour la topologie étale, comme *image inverse d'un champ* Ψ *sur* S.

Soit d'abord G une gerbe sur U et supposons donné un morphisme étale surjectif $S_1 \to S$, un morphisme étale surjectif $X_2 \to X \times_S S_1$, une gerbe triviale H sur S_1 et un isomorphisme

$$G|U_2 \to H|U_2,$$

377 où $U_1 = U \times_X X_1$, $U_2 = U \times_X X_2$. Quand on choisit une trivialisation de $H|X_2$, l'isomorphisme ci-dessus identifie $G|U_2$ au champ des torseurs sous un faisceau en groupes F. On dit qu'un élément x de G_U est modérément ramifié sur X relativement à S, si la restriction de x à U_2 est un torseur modérément ramifié sur X relativement à S. D'après 2.1.4 cette notion ne dépend pas de la façon dont on a trivialisé $H|X_2$.

Soit maintenant Φ un champ sur U et supposons donnés un morphisme étale surjectif $S_1 \to S$, un morphisme étale surjectif $X_2 \to X \times_S S_1$, un champ Ψ sur S_1 et un isomorphisme

$$i \colon \Phi|U_2 \to \Psi|U_2.$$

Soit x un élément de Φ_U, G_x la sous-gerbe maximale de Φ engendrée par x [III 2.1.7], $S\Phi$ le faisceau des sous-gerbes maximales de Φ. L'isomorphisme i induit un isomorphisme

$$S\phi|U_2 \to S\psi|U_2.$$

Il résulte de 5.7 que, quitte à remplacer S_1 par une extension étale surjective, on a une unique sous-gerbe maximale H de Ψ, que l'on peut supposer triviale, telle que i définisse un isomorphisme

$$G_x|U_2 \to H|U_2.$$

On dit que l'élément x est modérément ramifié sur X relativement à S s'il l'est en tant qu'élément de G_x munie de l'isomorphisme ci-dessus.

2.2.1 Soit Φ un champ sur U donné, localement sur X et S, comme image inverse d'un champ sur S, et soit
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[dl, "f"] \\ T & \end{tikzcd}$$

un diagramme comme dans 2.1.2. Pour tout schéma T' étale sur T, si $U' = U \times_T T'$, on
378 considère le sous-ensemble $(g_*^t\Phi)_{T'}$ de $(g_*\Phi)_{T'} = \Phi_{U'}$ formé des éléments de $\Phi_{U'}$ qui sont modérément ramifiés sur X relativement à S. On appelle image directe modérément ramifiée de Φ par g, et on note

$$g_*^t\Phi$$

la sous-catégorie pleine de $g_*\Phi$ dont les objets au-dessus d'un schéma T' étale sur T sont les éléments de $(g_*^t\Phi)_{T'}$. Il est clair que $g_*^t\Phi$ est un sous-champ de $g_*\Phi$.

2.2.2 Par réduction au cas d'un champ de torseurs, on voit que, si Φ est un champ sur U qui est localement pour la topologie étale de S et X image inverse d'un champ sur S, le morphisme canonique

$$h^*(g_*\Phi) \to g'_*\Phi'$$

donne par restriction un morphisme canonique

$$h^*(g_*^t\Phi) \to g'^t_*\Phi'$$

Remarques 2.3 a) Si F est un faisceau d'ensembles localement constant constructible sur U, pour que F soit modérément ramifié sur X relativement à S, il suffit que la condition de 2.1.1 soit satisfaite pour les points géométriques de S au-dessus des points maximaux de S. Pour le voir on peut supposer le diviseur D strictement à croisements normaux. Le faisceau F est représentable par un revêtement étale V de U. Si $\overline{s}$ est un point géométrique de S, y un point maximal de $Y_{\overline{s}}$, on note $\overline{S}$ le localisé strict de S en $\overline{s}$, $\overline{X}$ le localisé strict de X en $\overline{y}$, $\overline{U} = U \times_X \overline{X}$, $\overline{V} = V \times_X \overline{X}$. Si la condition de 2.1.1 est satisfaite aux points géométriques au-dessus des points maximaux de S, il résulte de 5.5 plus bas que $\overline{V}$ est un revêtement de $\overline{U}$ modérément ramifié sur $\overline{X}$ relativement à $\overline{S}$; par suite V est un revêtement étale de U modérément ramifié sur X relativement à S.

379 b) Soit F un faisceau en groupes sur U modérément ramifié sur X relativement à S. Si $\overline{s}$ est un point géométrique de S, y un point maximal de $Y_{\overline{s}}$, on note K le corps des fractions de $\mathscr{O}_{X_{\overline{s}},y}$. Supposons que, pour tout point $\overline{s}$ et pour tout point y, la K-algèbre L dont le spectre représente $F|K$ soit de rang premier à la caractéristique résiduelle p de $\mathscr{O}_{X_{\overline{s}}}$. On dira parfois, par abus de langage, que F est premier aux caractéristiques résiduelles de S. Lorsqu'il en est ainsi, tout torseur P sous F est modérément ramifié sur X relativement à S.

Soient en effet $\overline{R}$ le localisé strict de $\mathscr{O}_{X_{\overline{s}},y}$ en $\overline{y}$, $\overline{K}$ son corps des fractions, $\overline{F}$ l'image inverse de F sur $\overline{K}$. Montrons que l'on peut supposer F constant. Comme F est modérément ramifié sur X relativement à S, $\overline{F}$ est représentable par le spectre d'une $\overline{K}$-algèbre $L = \prod L_i$, où les L_i sont des extensions de $\overline{K}$ de degré premier à p. On peut donc trouver une extension K' de $\overline{K}$ de degré premier à p telle que $\overline{F}|K'$ soit un faisceau constant. D'après 2.0.3, pour prouver que $P|\overline{K}$ est modérément ramifié sur $\overline{R}$, il suffit de voir que $P|K'$ est modérément ramifié sur la clôture intégrale de $\overline{R}$ dans K', d'où la réduction au cas où $\overline{F}$ est constant. Supposons désormais $\overline{F}$ constant. La $\overline{K}$-algèbre H qui représente $P|\overline{K}$ est alors produit d'extensions H_i de $\overline{K}$ isomorphes entre elles. Comme le rang de H est premier à p, il en est de même de $[H_1 : \overline{K}]$, ce qui prouve que H est modérément ramifié sur X relativement à S.

c) Soient X un schéma régulier, D un diviseur à croisements normaux de X (SGA 5 I 3.1.5), $U = X - \operatorname{Supp} D$, F un faisceau d'ensembles sur U. Si y est un point maximal de $\operatorname{Supp} D$, on désigne par K le corps des fractions de $\mathscr{O}_{X,y}$. On dit que F est *modérément ramifié relativement à* D, si, pour tout point maximal y de $\operatorname{Supp} D$, $F|K$ est représentable par une K-algèbre
380 modérément ramifiée sur $\mathscr{O}_{X,y}$.

Théorème 2.4 *Soient $f\colon X \to S$ un S-schéma, D un diviseur sur X à croisements normaux relativement à S (2.1), $Y = \operatorname{Supp} D$, $U = X - Y$, $i\colon U \to X$ l'immersion canonique. Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes) sur U, satisfaisant à l'une des conditions suivantes :*

a) F est localement pour la topologie étale sur *X et sur S l'image inverse d'un faisceau d'ensembles (resp. d'un faisceau en groupes constructible) sur S.*

b) F est localement constant constructible sur U et modérément ramifié sur X relativement à S.

Alors on a les conclusions suivantes :

1) (F, i) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0 (resp. pour tout morphisme $h\colon S' \to S$, si $i'\colon U' \to X'$ est l'image inverse de i sur S', si $F' = F|U'$ et si $k = h_{(X)}$, le morphisme canonique

$$\Psi\colon k^*(\mathrm{R}^1_t\, i_* F) \to \mathrm{R}^1_t\, i'_* F'$$

est un isomorphisme).

Si F est un faisceau en groupes premier aux caractéristiques résiduelles de S (2.3.b)) (modérément ramifié sur X relativement à S), alors (F, i) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1.

2) Si F est un faisceau d'ensembles (resp. de groupes) constructible, $i_* F$ (resp. $\mathrm{R}^1_t\, i_* F$) est constructible.

Démonstration. Pour tout S-schéma S', on considère le diagramme suivant dont tous les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "g"'] & & U' \arrow[ll] \arrow[dr, "i'"] \arrow[dd, "g'"] & \\
& X \arrow[dl, "f"] & & X' \arrow[ll, "k"'] \arrow[dl, "f'"] \\
S & & S' \arrow[ll, "h"] & S'
\end{tikzcd}$$

381 Comme la question est locale sur X pour la topologie étale, on peut supposer que D est un diviseur strictement à croisements normaux relativement à S (2.1) ; de plus, quitte à restreindre X à un voisinage de Y, on peut supposer X lisse sur S.

Démonstration de 2.4 1).

2.4.1 *Cas d'un faisceau d'ensembles satisfaisant à* a). On peut supposer que l'on a $F = g^*G$, où G est un faisceau sur S. Il résulte alors de (SGA 4 XVI 3.2) que le morphisme canonique

$$f^*G \to i_*F \tag{2.4.1.1}$$

est un isomorphisme. Pour tout S-schéma $h\colon S' \to S$, on a de même un isomorphisme $f'^*G' \to i'_*F'$; par suite le morphisme canonique

$$\varphi\colon k^*(i_*F) \to i'_*F'$$

s'identifie à l'isomorphisme naturel

$$k^*f^*G \simeq f'^*G'$$

2.4.2 *Cas d'un faisceau d'ensembles satisfaisant à* b). On doit montrer que φ est un isomorphisme et il suffit pour cela de voir qu'il en est ainsi en chaque point géométrique $\overline{x}'$ de X'. Soit $\overline{S}$ (resp. $\overline{X}$, resp. $\overline{S}'$, resp. $\overline{X}'$) le localisé strict de S (resp. X, resp S', resp. X') en $\overline{x}'$ et posons $\overline{U} = U_{(\overline{X})}, \overline{U}' = U_{(\overline{X}')}$, etc. Le morphisme $\varphi_{\overline{x}}$ s'identifie au morphisme canonique

$$\overline{\varphi}\colon \mathrm{H}^0(\overline{U}, \overline{F}) \to \mathrm{H}^0(\overline{U}', \overline{F}')$$

On peut trouver un revêtement principal V de $\overline{U}$, du type figurant dans 5.4, tel que l'image inverse de $\overline{F}$ sur V soit un faisceau constant de valeur C. Si Π est le groupe de Galois de V sur $\overline{U}$, Π opère sur $\overline{F}|V$, et l'on a

$$\mathrm{H}^0(U, F)) \simeq \mathrm{H}^0(V, C_V)^{\Pi} \tag{2.4.2.1}$$

382 où le deuxième membre désigne l'ensemble des éléments de $\mathrm{H}^0(V, C_V)$ invariants sous Π. Comme $V' = V \times_{\overline{U}} \overline{U}'$ est une revêtement principal de $\overline{U}'$ de groupe de Galois $\Pi' \simeq \Pi$, on voit que le morphisme $\overline{\varphi}$ s'obtient, en prenant les invariants sous Π, à partir du morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(V, C_V) \to \mathrm{H}^0(V', C_{V'}).$$

Comme V et V' sont connexes (5.4), ce morphisme, donc aussi $\overline{\varphi}$, est un isomorphisme.

Notons que si de plus F est un faisceau en groupes et si P est un torseur sur $\overline{U}$ de groupe $\overline{F}$, modérément ramifié relativement à D, il résulte de la démonstration précédente et de 2.2 que part 76 $({}^P\overline{F}, \overline{i})$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0.

2.4.3 *Cas d'un faisceau en groupes.* Pour montrer que Ψ est un isomorphisme, il suffit de prouver que, pour tout point géométrique $\overline{y}'$ de Y', le morphisme

$$\Psi_{\overline{y}'}\colon (k^*(R^1_{\mathrm{t}} i_*F))_{\overline{y}'} \to (R^1_{\mathrm{t}} i'_*F')_{\overline{y}'}$$

est un isomorphisme. Or, d'après 2.1.2, $\Psi_{\overline{y}'}$ s'identifie au morphisme canonique

$$\overline{\Psi}\colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{t}}(\overline{U}, \overline{F}) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{t}}(\overline{U}', \overline{F}').$$

Soient $\widetilde{U}$ le revêtement universel modérément ramifié de $\overline{U}$ (2.1.3) et $\widetilde{F}$ l'image inverse de $\overline{F}$ sur $\widetilde{U}$. Il résulte de 5.7 dans le cas a) et de 5.5 dans le cas b), que $\mathrm{H}^1_{\mathrm{t}}(\overline{U}, \overline{F})$ s'identifie au sous-ensemble $\mathrm{H}^1(\overline{U}, \overline{F})$ formé des classes de $\overline{F}$-torseurs dont l'image inverse sur $\widetilde{U}$ est triviale. D'autre part un raisonnement classique montre que l'ensemble des éléments de $\mathrm{H}^1(\overline{U}, \overline{F})$ dont l'image inverse sur $\widetilde{U}$ est triviale s'identifie à $\mathrm{H}^1(\pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U}), \mathrm{H}^0(\widetilde{U}, \widetilde{F}))$. On obtient ainsi un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{t}}(\overline{U}, \overline{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U}), \mathrm{H}^0(\widetilde{U}, \widetilde{F})). \tag{2.4.3.1}$$

Par suite le morphisme $\overline{\Psi}$ s'identifie au morphisme canonique

$$\mathrm{H}^1(\pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U}), \mathrm{H}^0(\widetilde{U}, \widetilde{F})) \to \mathrm{H}^1(\pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U}'), \mathrm{H}^0(\widetilde{U}', \widetilde{F}')).$$

383 Montrons que ce morphisme est un isomorphisme. Le morphisme $\pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U}') \to \pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U})$ est un isomorphisme d'après 5.6, et il en est de même du morphisme $\mathrm{H}^0(\widetilde{U}, \widetilde{F}) \to \mathrm{H}^0(\widetilde{U}', \widetilde{F}')$. En effet, cela est évident dans le cas b) car $\widetilde{F}$ est constant et $\widetilde{U}$ et $\widetilde{U}'$ sont connexes. Dans le cas a), soit $\overline{G}$ un faisceau en groupes constructible sur $\overline{S}$ tel que l'on ait $\overline{F} = \overline{g}^*\overline{G}$; comme les morphismes $\widetilde{U} \to \overline{S}$ et $\widetilde{U}' \to \overline{S}'$ sont 0-acycliques (5.7), on a

$$\mathrm{H}^0(\widetilde{U}, \widetilde{F}) \simeq \mathrm{H}^0(\overline{S}, \overline{G}) \simeq \mathrm{H}^0(\overline{S}', \overline{G}') \simeq \mathrm{H}^0(\widetilde{U}', \widetilde{F}'),$$

ce qui entraîne que Ψ est un isomorphisme. La dernière assertion de 2.4 1) résulte de ce qui précède, compte tenu de 2.3 b).

Démonstration de 2.4 2).

Le cas d'un faisceau d'ensembles constructible satisfaisant à a) résulte aussitôt de (2.4.1.1). Soit $F = g^*G$ un faisceau en groupes satisfaisant à a), où G est un faisceau constructible ; on peut supposer S affine ; soient $(S_j)_{j\in J}$ une famille finie de sous-schémas fermés réduits de S dont la réunion recouvre S, tels que l'image inverse de G sur S_j soit un faisceau localement constant. Compte tenu de 2.4 1), il suffit, pour établir que $R^1_{\mathrm{t}} i_* F$ est constructible, de voir qu'il en est ainsi après le changement de base $S_j \to S$, pour chaque $j \in J$. On est donc ramené au cas b) où F est localement constant.

On suppose désormais que F est un faisceau d'ensembles ou de groupes satisfaisant à b). Comme la question est locale pour la topologie étale sur X, on peut supposer X de présentation finie sur S, et, par passage à la limite, on peut supposer X et S noethériens.

Soit $D = \sum_{1\leq i\leq r} div f_i$, où, pour chaque point x de $Supp\ D$, si $I(x)$ est l'ensemble des i tels que $f_i(x) = 0$, le sous-schéma $V((f_i)_{i\in I(x)})$ est lisse sur S de codimension $\mathrm{card}\ I(x)$ dans X. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des parties de $[1, r]$ et, pour chaque $I \in \mathscr{P}$, posons

$$X_I = (\cap_{i\in I} V(f_i)) \cap (\cap_{i\notin I} X_{f_i}).$$

384 Soit z un point de X_I. Quitte à se restreindre d'abord à un voisinage étale de z, on peut trouver un ouvert W de X contenant z et un revêtement principal V de $U \cap W$, modérément ramifié sur W relativement à S, du type considéré dans 5.6.1, tel que l'image réciproque de F sur V soit un faisceau constant de valeur C. Soit π le groupe de Galois du revtement V. Pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X_I, on a alors d'après (2.4.2.1)

$$\mathrm{H}^0(\overline{U}, \overline{F}) \simeq \mathrm{H}^0(V, C_V)^\pi.$$

Il en résulte que $i_*F|X_I \cap W$ est localement constant (SGA 4 IX 2.13) et par suite i_*F est constructible.

Montrons enfin que si F est un faisceau en groupes localement constant, $R^1_{\mathrm{t}} i_* F|_{X_I}$ est constructible. Si $\overline{x}$ est un point géométrique de X, on a obtenu dans (2.4.3.1) l'expression

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{t}}(\overline{U}, \overline{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U}), \mathrm{H}^0(\widetilde{U}, \widetilde{F})).$$

Si p est la caractéristique résiduelle de $\overline{X}$, on a, d'après 5.6, $\pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U}) = \prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_l(1)^{card\ I}$. Désignons par $\mathbb{L}$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent l'ordre du groupe fini $\mathrm{H}^0(\widetilde{U}, \widetilde{F})$ et soit $K = \prod_{l \in \mathbb{L} - \{p\} \cap \mathbb{L}} \mathbb{Z}_l(1)^{card\ I}$. Il résulte de [4, I §5 ex.2] que l'on a

$$\mathrm{H}^1_t(\overline{U}, \overline{F}) \simeq \mathrm{H}^1(K, \mathrm{H}^0(\widetilde{U}, \widetilde{F})).$$

Comme K est topologiquement de type fini et $\mathrm{H}^0(\widetilde{U}, \widetilde{F})$ fini, on en déduit tout d'abord que les fibres du faisceau $R^1_t i_* F|_{X_I}$ sont finies. D'autre part, l'ensemble $\mathbb{L}$ ne dépend pas du point $\overline{x}$. Pour tout $q \in \mathbb{L}$, soit $X_{I,q}$ le fermé de X_I d'équation $q = 0$ et soit $X_{I'}$ l'ouvert de X_I complémentaire de la réunion des $X_{I,q}$. Alors $R^1_{\mathrm{t}} i_* F|_{X_{I,q}}$ et $R^1_{\mathrm{t}} i_* F|_{X'_I}$ sont localement constants ; en effet une flèche de spécialisation de points géométriques de $X_{I,q}$ (resp. de $X_{I'}$) induit un isomorphisme sur les groupes K (5.6.1) donc aussi sur les ensembles $\mathrm{H}^1_t(\overline{U}, \overline{F})$, et l'on peut appliquer SGA 4
385 IX 2.13.

Corollaire 2.5 *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme, D un diviseur sur X à croisements normaux relativement à S (2.1), $Y = Supp\ D$, $U = X - Y$, $i\colon U \to X$ l'immersion canonique. Soit Φ un champ sur U et supposons donnés des morphismes étales surjectifs $S_1 \to S$ et $X_2 \to X \times_S S_1$, un champ Ψ sur S_1 et un isomorphisme $\Phi|U_2 \simeq \Psi|U_2$ (cf.2.2).*

Alors, pour tout morphisme $h\colon S' \to S$, si $k = h_{(X)}$, le foncteur canonique

$$\varphi\colon k^* i_* \Phi \to i'_* \Phi'$$

est pleinement fidèle. Si Ψ est constructible, le foncteur canonique

$$\psi\colon k^* i^t_* \Phi \to i'^{\mathrm{t}}_* \Phi'$$

est une équivalence de catégories.

De plus, si le champ Ψ est construible (resp. si Ψ est 1-constructible (0) et S localement noethérien), $i_*\Phi$ est constructible (resp. $i^t_*\Phi$ est 1-constructible).

Montrons que φ est pleinement fidèle. Il suffit de voir que, pour tout point géométrique $\overline{x}'$ de X', il en est ainsi du foncteur

$$\overline{\varphi}\colon \Phi(\overline{U}) \to \Phi'(\overline{U}')$$

(on a repris les notations de 2.4.2). Soient $a,\ b$ deux éléments de $\Phi(\overline{U})$, $a',\ b'$ leurs images par $\overline{\varphi}$. Comme le morphisme $\overline{U} \to \overline{S}$ est localement 0-acyclique (5.7), on a un isomorphisme

$$\mathrm{H}^0(\overline{U}, \overline{S\Phi}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(S, \overline{S\Psi}).$$

Par suite a et b proviennent par image inverse d'éléments de Ψ, et il en est donc de même de $F = \mathbf{Hom}_{\overline{U}}(a, b)$. Comme le faisceau $F' = \mathbf{Hom}_{\overline{U}'}(a', b')$ est l'image inverse sur $\overline{U}'$ de F, il résulte de 2.4.1 que le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(\overline{U}, F) \to \mathrm{H}^0(\overline{U}', F')$$

est un isomorphisme, ce qui prouve que $\overline{\varphi}$ est pleinement fidèle.

386 Montrons que, pour tout point géométrique $\overline{x}'$ de X', le foncteur

$$\overline{\psi}\colon i^{\mathrm{t}}_*\Phi(\overline{X}') \longrightarrow i'^{\mathrm{t}}_*\Phi'(\overline{X}')$$

est une équivalence. D'après ce qui précède, $\overline{\psi}$ est pleinement fidèle. Montrons que $\overline{\psi}$ est essentiellement surjectif. Soit a' un élément de $\Phi'(\overline{U}')$ modérément ramifié sur X' relativement à S' (2.2) et montrons qu'il est l'image d'un élément modérément ramifié de $\Phi(\overline{U})$. Il résulte de 2.4 1) que le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(\overline{U}, \overline{S\Phi}) \to \mathrm{H}^0(\overline{U}', \overline{S\Phi}')$$

est un isomorphisme. Soit G' la sous-gerbe maximale de Φ' engendrée par a' ; il existe alors une sous-gerbe maximale G de $\overline{\Phi}$, image inverse d'une gerbe sur $\overline{S}$, telle que l'on ait

$$\overline{m}^*G \simeq G',$$

où m est le morphisme $\overline{U}' \to \overline{U}$. Le foncteur canonique

$$(*) \qquad \overline{k}^*\overline{i}^{\mathrm{t}}_*G \to \overline{i}'^{\mathrm{t}}_*G'$$

est une équivalence, car G s'identifie à une gerbe de torseurs sous un faisceau en groupes constructible provenant de $\overline{S}$, et l'on peut appliquer 2.4 1). Il résulte alors de $(*)$ qu'il existe un élément a de $G(\overline{U})$, modérément ramifié sur X relativement à S, dont l'image inverse sur $\overline{U}'$ est a', ce qui prouve que ψ est une équivalence.

Si Ψ est constructible, il en est de même de $i_*\Phi$; en effet un objet x de $i_*\Phi$ est, localement pour la topologie étale de S, image inverse d'un objet y de Ψ ; il résulte donc de 2.4.1.1 que $\mathbf{Aut}(x)$ est l'image inverse de $\mathbf{Aut}(y)$, donc est constructible. Enfin, si Ψ est 1-constructible, il

part 77 en est de même de $i^{\mathrm{t}}_*\Phi$ d'après 6.3 ci-dessous.

387 **Corollaire 2.6** *Les notations son celles de 2.4. Supposons que S soit de caractèristique nulle en tout point s tel que l'on ait $Y_s \neq \emptyset$. Alors, si $\mathscr{F}$ est un faisceau en groupes localement constant construible sur U (resp. un champ constructible sur U qui est localement sur X et S image inverse d'un champ constructible sur S), $(\mathscr{F}, i)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1.*

Comme tout faisceau d'ensembles constructible sur U est modérément ramifié sur X relativement à S, le corollaire résulte de 2.4 (resp. 2.5).

Corollaire 2.7 *Les notations sont celles de 2.4, mais on se donne de plus un S-schéma T, un morphisme propre $p\colon X \to T$, et on suppose X et T de présentation finie sur S ; soit $q = pi$. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles constructible sur U satisfaisant à l'une des conditions a) ou b) de 2.4 (resp. un faisceau en groupes satisfaisant à l'une des condition a), b) de 2.4, resp. un champ sur U qui est localment sur X et S image inverse d'un champ constructible G sur S). Alors on a les conclusions suivantes :*

1. *$(\mathscr{F}, q)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0 (resp. pour tout morphisme $h\colon S' \to S$, si $m = h_{(T)}$, le morphisme canonique :*

$$\Theta\colon m^*(\mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, q_*\mathscr{F}) \to \mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, q'_*\mathscr{F}'$$

est un isomorphisme, resp. pour tout morphisme $S' \to S$, le morphisme canonique

$$\mathscr{S}\colon m^*(q^{\mathrm{t}}_*\mathscr{F}) \to {q'}^{\mathrm{t}}_*\mathscr{F}'$$

est une equivalence).

2. *le faiseau $q_*\mathscr{F}$ (resp. le faisceau $\mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, q_*\mathscr{F}$, resp. le champ $q^{\mathrm{t}}_*\mathscr{F}$) est constructible. Dans le dernier cas, si l'on suppose S localement noethérien et G 1-constructible, il en est de même de $q^{\mathrm{t}}_*\mathscr{F}$.*

388 La première partie résulte aussitôt de 2.4, 2.5 et de la démonstration de 1.8. Démostrons 2). Si $\mathscr{F}$ est un faisceau d'ensembles constructible sur U satisfaisant à 2.4 a) ou 2.4 b), il résulte de 2.4 2) que $i_*\mathscr{F}$ est constructible ; il en est donc de même de $q_*\mathscr{F} = p_*(i_*\mathscr{F})$ (SGA 4 XIV 1.1).

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau en groupes constructible sur U satisfaisant à 2.4 a) ou 2.4 b) et prouvons que $\mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, q_*\mathscr{F}$ est constructible. Par passage à la limite (EGA IV 8.10.5 et 17.7.8) et en utilisant 1), on peut supposer S noethérien. Soit alors Φ le champ sur X dont la fibre en tout schéma X' étale sur X est formée des torseurs sur $U' = U \times_X X'$, de groupe $\mathscr{F}|U$, qui son modérément ramifiés sur X relativement à S ; on a donc

$$S(i^{\mathrm{t}}_*\Phi) \simeq \mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, i_*\mathscr{F}$$

et ce faisceau est constructible d'après 2.4 2). Il résulte donc de 6.3 ci-dessous que $S(p_*\phi)$ est constructible, i.e. que $\mathrm{R}^1_t\, q_*\mathscr{F}$ est constructible.

Enfin, si $\mathscr{F}$ est un champ sur U qui es localement sur X et S image inverse d'un champ constructible sur S, $i_*^{\mathrm{t}}\mathscr{F}$ est constructible, et il en est donc de même de $q_*^{\mathrm{t}}\mathscr{F} = p_*(i_*^{\mathrm{t}}\mathscr{F})$. Si de plus S est localement noethérian et SG constructible, $S(i_*^{\mathrm{t}}\mathscr{F})$ est constructible d'après 6.3 ; il en est donc de même de $S(q_* i_*^{\mathrm{t}}\mathscr{F})$, i.e. de $S(q_*^{\mathrm{t}}\mathscr{F})$ 6.2.

Corollaire 2.8 *Soit*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[dl, "f"] \\ S & \end{tikzcd}$$

389 *un diagramme commutatif de schémas, dans lequel U est l'ouvert complémentaire dans X d'un diviseur à croisements normaux relativement à S, f un morphisme* propre *de présentation finie. Soit $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers. On suppose g localement O-acyclique (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$). Alors, si $\mathscr{F}$ est un faiseau d'ensembles sur U (resp. un faisceau de $\mathbb{L}$-groupes) sur U, localement constant constructible, modérément ramifié sur X relativement à S, $f_*\mathscr{F}$ (resp. $\mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, f_*\mathscr{F}$) est localement constant constructible et $(\mathscr{F}, f)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0 (resp. la formation de $\mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, f_*\mathscr{F}$ commute à tout changement de base $S' \to S$). Dans le cas non respé, si $\mathscr{F}$ est un faisceau en groupes, pour toute spécialisation $\overline{s}_1 \to \overline{s}_2$ de points géométriques de S, le morphisme de spécialisation*

$$(\mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, f_*\mathscr{F})_{\overline{s}_2} \to (\mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, f_*\mathscr{F})_{\overline{s}_1}$$

est injectif.

Le corollaire résulte aussitôt de 2.6 et de 1.14 (resp. de l'analogue de 1.14 pour le $\mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, f_*\mathscr{F}$, lequel se démontre comme loc.cit.).

Corollaire 2.9 *Soit*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[dl, "f"] \\ S & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de schémas, dans lequel U es l'ouvert complémentaire dans X d'un diviseur à croisements normaux relativement à S, f un morphisme propre lisse de présentation finie. Soit $\mathbb{L}$ l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristique résiduelles de S. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathbb{L}$-groupes localement constant constructible sur U, modérément ramifié sur X relativement à S. Alors $\mathrm{R}^1\, f_*\mathscr{F}$ es localement constant constructible et $(\mathscr{F}, f)$ est coho-
390 *mologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1.*

Le corollaire résulte de 2.8 et du fait que l'on a $\mathrm{R}^1_{\mathrm{t}}\, f_*\mathscr{F} = \mathrm{R}^1\, f_*\mathscr{F}$ (2.3 b)).

2.10 Si U est un schéma connexe, a un point géométrique de U, $\mathbb{L}$ un ensemble de nombre premiers, on note

(2.10.0) $$\pi_1^{\mathbb{L}}(U, a)$$

la limite projective des quotients finis de $\pi_1(U, a)$ dont les ordres ont touts leurs facteurs premiers dans $\mathbb{L}$.

Nous allons définir des morphismes de spécialisation pour le groupe fondamental, généralisant X.2.

Soit $g\colon U \to S$ un morphisme cohérent à fibres géométriquement connexes (resp. un morphisme de la forme $g = fi$, où $f\colon X \to S$ est un morphisme propre de présentation finie et où $i\colon U \to X$ est une immerision ouverte telle que U soit le complémentaire dans X d'un diviseur à croisements normaux relativement à S (cf. 2.8)). Soit $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers et supposons, dans le cas non respé, que, pour tout $\mathbb{L}$-groupe constant fini C, (C_U, g) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1. Soient $\overline{s}_1 \to \overline{s}_2$ un morphisme de spécialisation de points géométriques de S, $\overline{S}$ le localisé strict de S en $\overline{s}_2$, $\overline{U} = U \times_S \overline{S}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
U_{\bar{s}_1} \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & \bar{U} \arrow[d, "\bar{g}"] & U_{\bar{s}_1} \arrow[l, "h_2"'] \arrow[d] \\
\bar{s}_1 \arrow[r] & \bar{S} & \bar{s}_2 \arrow[l]
\end{tikzcd} .$$

Si a_1 est un point géométrique de $U_{\bar{s}_1}$, a_2 un point géométrique de $U_{\bar{s}_2}$ les morphismes h_1 et h_2 définissent des morphismes canoniques

$$\pi_1\colon \pi_1^{\mathbb{L}}(U_{\bar{s}_1}, a_1) \to \pi_1^{\mathbb{L}}(\bar{U}, a_1) \qquad \pi_2\colon \pi_1^{\mathbb{L}}(U_{\bar{s}_2}, a_2) \to \pi_1^{\mathbb{L}}(\bar{U}, a_2)$$

391

$$\text{(resp. } \pi_1\colon \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_1}, a_1) \to \pi_1^{\mathrm{t}}(\bar{U}, a_1) \qquad \pi_2\colon \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_2}, a_2) \to \pi_1^{\mathrm{t}}(\bar{U}, a_2))$$

(V.7 et 2.1.5.2). Les hypothèses de propreté cohomologique (resp. 2.8) prouvent que π_2 est un isomorphisme. Si l'on choisit une classe de chemins de a_1 à a_2, on obtient un isomorphisme

$$\pi_{12}\colon \pi_1^{\mathbb{L}}(\bar{U}, a_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathbb{L}}(\bar{U}, a_2) \quad \text{(resp. } \pi_{12}\colon \pi_1^{\mathrm{t}}(\bar{U}, a_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{t}}(\bar{U}, a_2))$$

d'où un morphisme $\pi = \pi_2^{-1}\pi_{12}\pi_1$

$$\pi\colon \pi_1^{\mathbb{L}}(U_{\bar{s}_1}, a_1) \to \pi_1^{\mathbb{L}}(U_{\bar{s}_2}, a_2) \quad \text{(resp. } \pi\colon \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_1}, a_1) \to \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_2}, a_2)).$$

Changer la classe de chemins de a_1 à a_2 revient à modifier π par un automorphisme intérieur de $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}_2}, a_2)$ (resp. de $\pi_1^{\mathrm{t}}(X_{\bar{s}_2}, a_2)$). On appelle *morphisme de spécialisation pour le groupe fondamental* associé au morphisme $\bar{s}_1 \to \bar{s}_2$ et on note simplement

$$\pi\colon \pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}_1}) \to \pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}_2}) \quad \text{(resp. } \pi\colon \pi_1^{\mathrm{t}}(X_{\bar{s}_1}) \to \pi_1^{\mathrm{t}}(X_{\bar{s}_2}))$$

l'un des morphismes défini ci-dessus.

Lemme 2.11 *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme propre de présentation finie, D un diviseur sur X à croisements normaux relativement à S, $Y = \operatorname{Supp} D$, $U = X - Y$, $i\colon U \to X$ le morphisme canonique, $\bar{s}_1 \to \bar{s}_2$ un morphisme de spécialisation de points géométriques de S, y_1 un point géometrique de $Y_{\bar{s}_1}$, y_2 un point géométrique de $Y_{\bar{s}_2}$, tel que la projection z_1 de y_1 sur X soit une générisation de la projection z_2 de y_2. Soit I_{y_1} un sous-groupe d'inertie de $\pi_1^{\mathrm{t}}(\bar{U}_{\bar{s}_1})$ en y_1. Alors l'image de I_{Y_1} par le morphisme de spécialisation*

$$\pi\colon \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_1}) \to \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_2})$$

392 *est un sous-groupe d'inertie de $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_2})$ en y_2.*

Soient en effet $\overline{X}$ (resp. $\widetilde{X}$) le localisé strict de X en y_2 (resp. en y_1), $\overline{U} = U \times_X \overline{X}$ (resp. $\widetilde{U} = U \times_X \widetilde{X}$). On a un morphisme canonique $\widetilde{U} \longrightarrow \overline{U}$, et il résulte de 1.10 que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{\mathrm{t}}\left(\widetilde{U}_{\bar{s}_1}\right) \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d] & \pi_1^{\mathrm{t}}\left(\overline{U}_{\bar{s}_2}\right) \arrow[d] \\
\pi_1^{\mathrm{t}}\left(U_{\bar{s}_1}\right) \arrow[r, "\pi"] & \pi_1^{\mathrm{t}}\left(U_{\bar{s}_2}\right)
\end{tikzcd}$$

où π' est composé du morphisme canonique $\pi_1^{\mathrm{t}}(\widetilde{U}_{\bar{s}_1}) \to \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_1})$ est du morphisme de spécialisation. Comme $\pi_1^{\mathrm{t}}(\widetilde{U}_{\bar{s}_1})$ (resp. $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_1})$) est un groupe d'inertie de $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\bar{s}_1})$ en y_1 et (resp. $\pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U}_{\bar{s}_2})$ en y_2), il suffit de prouver que π' est surjectif. Mais cela résulte de l'expression obtenue
part 78 dans 5.6.

Corollaire 2.12 *Soit X une courbe propre et lisse connexe de genre g sur un corps séparablement clos k de caractéristique $p \geq 0$. Soit U l'ouvert obtenu en enlevant à X n points fermés distincts $a_1, \ldots, a_n$. Alors le groupe fondamental modérément ramifié $\pi_1^{\mathrm{t}}(U)$ (2.1.3) peut être engendré par $2g+n$ éléments x_i, y_i, σ_j, avec $1 \leq i \leq g$, $1 \leq j \leq n$, tel que σ_j soit un générateur d'un groupe d'inertie correspondant à a_j, et que l'on ait la relation*

$$(*) \qquad \prod_{1\leq i\leq g} (x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}) \cdot \prod_{1\leq j\leq n} \sigma_j = 1.$$

Pour tout groupe fini G d'ordre premier à p, *engendré par des éléments $\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{\sigma}_j$ satisfaisant à la relation $(*)$, il existe un revêtement étale de U, de groupe G, correspondant à un homomorphisme*
393 *$\pi_1^{\mathrm{t}}(U) \to G$ qui envoie x_i, y_i, σ_j sur $\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{\sigma}_j$ respectivement. En d'autres termes, si p' désigne l'ensemble des nombres premiers distincts de p, $\pi_1^{p'}(U)$ est le pro-p'-groupe engendré par les générateurs x_i, y_i, σ_j liés par la seule relation $(*)$.*

Démonstration. On peut supposer k algébriquement clos. Supposons d'abord k de caractéristique zéro. Il existe alors une sous-extension algébriquement close k' de k, de degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$, telle que X provienne par extension des scalaires d'une courbe propre et lisse X' définie sur k', et l'on peut supposer que les points $a_1, ..., a_n$ proviennent de points rationnels $a'_1, ..., a'_n$ de X'. Comme k' est de degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$, on peut trouver un plongement de k' dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$; soit $\widetilde{U} = U' \times_{k'} \mathbb{C}$. Soit k'' une extension algébriquement close de k' telle que l'on ait des k'-morphismes de k et de $\mathbb{C}$ dans k''. Si $g' \colon U' \to k'$ est le morphisme structural, et si $\mathscr{F}$ est un faisceau en groupes constant fini sur U'', il résulte de 2.9 que les morphismes de spécialisation

$$(\mathrm{R}^1 g'_* \mathscr{F}')_{\mathbb{C}} \to (\mathrm{R}^1 g'_* \mathscr{F}')_{k''} \leftarrow (\mathrm{R}^1 g'_* \mathscr{F}')_k$$

sont des isomorphismes. En termes de groupes fondamentaux, cela montre que l'on a un isomorphisme, défini à automorphisme intérieur près

$$\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(\widetilde{U}),$$

et il est clair que cet isomorphisme transforme un groupe d'inertie relatif à un point de $X' - U'$ en un groupe d'inertie relatif au même point. On peut donc supposer que l'on a $k = \mathbb{C}$. Dans ce dernier cas il résulte du théorème d'existence de Riemann (XII.5.2) que le groupe fondamental $\pi_1(U)$ n'est autre que le complété pour la topologie des sous-groupes d'indice fini du groupe fondamental de l'espace analytique associé à U. Or ce dernier peut se calculer par voie transcendante
394 [3, ch.7 §47] ; il peut être engendré par $2g + n$ éléments x_i, y_i, σ_j tels que σ_j soit l'image d'un générateur du groupe fondamental local $\pi_1(D_j)$ d'un petit disque centré en a_j, i.e. un générateur d'un groupe d'inertie correspondant au point a_j, ces éléments satisfaisant à la seule relation $(*)$. Si maintenant k est de caractéristique $p > 0$, on peut trouver un anneau de valuation discrète complet A, de corps rèsiduel k, de corps des fractions K de caractéristique zéro, et un schéma connexe X_1, prope et lisse sur $S = \operatorname{Spec} A$, tel que l'on ait $X_1 \times_S \operatorname{Spec} k \simeq X$ (III.7.4). Les points a_j se relèvent alors en des sections s_j de X_1 au-dessus de S ; soit Y_{1j} le sous-schéma fermé réduit d'espace sous-jacent $s_j(S)$, Y_1 la réunion des Y_{1j}, $U_1 = X_1 - Y_1$, $g_1 \colon U_1 \to S$ le morphisme structural. Soient $\overline{K}$ une extension algébriquement close de K, $\overline{U} = U_1 \times_S \overline{K}$. Si C est un groupe constant fini, il résulte de 2.8 que le morphisme de spécialisation

$$(\mathrm{R}^1 g_{1*} C_{U_1})_k \longrightarrow (\mathrm{R}^1 g_{1*} C_{U_1})_{\overline{K}}$$

est injectif et même bijectif si C est d'ordre premier à p. Or cela signifie, en termes de groupes fondamentaux, que le morphisme de spécialisation (1.10)

$$\pi \colon \pi_1(\overline{U}) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U)$$

est sujectif, et que le morphisme de spécialisation

$$\pi_1^{p'}(\overline{U}) \longrightarrow \pi_1^{p'}(U)$$

est bijectif. Enfin, si x_i, y_i, σ_j son des générateurs de $\pi_1(\overline{U})$ tels que σ_j soit un générateur d'un groupe d'inertie correspondant au point $b_j = Y_{1j}(\overline{K})$ de $\overline{X}$, alors, d'après 1.11, $\pi(\sigma_j)$ est un générateur d'un groupe d'inertie correspondant à a_j, ce qui achève la démonstration.

3 Propreté cohomologique et locale acyclicité générique

395

part 79 **Théorème 3.1** *Soient S un schéma irréductible de point générique s, X et Y deux S-schémas de présentation finie, $f\colon X \to Y$ un S-morphisme. Pour tout S-schéma S', on note Y', X', etc. l'image inverse de Y, X, etc. par le morphisme $S' \to S$. On a les propiétés suivantes :*

1 a On peut trouver un ouvert non vide S' de S tel que, pour tout faisceau d'ensembles constant fini F' sur X', f'_*F' soit constructible, et que (F', f') soit cohomologiquement propre relativement à S' en dimension ≤ 0.

b Soit F un faisceau d'ensembles constructible sur X. Alors on peut trouver un ouvert non vide S' de S (dépendant de F) tel que f'_*F' soit constructible et que (F', f') soit cohomologiquement propre relativement à S' en dimension ≤ 0.

2 Supposons que les schémas de type fini de dimension $\leq \dim X_s$ sur une clôture algébrique $\overline{k}$ de $k(s)$ soient fortement désingularizables (SGA 5 I 3.1.5). Alors on a de plus les propiétés suivantes :

a On peut trouver un ouvert non vide S' de S tel que, pour tout faisceau en groupes constant fini F' sur X', d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de S, si Φ' est le champ des torseurs sous F', $f'_*\Phi'$ soit 1-constructible, et que (F', f') soit cohomologiquement propre relativement à S' en dimension ≤ 1.

b Soient $\mathbb{L}$ l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristiques résiduelles de S et Φ un ind-$\mathbb{L}$-champ 1-constructible sur X (0) , tel que, pour tout schéma X_1 étale sur X et pour tout couple d'objets x, x_1 de Φ_{X_1}, le faisceau $\mathbf{Hom}_{X_1}(x, x_1)$ soit constructible. On suppose de plus S localement noethérien. Alors on peut trouver un ouvert non vide S' de S tel que $f'_*\Phi'$ soit 1-constructible, que, pour tout couple

396 *d'objets y, y_1 d'une fibre $(f'_*\Phi')_{Y_1}$, $\mathbf{Hom}_{Y_1}(y, y_1)$ soit constructible, et que (Φ', f') soit cohomologiquement propre relativement à S' en dimension ≤ 1.*

Démonstration. On peut suppose S affine ; d'après SGA 4 VIII 1.1, on peut supposer S intègre ; enfin, par passage à la limite, on peut supposer que S est le spectre d'une algèbre de type fini sur $\mathbb{Z}$; en particulier S est alors noethérien. Comme la question est locale sur Y, on peut supposer Y affine. De plus il suffit, pour démontrer le théorème, de le faire après extension finie $S' \to S$, où S' est un schéma intègre et où $S' \to S$ est composé de morphismes étales et de morphismes finis radiciels surjectifs.

1) Cas des faisceaux d'ensembles constants

1) 1. Réduction au cas où X est normal sur S. Soit $X_{1\overline{s}}$ le normailisé de $(X_{\overline{s}})_{\text{réd}}$; quitte à restreindre S à un ouvert non vide et à faire une extension radicielle de S, on peut supposer que $X_{1\overline{s}}$ provient d'un schéma X_1 normal sur S, et que le morphisme $X_{1\overline{s}} \to X_{\overline{s}}$ provient d'un morphisme fini surjectif $p\colon X_1 \to X$ (EGA IV 8.8.2 et 9.6.1). Supposons le théorème démontré pour fp. Quitte à restreindre S à un ouvert, on peut supposer que, pour tout faisceau d'ensembles constant F sur X, (p^*F, fp) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0

et que $f_* p_*(p^* F)$ est constructible. D'après 1.9, $(p_* p^* F, f)$ est alors cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0. Le morphisme

$$F \longrightarrow p_* p^* F = G$$

est un monomorphisme. Il en résulte déjà, $f_* F$ étant un sous-faisceau de $f_* G$, que $f_* F$ est constructible (SGA 4 IX 2.9 (ii)) et que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ -1.

397 Soient $X_2 = X_1 \times_X X_1$, $q \colon X_2 \to X$ le morphisme canonique. D'après 1.11 1), on a une suite exacte

$$F \longrightarrow G \rightrightarrows q_* q^* F\ .$$

D'après ce que l'on vient de démontrer, appliqué a fq au lieu de f, on peut supposer, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, que, pour tout faisceau d'ensembles constant F sur X, $(q^* F, fq)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ -1, donc que $(q_* q^* F, f)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ -1. Il résulte alors de 1.13 1) que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0.

1) 2. Réduction au cas où X est normal affine sur S.

Soit U_s un ouvert affine de X_s dense dans X_s. Quitte à restreindre S à un ouvert non vide, on peut supposer que $U_s \to X_s$ se relève en une immersion ouverte $i \colon U \to X$, schématiquement dominante relativement à S (EGA IV 8.9.1). Comme le morphisme $X \to S$ est normal, on a d'après SGA 2 XIV 1.18 :

$$\operatorname{prof\,\acute{e}t}_{S-U}(X) \geq 2\ ;$$

par suite, pour tout faisceau constant F sur X, le morphisme canonique

$$F \longrightarrow i_* i^* F$$

est un isomorphisme. Il en résulte que, si l'on suppose le théorème démontré por fi et i, alors, après restriction de S à un ouvert non vide, $(i^* F, i)$ et $(i^* F, fi)$ sont cohomologiquement propres relativement à S en dimension ≤ 0. Il en est donc de même de (F, f) (1.6 2)). Comme de plus $f_* F = (fi)_*(i^* F)$ est constructible, ceci achève la réduction.

1) 3. Fin de la démonstration.

On peut supposer S normal (EGA IV 7.8.3). On peut trouver une compactification de X_s :

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "j_s"] \arrow[d, "f_s"'] & P_s \arrow[dl, "g_s"] \\ Y_s & \end{tikzcd}$$

398 où j_s est une immersion ouverte dominante et g_s un morphisme propre ; quitte à faire une extension radicielle de $k(s)$ et à remplacer P_s par son normalisé, ce qui ne change pas X_s, on

peut supposer P_s géométriquement normal. Quitte à restreindre S à un ouvert non vide et à faire une extension radicielle surjective, on peut supposer que le diagramme ci-dessus provient d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

où P est un schéma normal sur S, j une immersion ouverte schématiquement dominante relativement à S et g un morphisme propre (EGA IV 6.9.1, 9.9.4 et 9.6.1). Pour tout faisceau d'ensembles constant fini F sur X de valeur C, j_*F est le faisceau constant de valeur C (SGA 4 2.14.1), et il en est de même après tout changement de base $S' \to S$; il en résulte que (F, j) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0. Il en est donc de même de (F, f), puisque g est propre (1.8). Comme g est propre $f_*F = g_*C_P$ est constructible, ce qui achève la démonstration de 1) a).

2) Cas d'un faisceau d'ensembles constructible

Soit F un faisceau d'ensembles constructible sur X. D'après SGA 4 IX 2.14 (ii), on peut trouver une famille finie de morphismes $p_i \colon Z_i \to X$, et, sur chaque Z_i, un faisceau d'ensembles constant fini C_i, de sorte que l'on ait un monomorphisme

$$j \colon F \longrightarrow \prod_i p_{i*}C_i = G \ .$$

399 D'après 1) a), on peut supposer, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, que les (C_i, fp_i) sont cohomologiquement propres relativement à S en dimension ≤ 0, et que les $f_*p_{i*}C_i$ sont constructibles. On en conclut déjà que (G, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0 (1.9), donc que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ -1, et que f_*F est constructible. Soit K la somme amalgamée $K = G \coprod_F G$; comme F et G sont constructibles, il en est de même de K. On conclut donc de ce qui précède que, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, on peut supposer que (K, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ -1. Il résulte alors de 1.13 1) que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0.

3) Cas des faisceaux en groupes constants

Si F est un faisceau en groupes constant sur X, on note Φ le champ des torseurs sous F.

3) 1. Montrons d'abord que, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, pour tout faisceau en groupes constant F sur X, d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de S, (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0, et que $f_*\Phi$ est constructible.

On se ramène pour cela au cas où X est lisse sur S. Quitte à faire une extension finie de $k(s)$, ce qui est loisible car on peut la considérer comme composée d'une extension étale et d'une extension radicielle, on peut trouver un morphisme propre surjectif $p_s \colon X_{1s} \to X_s$, où X_{1s} est un schéma lisse sur S de même dimension que X_s, et, quitte à restreindre S à un ouvert non vide,

on peut supposer que p_s provient d'un morphisme propre surjectif $p\colon X_1 \to X$, où X_1 est un
400 schéma lisse sur S (EGA IV 9.6.1 et 12.1.6). Soient $X_2 = X_1 \times_X X_1$, $q\colon X_2 \to X$ le morphisme canonique. On a un diagramme exact de champs sur X

$$\Phi \longrightarrow p_*p^*\Phi \rightrightarrows q_*q^*\Phi$$

(1.11 2)). Le théorème étant supposé démontré dans le cas lisse, on voit tout d'abord que l'on peut supposer $f_*p_*p^*\Phi$ constructible ; il en est donc de même de $f_*\Phi$ (3.1.1 ci-dessous). De plus, d'après 1.6 2), on peut supposer $(p_*p^*\Phi, f)$ cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0 ; il en résulte que (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ -1. On peut donc supposer que $(q_*q^*\Phi, f)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ -1, et cela entraîne que (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0 (1.12 1)).

On se ramène ensuite comme dans 1) 2 au cas où X est lisse et affine sur S. Soit alors

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[dl, "q"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

une compactification de X, où i est une immersion ouverte dominante et q un morphisme propre. Comme on a $\dim P_s = \dim X_s$, on peut appliquer l'hypothèse de résolution des singularités à $P_{\bar{s}}$. Quitte à faire une extension étale et une extension radicielle de S, on peut trouver un morphisme propre $r\colon Z \to P$, où Z est lisse sur S, $r^{-1}(X) \simeq X$, et où $r^{-1}(X)$ est le complémentaire dans Z d'un diviseur à croisements normaux relativement à S. Tout torseur sous F est alors modérément ramifié sur Z relativement à S (2.3 b)). Il résulte donc de 2.7 que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0, ce qui démontre notre assertion.

401 3) **2. Réduction au cas où X est lisse sur S**

Quitte à faire une extension finie de $k(s)$, on peut trouver un morphisme propre surjectif $p_s\colon X_{1s} \to X$, où X_{1s} est un schéma lisse sur s, et on peut supposer que p_s provient d'un morphisme propre surjectif $p\colon X_1 \to X$, où X_1 est lisse sur S. Supposons le théorème démontré pour fp et montrons-le pour f. Soit F un faisceau en groupes constant fini sur X, d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de S et Φ le champ des torseurs sous F. Soient $X_2 = X_1 \times_X X_1$, $X_3 = X_1 \times_X X_1 \times_X X_1$, $q\colon X_2 \to X$, $r\colon X_3 \to X$ les morphismes canoniques. D'après 1.11 2), on a un diagramme exact de champs

$$\Phi \longrightarrow p_*p^*\Phi \rightrightarrows q_*q^*\Phi \Rrightarrow r_*r^*\Phi \quad .$$

Pour prouver que (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1, il suffit de montrer qu'il en est de même de $(p_*p^*\Phi, f)$, que $(q_*q^*\Phi, f)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0 et que $(r_*r^*\Phi, f)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ -1 (1.12 2)). D'après 3) 1 ci-dessus on peut supposer que, pour tout faisceau en groupes constant fini F, $(q^*\Phi, fq)$, $(q^*\Phi, q)$, $(r^*\Phi, fr)$, $(r^*\Phi, r)$ sont cohomologiquement propres relativement à S en dimension ≤ 0. Il résulte alors de 1.6 2) que $(q_*q^*\Phi, f)$

et $(r_*r^*\Phi, f)$ sont cohomologiquement propres relativement à S en dimension ≤ 0. Le théorème étant supposé démontré dans le cas lisse, $(p^*\Phi, fp)$ et $(p^*\Phi, p)$ donc aussi $(p_*p^*\Phi, f)$ (1.6 2)) sont cohomologiquement propres relativement à S en dimension ≤ 1. Ceci montre bien que (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1.

De plus $f_*p_*p^*\Phi$ est 1-constructible par hypothèse ; d'après 3.1 on peut supposer que $f_*q_*q^*\Phi$ est constructible ; il résulte donc de 3.1.1 ci-dessous que $f_*\Phi$ est 1-constructible.

402 3) 3. Réduction au cas où X est lisse affine sur S.

D'après 3)2, on peut supposer X lisse sur S. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines, et soit X_1 la somme directe des U_i, $p\colon X_1 \to X$ le morphisme canonique. Comme p est un morphisme de descente effective pour la catégorie des faisceaux étales de type fini sur des schémas variables, on voit comme dans 3)2 que, si l'on suppose le théorème démontré pour les U_i, i.e. pour X_1, il est aussi vrai pour X.

3) 4. Cas où X est lisse affine sur S.

On voit comme dans 3)1 que, quitte à restreindre S à un ouvert non vide et à faire une extension étale et une extension radicielle surjectives de S, on peut trouver un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[dl, "q"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

où P est un schéma lisse sur S, X le complémentaire dans P d'un diviseur à croisements normaux relativement à S et g un morphisme propre. Si F est un faisceau constant d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de S, tout torseur sous F est modérément ramifié sur P relativement à S (2.3 b)). Le fait que (F, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1 et que $f_*\Phi$ soit constructible résulte alors de 2.7.

4) **Démonstration de** 2) b)

4) 1. Cas où Φ est une gerbe.

On peut trouver un morphisme étale surjectif de type fini $p\colon X_1 \to X$, tel que $p^*\Phi$ soit un gerbe triviale. Par descente, comme dans 3)2, on voit qu'il suffit de prouver le théorème pour X_1,
403 $X_1 \times_X X_1$ et $X_1 \times_X X_1 \times_X X_1$. On est donc ramené au cas où Φ est le gerbe des torseurs sous un faisceau en groupes constructible F, dont les fibres sont d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de S.

D'après SGA 4 IX 2.14, on peut trouver une famille finie de morphismes finis $p_i\colon Z_i \to X$, et, pour chaque i, un faisceau en groupes constant fini C_i, d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles de S, de sorte que l'on ait un morphisme

$$j\colon F \to \prod_i p_{i*}C_i \;=\; G \quad .$$

Soit Φ_i le champ de torseurs sous C_i et Ψ le champ des torseurs sous G. Il résulte de 2)a) que, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, on peut supposer que les (C_i, fp_i) sont cohomologiquement propres relativement à S en dimension ≤ 1, et que les champs $f_* p_{i*} \Phi_i$ sont 1-constructibles. Il résulte alors de 1.9 que les $(p_{i*} C_i, f)$ sont cohomologiquement propres relativement à S en dimension ≤ 1 ; il en est donc de même de (G, f). De plus, comme $p_{i*}\Phi_i$ est équivalent au champ des torseurs sous le groupe $p_{i*}C_i$ (SGA 4 VIII 5.8), on voit que $f_*\Psi$ est 1-constructible.

Comme $\mathrm{R}^1 f_* G$ est constructible, on peut trouver un faisceau représentable par un Y-schéma étale de type fini T et un épimorphisme

$$a \colon T \to \mathrm{R}^1 f_* G$$

(SGA 4 IX 2.7) ; de plus on peut supposer que l'image de la section identique de $T(T)$ est définie par un torseur Q sur $X \times_Y T = X_T$, de groupe $G|X_T$. Soient $f_T \colon X_T \to T$ le morphisme canonique, $F_T = F|X_T$, etc. D'après 1) b) on peut supposer, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, que $(Q/F_T, f_T)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0 et que $f_{T*}(Q/F_T)$ est constructible. Il résulte alors de 3.1.2 que $f_*\Psi$ est constructible.

404 Montrons que (F, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1. D'après 1.13 2) il suffit de prouver que, pour tout schéma Y_1 étale sur Y et pour tout torseur Q_1 sur $X_1 = X \times_Y Y_1$, si $f_1 \colon X_1 \to Y_1$ est le morphisme canonique, alors $(Q_1/F_1, f_1)$ cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0. Or, par définition de T, Q_1 est, localement pour la topologie étale de Y_1, image inverse de Q, ce qui démontre notre réduction.

4) 2. Cas général.

On voit en utilisant le lemme 6.1.1, 4) 1 et 1) a) que, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, on peut supposer $S(f_*\Phi)$ constructible et $(S\Phi, f)$ cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0. On peut alors trouver un faisceau représentable par un Y-schéma étale de type fini T et un épimorphisme

$$a \colon T \longrightarrow S(f_*\Phi)\ .$$

On reprend les notations de 4) 1, et on pose de plus $Z = T \times_Y T$, $X_Z = X \times_Y Z$ et on note $f_Z \colon X_Z \to Z$ le morphisme canonique. On peut supposer T choisi de sorte que l'image q de la section identique de $T(T)$ par a soit définie par un objet p de $(f_*\Phi)_T = \Phi_{X_T}$. Soient p_1 et p_2 (resp. q_1 et q_2) les images inverses de p (resp. q) par les deux projections de Z dans T. On peut supposer, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, que $(\mathbf{Aut}_{X_T}(p), f_T)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1, que $(\mathbf{Hom}_{X_Z}(p_1, p_2), f_Z)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0, et que $f_{T*}(\mathbf{Aut}_{X_T}(p))$, $f_{Z*}(\mathbf{Hom}_{X_Z}(p_1, p_2))$ sont constructibles (a) 1) et 4) 1)).

On en déduit d'abord que, pour tout schéma Y_1 étale sur Y et pour tout couple d'objets y, y_1 de $(f_*\Phi)_{Y_1}$, le faisceau $\mathbf{Aut}_{Y_1}(y)$ (resp. $\mathbf{Hom}_{Y_1}(y, y_1)$) est constructible, un tel faisceau étant, localement pour la topologie étale de Y_1, image inverse de $f_{T*}(\mathbf{Aut}_{X_T}(p))$ (resp. de $f_{Z*}(\mathbf{Hom}_{X_Z}(p_1, p_2))$).

405 Il reste à prouver que (Φ, f) est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1. Il suffit pour cela de montrer que, pour tout S'-schéma S et pour tout point géométrique $\overline{y}'$ de Y, si l'on note $\overline{Y}$ le localisé strict de Y en y', $\overline{X} = X \times_Y \overline{Y}$, etc. , alors le foncteur canonique

$$\overline{\varphi}\colon \Phi(\overline{X}) \longrightarrow \Phi'(\overline{X}')$$

est une équivalence de catégories.

Montrons que $\overline{\varphi}$ est pleinement fidèle. Soient x, $y \in \Phi(\overline{X})$, x', y' leurs images dans $\Phi'(\overline{X}')$ et montrons que le morphisme canonique

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\overline{X}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{X}'}(x', y')$$

est bijectif. Par définition de T il existe deux morphismes de $\overline{Y}$ dans T tels que x et y soient les images inverses de p par ces deux morphismes. Cela revient à dire qu'il y a un morphisme $\overline{Y} \to Z$, d'où un morphisme $h\colon \overline{X} \to X_Z$ tel que l'on ait

$$h^*(p_1) = x \qquad h^*(p_2) = y.$$

Par suite on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Hom}_{\overline{X}}(x, y) = h^*(\mathbf{Hom}_{X_Z}(p_1, p_2)) .$$

mais, compte tenu du fait que $(\mathbf{Hom}_{X_Z}(p_1, p_2), f_Z)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0, on voit qu'il en est de même de $(\mathbf{Hom}_{\overline{X}}(x, y), \overline{f})$, ce qui prouve que le morphisme $(*)$ est bijectif.

Montrons que $\overline{\varphi}$ est essentiellement surjectif. Soit $x' \in \Phi'(\overline{X}')$. Comme $(S\Phi, f)$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 0, le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(\overline{X}, \overline{S\Phi}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\overline{X}', \overline{S\Phi}')$$

est bijectif. Soit G' la sous-gerbe maximale de Φ' engendrée par x' ; il existe alors une sous-gerbe maximale G de $\overline{\Phi}$ dont l'image inverse sur $\overline{X}'$ est G'. D'après 4) 1 $(G, \overline{f})$ est cohomologiquement propre relativement à S en dimension ≤ 1 ; par suite le foncteur canonique

$$G(\overline{X}) \to G'(\overline{X}')$$

406 est une équivalence de catégories, ce qui prouve l'existence d'un élément x de $\Phi(\overline{X})$ dont
part 80 l'image dans $\Phi'(X')$ soit isomorphe à x' et achève la démonstration du théorème.

Lemme 3.1.1 *Soient S un schéma localement noethérien et*

$$\Phi \xrightarrow{p} \Phi_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \Phi_2$$

un diagramme exact de champs sur S (1.10.1). Si Φ_1 est constructible, il en est de même de Φ. Si, pour tout schéma S' étale sur S et pour tout couple d'objet x_1, y_1 de $(\Phi_1)_{S'}$ le faisceau $\mathbf{Hom}_{S'}(x_1, y_1)$ est constructible, alors, pour tout couple d'objets x, y de $\Phi_{S'}$, il en est de même de $\mathbf{Hom}_{S'}(x, y)$. Supposons que Φ_1 soit l–constructible (0) et que Φ_2 soit constructible, alors Φ est l–constructible.

Pour tout schéma S' étale sur S et pour tout objet x de $\Phi_{S'}$, on a un monomorphisme

$$\mathbf{Aut}_{S'}(x) \to \mathbf{Aut}_{S'}(p(x)).$$

Il résulte donc de SGA 4 IX 2.9 que, si Φ_1 est constructible, il en est de même de Φ, et la deuxième assertion du lemme se démontre de la même façon.

Supposons maintenant Φ_1 l–constructible et Φ_2 constructible. Le morphisme p induit sur les faisceaux de sous-gerbes maximales un morphisme

$$\varphi\colon S\Phi \to S\Phi_1.$$

Soit G l'mage de $S\Phi$ par φ ; d'après SGA 4 IX 2.9, G est un faisceau constructible. On peut donc trouver un faisceau représentable par un S–schéma étale de type fini T et un épimorphisme

$$a\colon T \to G$$

407 (SGA 4 IX 2.7). De plus on peut choisir T de sorte que l'image y de section identique de $T(T)$ par a soit définie par un objet x_1 de (Φ_1) de la forme $x_1 = p(x)$, où $x \in \Phi_T$.

Il suffit de montrer que, pour tout point s de S, il exist un ouvert non vide U de $\overline{\{s\}}$ tel que $S\Phi|U$ soit localement constant constructible. Soient $s \in S$, $\overline{s}$ un point géométrique au–dessus de s et $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n$ les éléments de $G_{\overline{s}}$. Par définition de T il existe des morphismes $h_i\colon \overline{s} \to T$ tels que l'on ait $h_i^*(y) = \overline{y}_i$. Soit S' le produit fibré sur S de n schémas isomorphes à T, $h\colon \overline{s} \to S'$ le produit fibré des h_i, y_i (resp. x_i) l'image inverse de y (resp. x) par la i–ème projection de S' sur T. Soit F_i le sous–faisceau de $S\Phi|S'$ image réciproque de y_i et montrons que les F_i sont constructibles. Le faisceau F_i est un quotient de faisceau F_i' tel que, pour tout schéma S'' étale au–dessus de S', on ait

$$\begin{aligned} F_i'(S'') \quad = \quad &\{\text{classes mod. isomorphisme d'objet } z \text{ de } \Phi_{S''} \text{ muni} \\ &\text{d'un isomorphisme } i\colon p(z) \simeq p(x_i|S'').\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que les F_i' sont constructibles. Or, si l'on pose $z_i = p_1p(x_i),\ z_i' = p_2p(x_i)$, on a un monomorphisme

$$\Psi_i\colon F_i' \to \mathbf{Isom}_{S'}(z_i, z_i'),$$

obtenu en associant, à tout schéma S'' étale sur S' et à tout objet z de $\Phi_{S''}$ tel que l'on ait un isomorphisme $i\colon p(z) \simeq p(x_i|S'')$, l'isomorphisme de z_i dans z_i' défini par la condition que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p_1p(z) & \xrightarrow{p_1(i)} & z_i \\ {\scriptstyle j}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ p_2p(z) & \xrightarrow{p_2(i)} & z_i' \end{array}$$

408 soit commutatif (j est le morphisme canonique associé au diagramme exact).

Le morphisme Ψ_i est injectif car dire que deux objets $z,\ z'$, tels que l'on ait des ismorphismes $i\colon p(z) \xrightarrow{\sim} p(x_i|S'')$, $i'\colon p(z') \xrightarrow{\sim} p(x_i|S'')$, définissent le même élément de $\mathbf{Isom}_{S''}(z_i, z_i')$ revient à dire que l'on a $p_1(i'^{-1}i) = p_2(i'^{-1}i)$, i.e. que $i'^{-1}i$ provient d'un isomorphisme $z \to z'$. Le faisceau F_i' étant un sous–faisceau de $\mathbf{Isom}_{S'}(z_i, z_i')$ est constructible.

Comme on peut trouver un ouvert non vide U de $\overline{\{s\}}$ tel que $y_1|U, \ldots, y_n|U$ engendrent G, il résulte du lemme 6.1.2 ci–dessous que $S\Phi|U$ est constructible, donc, quitte à restreindre U, $S\Phi|U$ est localement constant constructible.

Lemme 3.1.2 *Soient S un schéma localement noethérien, $f\colon X \to S$ un morphisme, $F \to G$ un monomorphisme de faisceaux en groupes sur X, Ψ (resp. Ψ_1) le champ des torseurs sous F (resp. sous G), $\Phi = f_*\Psi$, $\Phi_1 = f_*\Psi_1$. On suppose donné un faisceau sur S représentable par un S–schéma étale de type fini T et un morphisme surjectif*

$$a\colon T \to S\Phi_1 \simeq \mathrm{R}^1 f_*G,$$

de sorte qu'il existe un torseur Q sur $X_T = X \times_S T$ de groupe $G|X_T$ qui définisse dans $\mathrm{R}^1 f_*G(T)$ l'image par a de la section identique de $T(T)$. Soit $f_T\colon X_T \to T$ le morphisme canonique et posons $F_T = F|X_T$. On suppose que Φ_1 est l–constructible et que $f_{T*}(Q/F_T)$ est constructible. Alors Φ est l–constructible.

Il suffit en effet de recopier la démonstration de 3.1.1, le fait que l'on ait des morphismes Ψ_i étant remplacé par le fait que l'on a des isomorphismes

409 $$F_i' \xrightarrow{\sim} f_*(Q/F_T)|S'.$$

Remarque 3.1.3 *Supposons que $k = k(s)$ soit de caractéristique nulle ; alors les schémas de type fini sur $\overline{k}$ de dimension $\leq \dim X$ sont fortement désingularisables et la démonstration de 3.1 permet de prouver les résultats suivants :*

a) Il existe un ouvert non vide S_1 de S tel que, pour tout schéma S' au–dessus de S_1 dont les points maximaux sont de caractéristique nulle et pour tout faisceau d'ensembles localement constant constructible F sur $X' = X \times_S S'$, (F, f') soit cohomologiquement propre relativement à S' en dimension ≤ 0.

b) Si toutes les caractéristiques résiduelles de S sont nulles, il existe un ouvert non vide S_1 de S tel que, pour tout schéma S' au–dessus de S_1 et pour tout faisceau en groupes localement constant constructible F sur X', (F, f') soit cohomologiquement propre relativement à S' en dimension ≤ 1.

Il suffit en effet de recopier la démonstration de 3.1.2)a). La proposition 2.7 utilisée dans 3) 4 s'applique au cas d'un faisceau localement constant F, car, reprenant les notations de 3) 4, tout torseur sous F est modérément ramifié sur P relativament à S puisque toutes les caractéristiques résiduelles de S sont nulles.

Corollaire 3.2 *Soient k un corps de caractéristique $p \geq 0$, p' l'ensemble des nombres premiers distincts de p, $f : X \to k$ un morphisme cohérent.*

1) *Pour tout faisceau d'ensembles F, (F, f) est cohomologiquement propre en dimension ≤ 0.*

2) *Supposons satisfaite l'une des deux conditions suivantes :*

   a) *f est de type fini et les schémas de type fini de dimension $\leq \dim X$ sur une clôture algébrique de k sont fortement désingularisables.*

410 b) *Les schémas de type fini sur une clôture algébrique de k sont fortement désingularisables.*

   Alors, pour tout faisceau de ind–p'–groupe F, (F, f) est cohomologiquement propre en dimension ≤ 1.

Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de ind–p'–groupes). D'apprès SGA 4 IX 2.7.2 on peut écrire F comme limite inductive filtrante

$$F = \varinjlim F_i \, ,$$

où les F_i sont des faisceaux d'ensembles (resp. de ind–p'–groupes) constructibles. Comme f es cohérent, f_* (resp. $\mathrm{R}^1 f_*$) commute aux limites inductives (SGA 4 VII 3.3). Si l'on sait que les (F_i, f) sont cohomologiquement propres en dimension ≤ 0 (resp. que tout faisceau d'ensemble est cohomologiquement propre en dimension ≤ 0 et que les (F_i, f) sont cohomologiquement propres en dimension ≤ 1), il en sera de même de (F, f). On peut donc supposer F constructible.

Si l'on suppose f de type fini (resp. satisfaisant à a)), la proposition résulte de 3.1 1) b) (resp. de 3.1 2) b)). Prouvons maintenant 3.2 quand on ne suppose plus f de type fini. Pour tout schéma S' au–dessus de k et pour tout point géométrique $\overline{s}$ de S', on note $\overline{k}$ (resp. $\overline{S}'$) le localisé strict de k en $\overline{s}$ (resp. de S' en $\overline{s}$), $\overline{X}$ l'image inverse de X sur $\overline{k}$, et on considère le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"'] & \overline{X}' \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\overline{f}'"'] \\ \overline{k} & \overline{S}' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Il suffit de prouver que, pour tout S', pour tout $\overline{s}$, le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(\overline{X}, \overline{F}) \to \mathrm{H}^0(\overline{X}', \overline{F}') \qquad \text{(resp. } \mathrm{H}^1(\overline{X}, \overline{F}) \to \mathrm{H}^1(\overline{X}', \overline{F}'))$$

est un isomorphisme. Il suffit de montrer que l'on a les relations

$$(*) \qquad \overline{F} \simeq g_* g^* \overline{F} \qquad \text{(resp. } \mathrm{R}^1 g_*(g^* \overline{F})) = 0).$$

411 Or, sous cette forme, la question est locale sur X pour la topologie étale. On peut donc supposer X affine ; par passage à la limite on peut supposer X de type fini sur k. On sait alors que (F, f) est cohomologiquement propre en dimension ≤ 0 (resp. ≤ 1) et qu'il en est de même quand on
part 81 remplace X par un schéma étale de type fini sur X, ce qui prouve $(*)$.

Théorème 3.3 *Soient S un schéma irréductible de point générique s, $f\colon X \to S$ un morphisme de présentation finie. Supposons que les schémas de type fini de dimension $\leqslant \dim X_s$ sur une clôture algébrique $\bar{k}$ de k soient désingularisables (EGA IV 7.9.1). Alors, si $\mathbb{L}$ désigne l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristiques résiduelles de S, on peut trouver un ouvert non vide S_1 de S tel que le morphisme $f|S_1$ soit universellement localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$.*

On peut supposer S intègre et X réduit (SGA 4 VIII 1.1). Par passage à la limite on peut supposer S noethérien. De plus, pour démontrer le théorème, il suffit de le faire après extension finie $S_1 \to S$, où S_1 est un schéma intègre et où $S_1 \to S$ est composé d'extensions étales et d'extensions radicielles surjectives.

Montrons d'abord que, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, f est universellement localement 0-acyclique. Quitte à faire une extension radicielle de $k(s)$, on peut supposer que le morphisme $(X_s)_{\text{réd}} \to s$ est séparable ; on peut donc supposer, quitte à restreindre S à un ouvert non vide et à faire une extension radicielle surjective de S, que le morphisme f est plat, à fibres géométriques séparables (EGA IV 12.1.1), ce qui entraîne que f est universellement 0-acyclique (SGA 4 XV 4.1).

Montrons que, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, f est universellement localement
412 1-asphérique pour $\mathbb{L}$. Quitte à faire une extension finie de $k(s)$, ce qui est loisible car on peut la considérer comme composée d'une extension étale et d'une extension radicielle, on peut trouver un morphisme propre surjectif $p_s\colon Y_s \to X_s$, où Y_s est un schéma lisse sur S, de même dimension que X_s, et on peut supposer que p_s provient d'un morphisme propre surjectif $p\colon Y \to X$, où Y est un schéma lisse sur S (EGA IV 9.6.1 et 12.1.6). Il suffit de montrer que, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, pour tout diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
S'' \arrow[d, "i"'] & X'' \arrow[l, "f''"'] \arrow[d, "j"] \\
S' \arrow[d] & X' \arrow[l, "f'"'] \arrow[d] \\
S & X, \arrow[l, "f"']
\end{tikzcd}$$

où i est étale de présentation finie, et pour tout faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes F sur S'', si Φ est le champ des torseurs sous F, alors le morphisme canonique

$$f'^{*} i_{*}\Phi \longrightarrow j_{*} f''^{*}\Phi$$

est une équivalence. Soient $Z = Y \times_X Y, T = Y \times_X Y \times_X Y$. On a de façon naturelle un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
S'' \arrow[d, "i"'] & X'' \arrow[l, "f''"'] \arrow[d, "j"'] & Y'' \arrow[l, "p''"'] \arrow[d] & Z'' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d] & T'' \arrow[l, shift left=1ex] \arrow[l] \arrow[l, shift right=1ex] \arrow[d] \\
S' \arrow[d] & X' \arrow[l, "f'"'] \arrow[d] & Y' \arrow[l, "p'"'] \arrow[d] & Z' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d] & T' \arrow[l, shift left=1ex] \arrow[l] \arrow[l, shift right=1ex] \arrow[d] \\
S & X \arrow[l, "f"'] & Y \arrow[l, "p"'] & Z' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & T' \arrow[l, shift left=1ex] \arrow[l] \arrow[l, shift right=1ex]
\end{tikzcd}$$

413 Soient $q\colon Z \to X$ et $r\colon T \to X$ les morphismes canoniques, les notations q', r', q'', r'' ayant un sens évident. D'après 1.11 2), on a le diagramme essentiellement commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
f'^{*}i_{*}\Phi \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & p'_{*}p'^{*}(f'^{*}i_{x}\Phi) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "b"'] & q'_{*}q'^{*}(f'^{*}i_{*}\Phi) \arrow[r, shift left=1ex] \arrow[r] \arrow[r, shift right=1ex] \arrow[d, "c"'] & r'_{*}r'^{*}(f'^{*}i_{*}\Phi) \arrow[d, "d"'] \\
j_{*}f''^{*}\Phi \arrow[r] & j_{*}p''_{*}p''^{*}(f''^{*}\Phi) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & j_{*}q''_{*}q''^{*}(f''^{*}\Phi) \arrow[r, shift left=1ex] \arrow[r] \arrow[r, shift right=1ex] & j_{*}r''_{*}r''^{*}(f''^{*}\Phi)
\end{tikzcd}$$

Comme Y est lisse sur S, le morphisme fp est universellement localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ (SGA XV 2.1), et il résulte de [2, VII 2.1.7] que b est une équivalence de catégories. D'autre part, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, on peut supposer que les morphismes $Z \to S$ et $T \to S$ sont universellement localement 0-acycliques. Il en résulte que les foncteurs c et d sont pleinement fidèles, et le diagramme ci-dessus montre alors que a est une équivalence, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.4 *Soient k un corps de caractéristique $p \geqslant 0$, p' l'ensemble des nombres premiers distincts de p, $f\colon X \to k$ un morphisme cohérent. Supposons satisfaite l'une des deux conditions suivantes :*

a) f est de type fini et les schémas de type fini de dimension $\leqslant \dim X$ sur une clôture algébrique de k sont désingularisables.

b) Les schémas de type fini sur une clôture algébrique de k sont désingularisables.

Alors f est universellement localement 1-asphérique pour p'.

Le cas a) résulte de 3.3. Dans le cas b), la question étant locale sur X, on peut supposer X
414 affine ; par passage à la limite (SGA 4 XV 1.3), on se ramène au cas où X est de type fini sur k.

Corollaire 3.5 *Soient S un schéma irréductible de point générique s, $f\colon X \to S$ un morphisme de présentation finie. Supposons que les schémas de type fini de dimension $\leqslant \dim X_s$ sur une clôture algébrique $\overline{k}$ de $k(s)$ soient fortement désingularisables (SGA 5 I 3.1.5). Si $\mathbb{L}$ désigne l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristiques résiduelles de S, on peut trouver un ouvert non vide S_1 de S tel que, pour toute spécialisation $\bar{s}_1 \to \bar{s}_2$ de points géométriques de S_1, le morphisme de spécialisation (2.10)*

$$\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}_1}) \longrightarrow \pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}_2})$$

soit bijectif.

D'après 3.1 et 3.3, on peut, quitte à restreindre S à un ouvert non vide, supposer que f est localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$, et que, pour tout faisceau de $\mathbb{L}$-groupes constant fini F sur X, (F, f) est cohomologiquement propre en dimension $\leqslant 1$. Il résulte alors de 1.14 que, pour toute spécialisation $\bar{s}_1 \to \bar{s}_2$ de points géométriques de S_1, le morphisme de spécialisation

$$\left(\mathrm{R}^1 f_* F\right)_{\bar{s}_2} \longrightarrow \left(\mathrm{R}^1 f_* F\right)_{\bar{s}_1}$$

est bijectif. Le corollaire n'est autre que la traduction de ce qui précède en termes de groupes fondamentaux.

4 Suites exactes d'homotopie

4.0 Soient X et S deux schémas connexes, $f\colon X \to S$ un morphisme, a un point géométrique de X, $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers. Soit K le noyau de l'homomorphisme canonique $\pi_1(X, a) \to \pi_1(S, a)$ et N le plus petit pro-sous-groupe distingué de K tel que K/N soit un pro-$\mathbb{L}$-groupe $K^{\mathbb{L}}$. Alors N est distingué dans $\pi_1(X, a)$ et on note

$$\pi'_1(X, a)$$

415 le quotient de $\pi_1(X, a)$ par N. Si a est un point géométrique d'une fibre géométrique $X_{\bar{s}}$, les morphismes canoniques

$$\pi_1(X_{\bar{s}}, a) \longrightarrow \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(S, a)$$

permettent de définir des morphismes canoniques

$$\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a) \xrightarrow{u} \pi'_1(X, a) \xrightarrow{v} \pi_1(S, a)$$

On a $vu = 0$.

Proposition 4.1 *Soient S un schéma connexe, $f\colon X \to S$ un morphisme localement 0-acyclique (SGA 4 XV 1.11) ; supposons de plus f 0-acyclique (ce qui, lorsque f est cohérent, revient à dire que les fibres géométriques de f sont connexes (SGA 4 XV 1.16)). Soit $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers. Si S' est un schéma étale sur S, on note X', f' les images inverses de X, f sur S'. Supposons que, pour tout revêtement étale S' de S et pour tout revêtement étale E de X', quotient d'un revêtement galoisien de groupe un $\mathbb{L}$-groupe, (E, f') soit cohomologiquement propre relativement à S' en dimension $\leqslant 0$ et $f'_* E$ constructible. Alors, si $\bar{s}$ est un point géométrique de S et a un point géométrique de la fibre $X_{\bar{s}}$, la suite d'homomorphismes de groupes*

(4.1.1) $$\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a) \xrightarrow{u} \pi'_1(X, a) \xrightarrow{v} \pi_1(S, a) \longrightarrow 1$$

est exacte

Cet énoncé généralise X.1.4, dont on va copier la démonstration.

Montrons d'abord que v est surjectif. Il suffit de montrer que, pour tout revêtement étale connexe S' de S, X' est aussi connexe (V.6.9). Soit C un ensemble ayant au moins deux éléments. Il résulte du fait que f est 0-acyclique que le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(S', C_{S'}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X', C_{X'})$$

est bijectif, donc que X' est connexe, d'où la surjectivité de v.

416 Par définition de $K^{\mathbb{L}}$ (4.0), on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow K^{\mathbb{L}} \longrightarrow \pi_1'(X, a) \longrightarrow \pi_1(S, a) \longrightarrow 1$$

Soient $\widetilde{S}$ le revêtement universel de S et $\widetilde{X} = \widetilde{S} \times_S X$; le groupe $K^{\mathbb{L}}$ classe les revêtements galoisiens P de groupe un $\mathbb{L}$-groupe, tels qu'il existe un revêtement étale S' de S et un revêtement galoisien Q de $X' = X \times_S S'$ tels que l'on ait un isomorphisme $P \simeq Q \times_{X'} \widetilde{X}$. Pour que la suite (4.1.1) soit exacte, il faut et il suffit que le morphisme canonique

$$\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a) \longrightarrow K^{\mathbb{L}}$$

soit surjectif. D'après l'interprétation de $K^{\mathbb{L}}$ cela revient à dire que, pour tout revêtement étale S' de S et pour tout revêtement galoisien Q de X' de groupe un $\mathbb{L}$-groupe, tel que $P = Q \times_{X'} \widetilde{X}$ soit connexe, alors $Q|X_{\bar{s}}$ est connexe. Montrons que cette dernière condition est satisfaite. Soient en effet S' un revêtement étale de S, Q un revêtement galoisien de X' de groupe un $\mathbb{L}$-groupe F, tel que $Q|X_{\bar{s}}$ soit disconnexe et montrons que, quitte à remplacer S' par un revêtement étale, Q devient disconnexe. Il existe un sous-groupe G de F distinct de F et un torseur R sous $G|X_{\bar{s}}$ tel que $Q|X_{\bar{s}}$ s'obtienne par extension du groupe structural $G \to F$ à partir de R. Le revêtement étale $E = Q/G$ de X' est tel que $E|X_{\bar{s}}$ ait une section. D'après 1.16 f_*E est localement constant constructible et, quitte à remplacer S' par un revêtement étale, on peut même supposer que f_*E est constant. Comme (E, f') est cohomologiquement propre relativement à S' en dimension $\leqslant 0$ et comme $\mathrm{H}^0(X_{\bar{s}}, E|X_{\bar{s}})$ est non vide, on voit que E a une section. Mais ceci prouve que Q est
part 82 disconnexe, ce qui achève la démonstration.

On déduit de 4.1 le lemme suivant, qui sera utilisé dans 4.6.

Lemme 4.2 *Soient S un schéma connexe, $f \colon X \to S$ un morphisme localement 0-acyclique*
417 *et 0-acyclique, $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers. Supposons que, pour tout faisceau de $\mathbb{L}$-groupes constant fini F sur X, (F, f) soit cohomologiquement propre relativement à S en dimension $\leqslant 1$, et que, pour tout revêtement étale S' de S et pour tout revêtement étale E de X', quotient d'un revêtement galoisien de groupe un $\mathbb{L}$-groupe, f'_*E soit constructible. Alors, si $\bar{s}$ est un point géométrique de S et a un point géométrique de la fibre $X_{\bar{s}}$, la suite d'homomorphismes de groupes*

$$\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a) \longrightarrow \pi_1'(X, a) \longrightarrow \pi_1(S, a) \longrightarrow 1$$

est exacte.

les hypothèses de 4.1 sont satisfaites. Il résulte en effet de 1.13 3) que, pour tout schéma S' étale sur S et pour tout revêtement étale E de X', quotient d'un revêtement galoisien de groupe un $\mathbb{L}$-groupe, (E, f') est cohomologiquement propre relativement à S' en dimension $\leqslant 0$.

Proposition 4.3 *Soient S un schéma connexe, $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers, $f\colon X \to S$ un morphisme 0-acyclique, localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ (SGA 4 XV 1.11), $g\colon S \to X$ une section de f. Soient $\bar{s}$ un point géométrique de S, a un point géométrique de la fibre $X_{\bar{s}}$. On suppose que, pour tout faisceau de $\mathbb{L}$-groupe constant F, (F, f) est cohomologiquement propre en dimension $\leqslant 1$, que l'image directe par f du champ des torseurs sous F est un champ 1-constructible (0) et que, pour tout revêtement étale E de X', quotient d'un revêtement galoisien de groupe un $\mathbb{L}$-groupe, f'_*E est constructible. Alors la suite d'homomorphismes de groupes*

$$1 \longrightarrow \pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a) \xrightarrow{\ u\ } \pi'_1(X, a) \xrightarrow{\ v\ } \pi_1(S, a) \longrightarrow 1 \tag{4.3.1}$$

est exacte.

Compte-tenu de 4.2, il suffit de montrer l'injectivité du morphisme u, i.e. de prouver que,
418 pour tout revêtement principal $\overline{Z}$ de $X_{\bar{s}}$ de groupe un $\mathbb{L}$-groupe C, il existe un revêtement étale Z de X et un morphisme d'une composante connexe de $Z|X_{\bar{s}}$ dans $\overline{Z}$ (V.6.8). Soient donc $\overline{Z}$ un revêtement principal de $X_{\bar{s}}$ de groupe un $\mathbb{L}$-groupe C et $\bar{z}$ sa classe dans $\mathrm{H}^1(X_{\bar{s}}, C_{X_{\bar{s}}})$. D'après 1.5 d), on a un isomorphisme canonique

$$\left(\mathrm{R}^1 f_* C_X\right)_{\bar{s}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X_{\bar{s}}, C_{X_{\bar{s}}}),$$

et d'après 1.16, $\mathrm{R}^1 f_* C_X$ est un faisceau localement constant constructible. On peut donc trouver un revêtement étale S' de S tel que $\mathrm{R}^1 f_* C_X|S'$ soit constant. Si $\bar{s} \to S'$ est un point géométrique au-dessus du point géométrique $\bar{s} \to S$, il existe un élément z de $\mathrm{H}^0(S', \mathrm{R}^1 f_* C_X)$ dont l'image dans $\mathrm{H}^1(X_{\bar{s}}, C_{X_{\bar{s}}})$ est $\bar{z}$. D'après le lemme 4.3.1 ci-dessous, on peut trouver un revêtement étale S'_1 de S' et un torseur P sur X'_1 de groupe C dont l'image dans $\mathrm{H}^0(S'_1, \mathrm{R}^1 f_* C)$ soit égale à la restriction de z. Le torseur P est représentable par un revêtement étale Z de $X'_1 = X \times_S S'_1$ tel que $Z \times_{X'_1} X_{\bar{s}}$ soit isomorphe à $\overline{Z}$. Si l'on considère Z comme un revêtement étale de X, on a alors un morphisme de $Z \times_X X_{\bar{s}}$ dans $\overline{Z}$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 4.3.1 *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme 0-acyclique et localement 0-acyclique, g une section de f. Soit C un groupe constant fini tel que (C_X, f) soit cohomologiquement propre en dimension $\leqslant 0$ et que l'image directe par f du champ des torseurs sous C_X soit constructible. Alors, pour toute section z de $\mathrm{H}^0(S, \mathrm{R}^1 f_* C_X)$, on peut trouver un revêtement étale S_1 de S et, si $X_1 = X \times_S S_1$, un élément de $\mathrm{H}^1(X_1, C_{X_1})$, dont l'image par le morphisme canonique*

$$\mathrm{H}^1(X_1, C_{X_1}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(S_1, \mathrm{R}^1 f_* C_{X_1})$$

soit égale à la restriction de z à $\mathrm{H}^0(S_1, \mathrm{R}^1 f_* C_{X_1})$.

Pour tout schéma S' étale sur S, on pose $X' = X \times_S S'$, et on note g' (resp. F', etc.) l'image
419 inverse de G (resp. F, etc.) par le morphisme $S' \to S$. Le préfaisceau G sur S défini par

$$G(S') = \begin{Bmatrix} \text{classes mod. isomorphisme de torseurs } P \text{ sur } X' \text{ de groupe } C_{X'}, \text{ munis d'un} \\ \text{isomorphisme } g'^*P \xrightarrow{\sim} C_{S'} \end{Bmatrix}$$

est alors un faisceau. Cela résulte en effet par descente du fait qu'un isomorphisme d'un torseur P sur X' est bien déterminé par sa restriction à $g'(S')$. De plus, on a un morphisme surjectif

$$G \longrightarrow R^1 f_* F.$$

Soient z un élément de $\mathrm{H}^0(S, \mathrm{R}^1 f_* C_X)$ et H le sous-faisceau de G image réciproque de z. Il suffit de montrer que H est un faisceau localement constant constructible. Or, cette propriété étant locale sur S, on peut supposer que z provient d'un élément de $\mathrm{H}^1(X, C_X)$ représenté par un torseur P tel que g^*P soit isomorphe à C_S. Se donner un isomorphisme $i\colon\ g^*P \xrightarrow{\sim} C_S$ revient à se donner une section globale de $\mathbf{Aut}_{C_S}(g^*P)$ et deux isomorphismes i et i' définissent le même élément de $G(X)$ si et seulement si ii'^{-1} est l'image d'un élément de $\mathrm{Aut}_{C_X}(P)$. Si l'on considère l'injection canonique

$$f_* \mathbf{Aut}_{C_X}(P) \longrightarrow \mathbf{Aut}_{C_S}(g^*P) \simeq C,$$

H s'identifie donc au quotient de $\mathbf{Aut}_{C_S}(g^*P)$ par $f_* \mathbf{Aut}_{C_X}(P)$. D'après 1.16 $f_* \mathbf{Aut}_{C_X}(P)$ est localement constant ; il en est donc de même de H, ce qui achève la démonstration.

Exemples 4.4 Notons que, si S est un schéma connexe, les hypothèses de 4.1 sont satisfaites lorsque le morphisme f est propre plat de présentation finie, à fibres géométriques séparables connexes, $\mathbb{L}$ étant quelconque (cf. X.1.3). Les hypothèses de 4.3 sont satisfaites si de plus f est lisse et a une section, si l'on désigne par $\mathbb{L}$ l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristiques résiduelles de S (SGA 4 XV.2.1 et XVI 5.2).

Les hypothèses de 4.1 sont aussi satisfaites si S est connexe, si l'on a un schéma Z propre
420 de présentation finie, plat sur S, à fibres géométriques séparables connexes, tel que X soit le complémentaire dans Z d'un diviseur à croisements normaux relativement à S, $\mathbb{L}$ étant l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristiques résiduelles de S (2.9). Les hypothèses de 4.3 sont satisfaites si de plus f est lisse et a une section.

4.5 Reprenons les notations et les hypothèses de 4.3. Si $\bar{s}$ est un point géométrique de S et $a = g(\bar{s})$, la section g permet de définir un morphisme

$$w\colon \pi_1(S, a) \longrightarrow \pi_1'(X, a),$$

de sorte que $\pi_1'(X, a)$ s'identifie au produit semi-direct de $\pi_1(S, a)$ par $\pi_1(X_{\bar{s}}, a)$. Le groupe profini $\pi_1(S, a)$ opère donc sur $\pi_1(X_{\bar{s}}, a)$. Comme $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a)$ est limite projective stricte de groupes invariants par l'action de $\pi_1(S, a)$, la donnée de $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a)$ muni de cette action est équivalente à la donnée d'un système projectif strict de schémas en groupes étales finis sur S que l'on note

$$\pi_1^{\mathbb{L}}(X/S, g, \bar{s}) \quad \text{ou simplement} \quad \pi_1^{\mathbb{L}}(X/S, g).$$

On a alors les propriétés suivantes :

4.5.1 Pour tout schéma en groupes étale fini G sur S, dont les fibres sont des $\mathbb{L}$-groupes, l'ensemble E des classes de torseurs P sous l'image inverse G_X de G sur X, munis d'un isomorphisme $g^*P \xrightarrow{\sim} G$, est canoniquement isomorphe à l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_S(\pi_1^{\mathbb{L}}(X/S, g, \bar{s}), G) \quad \text{mod. automorphismes intérieurs de } G.$$

4.5.2 Pour tout schéma en groupes étale fini G sur S dont les fibres sont des $\mathbb{L}$-groupes, le faisceau $\mathrm{R}^1 f_* G_X$ est canoniquement isomorphe au faisceau associé au préfaisceau

$$S' \mapsto \mathrm{Hom}_{S'}(\pi_1^{\mathbb{L}}(X/S, g, \bar{s}), G) \text{ mod. automorphismes intérieurs de } G.$$

(S' désigne un schéma étale sur S).

421

4.5.3 Soient S' un S-schéma connexe, $\bar{s}$ un point géométrique de S', X', g' les images inverses respectives de X, g sur S'. Alors $\pi_1^{\mathbb{L}}(X'/S', g', \bar{s})$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse de $\pi_1^{\mathbb{L}}(X/S, g, \bar{s})$ sur S'. Pour tout point géométrique ξ de S, la fibre $\pi_1^{\mathbb{L}}(X/S, g, \bar{s})_\xi$ est isomorphe à $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_\xi)$.

La donnée de G est en effet équivalente à la donnée d'un $\mathbb{L}$-groupe abstrait $\mathbf{G}$ sur lequel opère $\pi_1(S, a)$, d'où une action de $\pi_1'(X, a)$ sur $\mathbf{G}$. L'isomorphisme défini dans 4.5.1 s'obtient alors par restriction au sous-ensemble E à partir du morphisme canonique

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1(\pi_1'(X, a), \mathbf{G}) \quad \longrightarrow \quad & \mathrm{H}^1(\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a), \mathbf{G}) \\ & = \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a), \mathbf{G})/\text{aut. int. } G,\end{aligned}$$

l'ensemble E s'envoyant bijectivement sur le sous-ensemble des morphismes de $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a)$ dans $\mathbf{G}$ qui sont compatibles avec l'action de $\pi_1(S, a)$. L'assertion 4.5.3 résulte alors de la définition de $\pi_1^{\mathbb{L}}(X/S, g, \bar{s})$ compte-tenu de la suite exacte d'homotopie (4.3.1) et 4.5.2 se déduit de 4.5.1
part 83 et 4.5.3.

Proposition 4.6 *(Formule de Künneth). Soient k un corps séparablement clos de caractéristique $p \geq 0$, X et Y deux k-schémas connexes, a un point géométrique de X, b un point géométrique de Y, c un point géométrique de $X \times_k Y$ au-dessus de a et b. On suppose satisfaite l'une des deux conditions suivantes :*

a) X est de type fini sur k et les schémas de type fini sur une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, de dimension $\leq \dim X$, sont fortement désingularisables. (SGA 5 I 3.1.5).

b) X est quasi-compact et quasi-séparé et tout schéma de type fini sur $\bar{k}$ est fortement désingularisable.

Alors, si p' est l'ensemble des nombres premiers distincts de p, le morphisme

$$\pi_1^{p'}(X \times_k Y, c) \to \pi_1^{p'}(X, a) \times \pi_1^{p'}(Y, b), \tag{4.6.0}$$

422 *déduit des homomorphismes sur les groupes fondamentaux associés aux projections*

$$X \times_k Y \to X \quad \textit{et} \quad X \times_k Y \to Y,$$

est un isomorphisme.

On peut supposer k algébriquement clos et X réduit (SGA 4 VIII 1.1). Soient $Z = X \times_k Y$, $g\colon X \to k$ et $f\colon Z \to Y$ les morphismes canoniques. Le morphisme g, donc aussi f, est universellement localement 1-asphérique pour p' d'après 5.3. Comme X est connexe, f est 0-acyclique (SGA 4 XV 1.16). D'autre part il résulte de 3.2 que, pour tout p'-groupe fini C, (C_X, g) est cohomologiquement propre relativement à k en dimension ≤ 1. Il en résulte que (C_Z, f) est cohomologiquement propre relativement à Y en dimension ≤ 1 (1.5 c)) et que $f_* C_Z$ et $\mathrm{R}^1 f_* C_Z$ sont des faisceaux constants. Par suite g satisfait à toutes les hypothèses de 4.2. On a donc la suite exacte

$$\pi_1^{p'}(X_b, c) \to \pi_1^{p'}(Z, c) \to \pi_1^{p'}(Y, b) \to 1.$$

De plus le morphisme composé

$$\pi_1^{p'}(X_b, c) \to \pi_1^{p'}(Z, c) \to \pi_1^{p'}(Y, b)$$

est un isomorphisme et l'on a donc la suite exacte

$$1 \to \pi_1^{p'}(X, a) \to \pi_1^{p'}(Z, c) \to \pi_1^{p'}(Y, b) \to 1.$$

D'autre part le morphisme (4.6.0) permet de définir un morphisme de cette suite exacte dans la suite exacte

$$1 \to \pi_1^{p'}(X, a) \to \pi_1^{p'}(X, a) \times \pi_1^{p'}(Y, b) \times \pi_1^{p'}(Y, b) \to 1,$$

et il en résulte que le morphisme (4.6.0) est un isomorphisme.

4.7 Soit

$$\begin{tikzcd} X & X_U \arrow[l] & X_{\bar{s}} \arrow[l] \\ S \arrow[from=u, "f"'] & U \arrow[l] \arrow[from=u, "f_U"'] & \bar{s} \arrow[l] \arrow[from=u] \end{tikzcd}$$

423 un diagramme dont les carrés sont cartésiens, où S est un schéma connexe par arcs (SGA 4 IX 2.12), U un ouvert connexe de S, $\bar{s}$ un point géométrique de U. Soient a un point géométrique de $X_{\bar{s}}$, $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers. Soit g une section de f et supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) Le morphisme f est 0-acyclique, localement 0-acyclique, et, pour tout revêtement étale S' de S et tout revêtement étale E de $X \times_S S'$ quotient d'un revêtement galoisien de groupe un $\mathbb{L}$-groupe, $(E, f_{(S')})$ est cohomologiquement propre relativement à S' en dimension ≤ 0.

b) Le morphisme f_U est localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$, et, pour tout faisceau de $\mathbb{L}$-groupe constant fini F sur X_U, (F, f_U) est cohomologiquement propre en dimension ≤ 1 et les fibres de $\mathrm{R}^1 f_{U*} F$ sont finies.

On déduit alors de 4.1 et 4.3 le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1'(X_U, a) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, a) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & \pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a) \arrow[r] & \pi_1'(X, a) \arrow[r] & \pi_1(S, a) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{4.7.0}$$

Grâce à la section g, on a des morphismes $\pi_1(U,a) \to \pi_1'(X_U, a)$ $\pi_1(S,a) \to \pi_1'(X,a)$; on en déduit un morphisme de la somme amalgamée de $\pi_1(S,a)$ et $\pi_1'(X_U,a)$ au dessus de $\pi_1(U,a)$ dans $\pi_1'(X,a)$:

$$\varphi\colon \pi = \pi_1(S,a) \coprod_{\pi_1(U,a)} \pi_1'(X_U,a) \to \pi_1'(X,a). \tag{4.7.1}$$

Supposons satisfaite la conditon suivante :

c) Si $T = S - U$, on a $\operatorname{prof\,\acute{e}t}_T(S) \geq 2$ (SGA 2 XIV 1.1).

Alors le foncteur qui, à un revêtement étale de S, fait correspondre sa restriction à U est pleinement fidèle (SGA 2 XVI 1.4). Il en résulte que le morphisme $\pi_1(U,a) \to \pi_1(S,a)$
424 est surjectif (6.9) et l'on déduit du diagramme (4.7.0) qu'il en est de même du morphisme $\pi_1'(X_U,a) \to \pi_1'(X,a)$; a fortiori φ est un épimorphisme. Soit

$$K = \operatorname{Ker}(\pi_1(U,a) \to \pi_1(S,a)). \tag{4.7.2}$$

Le groupe π de (4.7.1) s'identifie au quotient de $\pi_1'(X_U,a)$ par le sous-groupe invariant fermé engendré par l'image L de K dans $\pi_1'(X_U,a)$. Considérons $\pi_1'(X_U,a)$ comme produit semi-direct de $\pi_1(U,a)$ par $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}},a)$. Le groupe K opère alors par automorphismes intérieurs sur $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{S}},a)$, et le quotient $\pi = \pi_1'(X_U,a)/L$ s'identifie au produit semi-direct de $\pi_1(U,a)/K = \pi_1(S,a)$ par le groupe $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}},a)_K$ des coinvariants de $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}},a)$ sous K. On a finalement un épimorphisme

$$\varphi\colon \pi = \pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}},a)_K \cdot \pi_1(S,a) \to \pi_1'(X,a). \tag{4.7.3}$$

La proposition qui suit donne des conditions sous-lesquelles le morphisme φ est un isomorphisme.

Proposition 4.7.4 *Les notations sont celles de 4.7. On suppose que, en plus des conditions a), b), c) les conditions suivantes soient satisfaites :*

d) Pour tout point t de $T = S - U$, le morphisme f est localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ en $g(t)$.

e) Pour tout point $t \in T$, toute composante irréductible de la fibre X_t contient $g(t)$ et, pour tout point x de $X_t - \{g(t)\}$ qui n'est pas maximal, on a

$$\operatorname{prof\,hop}_x(X) \geq 3 \quad \textit{(SGA 2 XIV 1.2)}$$

et l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ est noethérien.

Alors le morphisme (4.7.3) *est un isomorphisme.*

Comme on l'a dit précédemment, le groupe π s'identifie au quotient de $\pi'_1(X_U, a)$ par le sous-groupe invariant fermé L engendré par l'image de K (4.7.2) dans $\pi'_1(X_U, a)$. Cela revient
425 à dire que π classe les revêtements principaux Z de X_U tels que $g_U^{-1}(Z)$ se prolonge en un revêtement étale de S, et qui induisent sur $X_{\bar{s}}$ un revêtement qui s'obtient par extension du groupe structural à partir d'un revêtement principal de groupe un $\mathbb{L}$-groupe. Pour prouver que φ est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'un tel revêtement Z se prolonge à X tout entier.

Montrons d'abord que Z se prolongue en un revêtement étale d'un ouvert contenant X_U et $g(S)$. Soit W un schéma étale sur X dont l'image contient X_U et $g(S)$, et posons $W_U = W \times_S U$. Du fait que le morphisme $W \to S$ est 0-acyclique et de la rélation $\operatorname{prof.ét}_T S \geq 2$, résulte que l'on a

$$\operatorname{prof.ét}_{(W-W_U)} W \geq 2$$

(SGA 2 XIV 1.13) ; par suite, si $Z|W_U$ se prolonge en un revêtement étale de W, ce prolongement est unique à isomorphisme unique près. Il en résulte que le problème de prolonger Z à un voisinage de $g(S) \cup X_U$ est local pour la topologie étale au voisinage des points de $g(T)$. Si t est un point de T, on pose $x = g(t)$, et on note $\bar{X}$ (resp. $\bar{S}$) le localisé strict de X en $\bar{x}$ (resp. de S en $\bar{t}$), $\bar{U} = U \times_S \bar{S}$, $\bar{X}_U = \bar{X} \times_X X_U$, $\bar{g}\colon \bar{S} \to \bar{X}$ le morphisme déduit de g. Il suffit de montrer que, pour tout point t de T, l'image inverse $\bar{Z}$ de Z sur $\bar{X}_U$ se prolonge à $\bar{X}$ ou, ce qui revient au même, est triviale. Or, par définition de Z, l'image inverse de de $\bar{Z}$ sur $\bar{U}$ est triviale. Pour prouver que $\bar{Z}$ est trivial, il suffit de montrer qu'il est de la forme $\bar{f}_U^* E$, où E est un revêtement principal de $\bar{U}$; on aura en effet $E \simeq \bar{g}_U^* \bar{f}_U^* E \simeq \bar{g}_U^* \bar{Z}$, d'où le résultat puisque $\bar{g}_U^* \bar{Z}$ est trivial. Or le morphisme $\bar{f}_U$ étant 0-acyclique et localement 0-acyclique, il suffit, pour prouver que $\bar{Z}$ provient de $\bar{U}$, de montrer que, pour tout point géométrique algébrique sur un point de $\bar{U}$, que l'on peut supposer être le point $\bar{s}$, $\bar{Z}|X_{\bar{s}}$ est trivial (SGA 4 XV 1.15). Mais $\bar{Z}|X_{\bar{s}}$ étant obtenu par extension du groupe structural à partir d'un revêtement principal de groupe un $\mathbb{L}$-groupe, cela résulte du fait que le morphisme $\bar{f}$ est 1-asphérique pour $\mathbb{L}$.

426 On a donc démontré qu'il existe un voisinage ouvert V de $g(S) \cup X_U$ tel que Z se prolonge en un revêtement étale Z_V de V. Montrons que Z_V se prolonge à X tout entier. Il suffit de voir que, pour tout point x de $X - V$, on a

$$\operatorname{prof\,hop}_x X \geq 3.$$

Or cela résulte de l'hypothèse e) et du fait qu'un point x de $X - V$ ne peut être maximal dans sa fibre X_t car, toute composante irréductible de X_t contanant $g(t)$, tout point maximal de X_t appartient à V.

Corollaire 4.8 *Les hypothèses sont celles de 4.7.4 mais on suppose de plus que l'on a* $\pi_1(S, a) = 1$. *Alors on a un isomorphisme*

$$(*) \qquad \pi_1^{\mathbb{L}}(X, a) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a)_K.$$

En particulier, si $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a)$ est topologiquement de présentation finie et si K opère sur $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a)$ par l'intermédiaire d'un groupe de type fini, alors $\pi_1^{\mathbb{L}}(X, a)$ est topologiquement de présentation finie.

L'isomorphisme $(*)$ a été démontré dans 4.7.4. Supposons $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a)$ quotient du pro-$\mathbb{L}$-groupe libre à n générateurs $L(x_1, \ldots, x_n)$ par le sous-groupe invariant fermé engendré par les éléments $y_1, \ldots, y_p$ de $L(x_1, \ldots, x_n)$, et supposons que K agisse par l'intermédiaire d'un groupe engendré par des éléments $k_1, \ldots, k_q$. Si pour tout $i \in [1, n]$, $j \in [1, q]$, on note z_{ij} un élément de $L(x_1, \ldots, x_n)$ relevant l'élément $(k_j \cdot x_i)x_i^{-1}$, alors $\pi_1^{\mathbb{L}}(X_{\bar{s}}, a)_K$ est quotient de $L(x_1, \ldots, x_n)$
part 84 par le sous-groupe invariant fermé engendré par les éléments $(y_i)_{i\in[1,p]}$, $(z_{ij})_{i\in[1,n],j\in[1,q]}$.

Remarques 4.6 a) Les conditions a) à e) de 4.7 sont satisfaites lorsque S est un schéma normal connexe, U on ouvert dense rétrocompact de S, f un morphisme propre de présentation finie, à fibres géométriquement connexes et irréductibles en tout point t de T,
427 f étant de plus séparable, lisse aux points de $X_U \cup g(T)$, $\mathbb{L}$ étant l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristiques résiduelles de S, et X étant régulier en tout point de X_t. La condition a) résulte en effet de SGA 4 XV 4.1 et 1.4 ; les conditions b) et d) résultent de 1.4 et SGA 4 XV 2.1 et XVI 5.2. Enfin e) résulte de SGA XIV 1.11.

b) Le corollaire 4.5 s'applique pour calculer le groupe fondamental $\pi_1^{p'}(X)$ d'une surface X propre et lisse sur un corps séparablement clos k de capactéristique p (p' désignant l'ensemble des nombres premiers distincts de p). La méthode nous a été communiquée par J.-P. MURRE ; elle consiste à se ramener, en faisant éclater X, au cas où l'on a une fibration $X \to \mathbb{P}_k^1$ et un ouvert U de $\mathbb{P}_k^1$ satisfaisant aux hypothèses de 4.7 (voir SGA 7 pour plus de détails). La même méthode peut être utilisée plus généralement (loc.cit.) pour prouver que, si X est un k-schéma connexe de type fini, et, si les schémas de type fini de dimension $\leq \dim X$ sur une clôture algébrique de k sont fortement désingularisables (SGA 5 I 3.1.5), alors $\pi_1^{p'}(X)$ est topologiquement de présentation finie.

5 Appendice I : Variations sur le lemme d'Abhyankar

Cet appendice contient différentes variantes du lemme d'Abhyankar.

Proposition 5.1 *Soient $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma local régulier, $D = \sum_{1\leq i\leq r} \operatorname{div} f_i$ un diviseur à croisements normaux, où les f_i sont des éléments de l'idéal maximal de A faisant partie d'un système régulier de paramètres. Soient n_i, $1 \leq i \leq r$, des entiers ≥ 0 et posons*

$$X' = X[T_1, \ldots, T_r]/(T_1^{n_1} - f_1, \ldots, T_r^{n_r} - f_r),$$

$U' = U \times_X X'$. Alors X' est régulier et U' est le complémentaire dans X' du diviseur à croise-
428 *ments normaux $\sum_{1\leq i\leq r} \operatorname{div} T_i$. Si les entiers n_i sont premiers à la caractéristique résiduelle p de X, U' est un revêtement étale connexe de U, modérément ramifié relativement à D (2.3 c)).*

En effet X' est le spectre d'un anneau local A' dont l'idéal maximal est engendré par $T_1, \ldots, T_r$. Comme A' est fini et plat sur A, donc de dimension r, A' est régulier (EGA 0_{IV} 17.1.1) et les T_i forment un système régulier de paramètres de A'. Supposons les n_i premiers à p. Comme tous les f_i sont inversibles sur U, le fait que U' soit étale sur U résulte de 7.4. De plus U' est modérément ramifié relativement à D ; soit en effet x_i le point générique de $V(f_i)$, $\bar{R}$ le localisé strict de $R = \mathscr{O}_{X,x_i}$, $\bar{K}$ le corps des fractions de $\bar{R}$. Alors la $\bar{K}$-algèbre qui représente $U'|\bar{K}$ s'obtient à partir du corps $\bar{K}[T_i]/(T_i^{n_i} - f_i)$ en faisant une extension non ramifiée ; elle est donc modérément ramifiée sur $\bar{R}$.

Proposition 5.2 *(Lemme d'Abhyankar absolu.) Soit X un schéma local régulier,*

$$D = \sum_{1 \leq i \leq r} \operatorname{div} f_i$$

un diviseur à croisements normaux comme dans 5.1, $Y = \operatorname{Supp} D$, $U = X - Y$. Soit V un revêtement étale de U modérément ramifié relativement à D. Si x_i est le point générique du fermé $V(f_i)$, $\mathscr{O}_{X,x_i}$ est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K_i, et on a $V|K_i = \operatorname{Spec}(\prod_{j \in J_i} L_j)$, où les L_j sont des extensions finies séparables de K_i ; notons n_j l'ordre du groupe d'inertie d'une extension galoisienne engendrée par L_j et n_i le p.p.c.m. des n_j quand j parcourt J_i. Si l'on pose

$$X' = X[T_1, \ldots, T_r]/(T_1^{n_1} - f_1, \ldots, T_r^{n_r} - f_r),$$

$U' = U_{(X')}$, $V' = V_{(X')}$, etc., le revêtement étale V' de U' se prolonge de manière unique à isomorphisme unique près en un revêtement étale de X', et les n_i sont premiers à la caractéristique résiduelle p de X.

429 L'unicité résulte du fait que X' est normal (5.1) ; en effet un revêtement étale de X' qui prolonge V' est isomorphe au normalisé de X' dans la fibre de V' au point générique de X' (10.2). Si $\bar{x}'$ est un point géométrique de Y', on note $\bar{X}'$ le localisé strict de X' en $\bar{x}'$, $\bar{V}' = V'_{(\bar{X}')}$, etc. Par descente, compte tenu de l'unicité, il suffit de montrer que, pour tout point géométrique $\bar{x}'$ de Y', le revêtement étale $\bar{V}'$ de $\bar{U}'$ se prolonge à $\bar{X}'$. Etant donné qu'un revêtement étale d'un ouvert du schéma régulier X' qui contient tous les points x' tels que l'on ait $\dim \mathscr{O}_{X',x'} \leq 1$ se prolonge à X tout entier (SGA 2 XIV 1.11), on peut même se borner aux points $\bar{x}'$ qui se projettent sur un point maximal de Y'. Or, en un tel point $\bar{x}'$, le fait que $\bar{V}'$ se prolonge en un revêtement étale de $\bar{X}'$ résulte de 3.6.

Montrons que les n_i sont premiers à p. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait par exemple $p|n_1$. Quitte à remplacer X par $X[T_1, \ldots, T_r]/T_1^{n_1/p} - f_1, T_2^{n_2} - f_2, \ldots, T_r^{n_r} - f_r)$, on se ramène au cas où l'on a $X' = X[T_1]/T_1^p - f_1$. Il suffit de montrer que V se prolonge en un revêtement étale de X, car on aura alors $n_1 = 1$ contrairement à l'hypothèse. On peut supposer pour cela que X est strictement local. Soit Z le sous-schéma fermé de X d'équation $p = 0$ et $Z_1 = Z \cap X_{f_1}$; Z_1 est un ouvert non vide de Z. D'après ce qui précède le revêtement étale V' de U' se prolonge en un revêtement étale W' de X'. Soient W_1'' et W_2'' les images inverses de W' par les deux projections

$X'' = X' \times_X X' \rightrightarrows X'$, et montrons que l'isomorphisme de descente $u\colon W_1''|U'' \to W_2''|U''$ se prolonge en un X''-morphisme $W_1'' \to W_2''$ qui sera nécessairement une donnée de descente sur W' relativement à $X' \to X$. Soit Z'' (resp. Z_1'') l'image inverse de Z (resp. Z_1) dans X''. Comme le morphisme $Z'' \to Z$ est radiciel, il existe un isomorphisme $v\colon W_1''|Z'' \to W_2''|Z''$ qui prolonge l'isomorphisme $u|Z_1''$. Mais, comme X est hensélien, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{X''}(W_1'', W_2'') \simeq \mathrm{Hom}_{Z''}(W_1''|Z'', W_2''|Z''),$$

430 d'où un morphisme $w\colon W_1'' \to W_2''$ relevant v. Le sous-schéma à la fois ouvert et fermé de X'' au-dessus duquel u et w coïncident contient Z_1'', donc égal à X'', d'où le fait que V se prolonge à X.

5.3.0 Reprenons les hypothèses et les notations de 5.2 en supposant de plus S strictement local. Alors il résulte de loc.cit. que tout revêtement étale connexe de U modérément ramifié relativement à D est quotient d'un revêtement modérément ramifié de la forme

$$U' = U[T_1, \dots, T_r]/(T_1^{n_1} - f_1, \dots, T_r^{n_r} - f_r),$$

où les n_i sont des entiers premiers à p. Soit μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité de U. Le groupe des U-automorphismes de U' n'est autre que le groupe $\mu_{n_1} \times \dots \times \mu_{n_r}$, une racine n_i-ième de l'unité ξ_i opérant sur U' en transformant T_i en $\xi_i T_i$. On a donc l'énoncé suivant :

Corollaire 5.3 *Soit X un schéma strictement local régulier de caractéristique résiduelle $p \geq 0$, $D = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{div}\, f_i$ un diviseur à croisements normaux sur X, $U = X - \mathrm{Supp}\, D$. Posons*

$$\tilde{U} = \varprojlim_{(n_i)} U[T_1, \dots, T_r]/(T_1^{n_1} - f_1, \dots, T_r^{n_r} - f_r),$$

la limite projective étant prise suivant l'ensemble ordonné filtrant (pour la relation de divisibilité) des familles d'entiers $n_i > 0$, premiers à p. Alors $\tilde{U}$ est un revêtement universel modérément ramifié de U. Par suite le groupe fondamental modérément ramifié de U est

$$\pi_1^t(U) \simeq \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell[1]^r \qquad \textit{(isomorphisme canonique)}$$

où l'on a posé $\mathbb{Z}_\ell[1] = \varprojlim_{n>0} \mu_{\ell^n}$. Le groupe $\pi_1^t(U)$ est non canoniquement isomorphe à $\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell^r$.

Proposition 5.4 *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme de schémas, $D = \sum_{1 \leq i \leq r} \mathrm{div}\, f_i$ un diviseur*
431 *à croisements normaux relativement à S (2.1), où, pour chaque point x de $Y = \mathrm{Supp}\, D$, si $I(x) \subset [1, r]$ est l'ensemble des i tels que l'on ait $f_i(x) = 0$, le sous-schéma $V((f_i)_{i \in I(x)})$ est lisse sur S de codimension $\mathrm{card}.I(x)$ dans X. Soit $U = X - Y$. Soient x un point de Y, $X_1 = \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_{X,x}$, $U_1 = U \times_X X_1$, n_i, $i \in I(x)$ des entiers et*

$$X' = X[T_i]_{i \in I(x)}/(T_i^{n_i} - f_i).$$

Alors, si x' est le point de X' au-dessus de x, X' est lisse sur S en x'. Si les entiers n_i sont premiers à la caractéristique p de $k(x)$, $U_1' = U_1 \times_X X'$ est un revêtement étale connexe de U_1 modérément ramifié sur X_1 relativement à S_1 (2.1.1).

Si $s = f(x)$, la fibre géométrique $X'_{\overline{s}}$ est régulière au point x' (5.1) ; comme X' est plat sur S au voisinage de Y, cela prouve que X' est lisse sur S en x' (EGA IV 12.1.6). Si les entiers n_i sont premiers à p, U'_1 est un revêtement étale de U_1 (7.4) ; il est modérément ramifié sur X_1 relativement à S car il en est ainsi sur les fibres géometriques en chaque point de S (5.1). Enfin
part 85 le fait que U'_1 soit connexe résulte de SGA 4 XVI 3.2.

Proposition 5.5 *(Lemme d'Abhyankar relatif). Soient X un S-schéma, D un diviseur à croisements normaux relativement à S, comme dans (5.4). Soient $Y = X - \operatorname{Supp} D$, $U = X - Y$, x un point de Y, X_1 le localisé strict de X en un point géométrique au-dessus de x, $U_1 = U \times_X X_1$, V_1 un revêtement étale de U_1. On suppose que, pour tout point maximal s de S, $V_{1\overline{s}}$ est modérément ramifié sur $X_{1\overline{s}}$ relativement à $\overline{s}$. Alors on peut trouver des entiers n_i premiers à la caractéristique p de $k(x)$, avec $i \in I(x)$, tels que, si l'on pose*

$$X'_1 = X_1[T_i]_{i \in I(x)} \big/ (T_i^{n_i} - f_i) \ ,$$

$U'_1 = U_1 \times_{X_1} X'_1$, etc., le revêtement étale V'_1 de U'_1 se prolonge de manière unique à isomor-
432 *phisme unique près en un revêtement étale de X'_1. En particulier V_1 est modérément ramifié sur X_1 relativement à S.*

On peut supposer S localement noethérien de point fermé $f(x)$. Pour chaque point maximal s de S et pour chaque $i \in I(x)$, soit x_i le point générique du fermé $V(f_i)$ de la fibre $X_{1\overline{s}}$. L'anneau local $(\mathscr{O}_{X_1,x_i})_{\text{réd}}$ est un anneau de valuation discrète de corps de fractions K_i et l'on a $V_1|K_i = \operatorname{Spec}(\prod_{j \in J(x_i)} L_j)$, où L_j est une extension finie séparable de K ; on note n_j l'ordre du groupe d'inertie d'une extension galoisienne engendrée par L_j et n_i le p.p.c.m. des n_j quand s parcourt les points maximaux de S et $j \in J(x_i)$.

Les n_i étant ainsi choisis, nous allons montrer que V'_1 se prolonge de façon unique en un revêtement étale de X'_1. L'unicité résulte du fait que, X' étant lisse sur S aux points de Y, on a $\operatorname{prof\,ét}_{Y'_1}(X'_1) \geqslant 2$ (SGA 4 XVI 3.2 ou SGA 2 XIV 1.19). Soient x'_1 un point de Y'_1, $\overline{x}'_1$ un point géométrique au-dessus de x'_1, et notons $\overline{X}'_1$ le localisé strict de X'_1 en $\overline{x}'_1$, $\overline{U}'_1 = U'_{1(\overline{X}'_1)}$, etc. Par descente, compte tenu de l'unicité, il suffit de montrer que $\overline{V}'_1$ se prolonge à $\overline{X}'_1$. De plus on peut se borner à prendre pour x'_1 les point maximaux de Y'_1 ; en effet on aura alors un prolongement de V'_1 sur un ouvert W'_1 de X'_1 contenant les points maximaux de Y'_1 ; or, si $Z'_1 = X'_1 - W'_1$, on a $\operatorname{codim}(Z'_{1s}, X'_{1s}) \geqslant 2$ si s est un point maximal de S et $\operatorname{codim}(Z'_{1s}, X'_{1s}) \geqslant 1$, $\operatorname{prof\,ét}_s(S) \geqslant 1$ si s est un point de S qui n'est pas maximal ; le fait que V'_1 se prolonge à X'_1 tout entier résulte alors de SGA 2 XIV 1.20. Mais, en un point géométrique $\overline{x}'_1$ au-dessus d'un point maximal de Y'_1, $X'_{1\text{réd}}$ est le spectre d'un anneau de valuation discrète, et le fait que $\overline{V}'_1$ se prolonge à $\overline{X}'_1$ résulte alors de X.3.6.

Montrons que les n_i sont premiers à p. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait un indice $i_0 \in I(x)$ tel que p divise n_{i_0}. Quitte à remplacer X par $X_1[T_{i_0}, T_i]_{i \in I(x)} \big/ (T_i^{n_{i_0}/p} - f_{i_0}, T_i^{n_i} - f_i)$,
433 on se ramène au cas où $X'_1 = X_1[T]/T^p - f_{i_0}$. D'après ce qui précède le revêtement étale V'_1 de U'_1 se prolonge en un revêtement étale E'_1 de X'_1. Soit η le point fermée de S ; comme le morphisme $X'_{1\eta} \to X_{1\eta}$ est radiciel, $V_{1\eta}$ se prolonge en un revêtement étale $E_{1\eta}$ de $X_{1\eta}$. On

en déduit alors, comme dans 5.2, que E'_1 est muni d'une donnée de descente relativement au morphisme $X'_1 \to X_1$, qui prolonge la donnée de descente naturelle que l'on a sur $E'_1|U'_1$. Il en résulte que V_1 se prolonge à X_1 ; mais ceci entraîne que l'on a $n_{i_0} = 1$ contrairement à l'hypothèse $n_{i_0} = p$.

Corollaire 5.6 *Soient X un S-schéma, $D = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \operatorname{div} f_i$ un diviseur à croisements normaux relativement à S, comme dans 5.4. Soient $\overline{x}$ un point géométrique de X, $\overline{X}$ le localisé strict de X en $\overline{x}$, $\overline{Y} = Y_{(\overline{X})}$, $\overline{U} = \overline{X} - \overline{Y}$ et*

$$\widetilde{U} = \varprojlim_{(n_i)} \overline{U}[T_i]_{i \in I(x)} \big/ (T_i^{n_i} - f_i) \ ,$$

la limite projective étant prise suivant l'ensemble filtrant des familles d'entiers $n_i > 0$, premiers à la caractéristique p de $k(x)$. Alors $\widetilde{U}$ est un revêtement universel modérément ramifié de $\overline{U}$ relativement à S. Par suite le groupe fondamentale modérément ramifié de $\overline{U}$ est

$$\Pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U}) \simeq \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell[1]^{I(x)} \qquad \text{(isomorphisme canonique)} .$$

Le groupe $\Pi_1^{\mathrm{t}}(\overline{U})$ est isomorphe non canoniquement à $\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell^{I(x)}$.

Remarque 5.6.1 *Soient X un S-schéma, $D = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \operatorname{div} f_i$ un diviseur à croisements normaux relativement à S, comme dans 5.4, $U = X - \operatorname{Supp} D$. Pour toute partie $I \subset [1, r]$ soit*

$$X_I = \Big(\bigcap_{i \in I} V(f_i)\Big) \cap \Big(\bigcap_{i \in \complement I} X_{f_i}\Big) \ .$$

Soit p un entier premier ou nul et soit Z un sous-ensemble de X_I dont tous les points sont de caractéristique p. Soit

$$\widetilde{U}_I = \varprojlim_{(n_i)} U[T_i] \big/ (T_i^{n_i} - f_i) \ ,$$

434 *où la limite projective est prise suivant l'ensemble filtrant des familles d'entiers $n_i > 0$, premiers à p. Alors, pour tout point géométrique $\overline{x}$ de Z, l'image inverse de $\widetilde{U}_I$ sur $\overline{U}$ s'identifie au revêtement universel modérément ramifié de $\overline{U}$.*

Corollaire 5.7 *Les notations sont celles de 5.6. Soient $\overline{S}$ le localisé strict de S en $\overline{x}$,*

$$\overline{g} \colon \overline{U} \to \overline{S} \quad \text{et} \quad \tilde{g} \colon \widetilde{U} \to \widetilde{S}$$

les morphismes canoniques. Alors les morphismes $\overline{g}$ et $\tilde{g}$ sont 0-acycliques (SGA 4 XV 1.3). Soient G un faisceau en groupes constructible sur $\overline{S}$, $F = \overline{g}^* G$, P un torseur sous F. Alors, pour que P soit modérément ramifié sur $\overline{X}$ relativement à $\overline{S}$, il faut et il suffit que son image inverse $\widetilde{P}$ sur $\widetilde{U}$ soit triviale.

En effet, pour tout schéma $\overline{X}' = \overline{X}[T_i]_{i\in I(x)}/(T_i^{n_i} - f_i)$, où les n_i sont des entiers > 0 premiers à p, le morphisme $\overline{f}' \colon \overline{X}' \to \overline{S}$ est 0-acyclique. Les fibres géométriques de $\overline{f}'$ aux différents points de $\overline{S}$ sont donc connexes et même irréductibles. Il en est donc de même des fibres géométriques des morphismes $\overline{g}' \colon \overline{U}' \to \overline{S}$, ce qui prouve que les $\overline{g}'$, donc aussi $\tilde{g}$, sont 0-acycliques (SGA 4 XV 1.16).

Il est clair qu'un torseur P sur $\overline{U}$ de groupe F, dont l'image inverse sur $\widetilde{U}$ est triviale, est modérément ramifié sur $\overline{X}$ relativement à $\overline{S}$. Montrons que réciproquement, si P est modérément ramifié sur $\overline{X}$ relativement à $\overline{S}$, son image inverse sur $\widetilde{U}$ est triviale.

Il résulte de SGA 4 IX 2.14 (ii) que l'on peut trouver un morphisme fini $n \colon S_1 \to \overline{S}$, un faisceau en groupes constant C sur S_1, un monomorphisme $G \to n_*C$. Considérons le diagramme commutatif suivant formé de carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{U}_1 \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & U_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "q"'] & S_1 \arrow[d, "n"'] \\
\widetilde{U} \arrow[r] & \overline{U} \arrow[r, "\overline{g}"] & \overline{S} .
\end{tikzcd}$$

435 Soient C_1 (resp. $\widetilde{C}_1$) l'image inverse de C sur U_1 (resp. sur $\widetilde{U}_1$). On a un diagramme commutatif, dans lequel i et j sont des isomorphismes (SGA 4 VIII 5.8) :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\overline{U}, q_*C_1) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(U_1, C_1) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(\widetilde{U}, r_*\widetilde{C}_1) \arrow[r, "j"] & \mathrm{H}^1(\widetilde{U}_1, \widetilde{C}_1) .
\end{tikzcd}$$

Soit Q le torseur sous q_*C_1 déduit de P par l'extension du groupe structural $F \to q_*C_1$. D'après 2.1.4, Q est modérément ramifié sur $\overline{X}$ relativement à $\overline{S}$. Au torseur Q correspond, grâce à i, un torseur Q_1 sous C_1, et il est clair que Q_1 est modérément ramifié sur $X_1 = \overline{X} \times_{\overline{S}} S_1$ relativement à S_1. Il résulte donc de 5.6 que l'image inverse $\widetilde{Q}_1$ de Q_1 sur $\widetilde{U}_1$ est triviale, et le diagramme $(*)$ montre alors que l'image inverse $\widetilde{Q}$ de Q sur $\widetilde{U}$ est triviale.

Considérons le diagramme commutatif suivant, dont la deuxième ligne est exacte (SGA 4 XII 3.1) :

$$(**) \qquad \begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0(\overline{S}, n_*C/G) \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & \mathrm{H}^1(\overline{S}, G) = 1 \arrow[d] & \\
\mathrm{H}^0(\widetilde{U}, r_*\widetilde{C}_1/\widetilde{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\widetilde{U}, \widetilde{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\widetilde{U}, r_*\widetilde{C}_1) .
\end{tikzcd}$$

Comme le morphisme $\widetilde{U} \to \overline{S}$ est 0-acyclique, k est un isomoprhisme. Le fait que $\widetilde{P}$ soit trivial résulte alors de $(**)$.

6 Appendice II : théorème de finitude pour les images directes des champs

Proposition 6.1 *Soient S un schéma localement noethérien, $f\colon X \to S$ un morphisme. Si S' est un S-schéma, on note X' (resp. f', etc.) l'image inverse de X (resp. f, etc.) par le mor-*
436 *phisme $S' \to S$. Supposons que, pour tout schéma S' étale sur S, pour tout faisceau d'ensembles constructible F sur X', $f'_* F$ soit constructible, et que, pour tout faisceau en groupes constructible F sur X', $\mathrm{R}^1 f'_* F$ soit constructible. Soit Φ un champ 1-constructible sur X (0). Alors $f_*\Phi$ est 1-constructible.*

Pour tout schéma S' étale sur S et pour tout objet x de $(f_*\Phi)_{S'}$, on a un isomorphisme

$$\mathbf{Aut}_{S'}(x) \simeq f'_* \, \mathbf{Aut}_{X'}(x) \ ,$$

où, dans le deuxième membre de l'égalité, x est considéré comme objet de $\Phi_{X'}$. Les hypothèses faites entraînent donc que $f_*\Phi$ est constructible. Soit $S\Phi$ le faisceau des sous-gerbes maximales de Φ [1, III, 2.1.7]. Comme $f_*(S\Phi)$ est constructible, on peut lui appliquer SGA 4 IX 2.7, et le
part 86 fait que $f_*\Phi$ soit 1-constructible résulte alors du lemme qui suit.

Lemme 6.1.1 *Soient S un schéma localement noethérien, $f\colon X \to S$ un morphisme, Φ un champ sur X. On suppse donné un faisceau sur S, représentable par un S–schéma étale de type fini T, un morphisme surjectif*

$$a\colon T \to f_*(S\Phi)$$

et un objet p de la fibre Φ_{X_T} (où $X_T = X \times_S T$), définissant dans $f_*(S\Phi)(T) = S\Phi(X_T)$ un élément égal à l'image q par a de la section identique de $T(T)$. Soit $f_T\colon X_T \to T$ le morphisme canonique et supposons que le faisceau $\mathrm{R}^1 f_{T*}(\mathbf{Aut}_{X_T}(p))$ soit constructible ; alors il en est de même de $S(f_*\Phi)$.

Le morphisme canonique $f^* f_* \Phi \to \Phi$ donne un morphisme

$$S(f^* f_* \Phi) \simeq f^*(S(f_*\Phi)) \to S\Phi,$$

d'où un morphisme canonique

$$\varphi\colon S(f_*\Phi) \to f_*(S\Phi).$$

437 Soient $F = S(f_*\Phi)$ et G l'image de F par φ ; d'après SGA 4 IX, 2.9 G est un faisceau constructible.

Il suffit de montrer que, pour tout point s de S, il existe un ouvert non vide U de s tel que $F|U$ soit localement constant constructible. Soient $s \in S$, $\overline{s}$ un point géométrique au–dessus de s, $\overline{q}_1, \dots, \overline{q}_n$ les éléments de $G_{\overline{s}}$. Par définition de T, il existe des S–morphismes $h_i\colon \overline{s} \to S'$ tels que l'on ait $\overline{q}_i = h_i^*(q)$. Soient S' le produit fibré sur S de n schémas isomorphes à T, $\overline{s} \to S'$ le produit fibré des h_i, $X' = X \times_S S'$, q_i (resp. p_i) l'image inverse de q (resp. p) par la i–ème projection de S' sur T. Si Ψ_i est la sous–gerbe maximale de $\Phi|X'$ engendrée par p_i, le faisceau

$F_i = \mathrm{R}^1 f'_*(\mathbf{Aut}_{X'}(p_i))$ n'est autre que le faisceau $S(f'_*\Psi_i)$ des sous–gerbes maximales de $f'_*\Psi_i$. En particulier l'injection canonique $\Psi_i \to \Phi|X'$ donne un morphisme

$$\alpha_i\colon F_i \to F|S'.$$

Nous allons montrer que α_i est une bijection de F_i sur l'mage inverse de q_i dans $F|S'$. Pour tout schéma S'' étale sur S' toute section y de $F_i(S'')$ a pour image $q_i|S''$ dans $F(S'')$, car, localement pour la topologie étale sur S'', y est défini par un objet x de $\Phi_{X''}$ qui est isomorphe à $p_i|X''$. Réciproquement, si $y \in F(S'')$ a pour image $q_i|S''$ dans $F(S'')$, localement pour la topologie étale sur S'', y est défini par un objet x de $\Phi_{X''}$ qui est isomorphe à p_i ; par suite x est un objet de $\Psi_{iX''}$ et par suite $y \in F_i(S'')$.

La démonstration s'achève en utilisant 6.1.2 ci–dessous. On peut en effet trouver un voisinage ouvert U' de s tel que $q_1|U', \ldots, q_n|U'$ soient des sections de $G(U')$ et engendrent ce faisceau. Comme les $F_i|U'$ et $G|U'$ sont constructibles, il en est de même de $F|U'$ d'après 6.1.2 ; quitte à remplacer U par un ouvert plus petit, $F|U$ est localement constant, ce qui achève la
438 demonstration.

Lemme 6.1.2 *Soient S un schéma localement noethérien, $F \to G$ un morphsime surjectif de faisceaux en groupes sur S. Soient q_i une famille finie de sections de G sur X qui engendrent G, et, pour chaque i, soit F_i le sous-faisceau de F image inverse de q_i. Alors, si G et les F_i sont constructibles, il en est de même de F.*

Pour prouver que F est constructible, il suffit de montrer que, pour tout point s de S, il existe un voisinage ouvert U de s tel que $F|U$ soit localement constant constructible. Soit donc s un point de S. Comme les faisceaux F_i et G sont constructibles, on peut trouver un voisinage ouvert U de s tel que $F_i|U$ et $G|U$ soient localement constants. Montrons alors que $F|U$ est localement constant. D'après SGA 4 IX 2.13 (i), il sufiit de voir que, si $\overline{s}$ est un point géométrique au–dessus de s, $\tilde{s}$ un point géométrique de U et $\overline{s} \to \tilde{s}$ un morphisme de spécialisation, le morphisme canonique

$$F_{\tilde{s}} \to F_{\overline{s}}$$

est bijectif.

On considère les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
(F_i)_{\tilde{s}} \arrow[r, "\tilde{a}_i"] \arrow[d, "\wr"] & F_{\tilde{s}} \arrow[r, "\tilde{a}"] \arrow[d, "b"'] & G_{\tilde{s}} \arrow[d, "\wr"] \\
(F_i)_{\overline{s}} \arrow[r, "\overline{a}_i"] & F_{\overline{s}} \arrow[r, "\overline{a}"] & G_{\overline{s}}
\end{tikzcd}$$

Soit $\overline{q}_i$ (resp. $\tilde{q}_i$) l'image inverse de q_i dans $G_{\overline{s}}$ (resp. $G_{\tilde{s}}$) ; les morphismes $\overline{a}$ et $\tilde{a}$ sont surjectifs, et le morphisme $\overline{a}_i$ (resp. $\tilde{a}_i$) induit une bijection de $(F_i)_{\overline{s}}$ (resp. $(F_i)_{\tilde{s}}$) sur $\overline{a}^{-1}(q_i)$ (resp. sur $\tilde{a}^{-1}(q_i)$). Il resulte donc du diagramme ci–dessus que b est un isomorphisme.

439

Corollaire 6.2 *Soient S un schéma localement noethérien, $f\colon X \to S$ un morphisme propre. Soit Φ un champ l–constructible sur X, alors $f_*\Phi$ est un champ l–constructible.*

La démonstration de 6.1 prouve aussi le résultat suivant, compte tenu de 2.4 2).

Corollaire 6.3 *Soient S un schéma localement noetherien, $f\colon X \to S$ un morphisme, D un diviseur sur X à croisements normaux relativement à S (2.1), $Y = \operatorname{Supp} D$, $U = X - Y$, $i\colon U \to X$ l'immersion canonique. Soit Φ un champ sur U donné, localement pour la topologie étale sur X et S, comme image inverse d'un champ Ψ l–constructible sur S. Alors le champ $i_*^t\Phi$ est l–constructible.*

7 Bibliographie

[1] J. Giraud, Cohomologie non abélienne de degré 2, thèse, Paris (1966).

[2] J. Giraud, Cohomologie non abélienne de degré 2, à paraître.

[3] Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Chelsea, New York (1934).

[4] J.P. Serre, Cohomologie galoisienne, Lecture Notes n° 5, Springer, Berlin (1964).

[5] J.P. Serre, Corps locaux, Hermann, Paris (1962).