

Uitwerkingen werkcollege 1.

- 1.2.1 (1) $(5, 6)$
 (2) $(-7, 11)$
 (3) $(1, 7)$
 (4) $(5, 10)$
 (5) $(10, 6)$
- 1.2.2 In het college is een definitie gegeven die zegt dat (p, q, r, s) met p, q, r en s in $\mathbb{R}^2$ de hoekpunten van een parallellogram zijn precies dan als $q - p = r - s$. Aan beide kanten $p + s$ optellen geeft dat $p + r = q + s$.
- 1.3.1 (1) -9
 (2) 34
 (3) 0
 (4) 0
 (5) 34
- 1.3.2 Other answers may be correct as well!
 (1) $v = (1, -3), w = (1, 1), a = (3, 1), b = 4$
 (2) $v = (2, 1), w = (1, -3), a = (1, -2), b = 7$
 (3) $v = (1, 1), w = (2, 0), a = (1, -1), b = 2$
- 1.3.3 (1) $a = (2, 3), c = 0$
 (2) $a = (3, -1), c = 1$
 (3) $a = (2, 2), c = 3$
- 1.3.4 The equation is equivalent with $\langle a, x \rangle = 5$ with $a = (0, 4, 1)$, so V is indeed a hyperplane in $\mathbb{R}^3$, that is, V is a plane.
- 1.3.5 Other answers may be correct as well!
 (3) $v = q - p = (0, 3, 2, 5)$ and $w = p = (1, -1, 1, -1)$
- 1.3.6 Laat $v = (v_1, v_2, v_3)$ een element van $\mathbb{R}^3$ zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent (het argument voor de equivalentie tussen regel n en regel $n + 1$ staat op regel $n + 1$):

$$v \in H \cap H'$$

$$(v \in H) \wedge (v \in H') \quad \text{vanwege definitie doorsnede}$$

$$(v_1 + 2v_2 - v_3 = 4) \wedge (-v_1 + v_3 = 0) \quad \text{definities van } H \text{ en } H'$$

$$(v_1 + 2v_2 - v_3 = 4) \wedge (v_1 = v_3) \quad v_1 \text{ naar rechts brengen in verg. 2}^1$$

$$(2v_2 = 4) \wedge (v_1 = v_3) \quad v_1 = v_3 \text{ invullen in vergelijking 1}$$

$$(v_2 = 2) \wedge (v_1 = v_3) \quad \text{vermenigvuldig met } 1/2 \text{ in verg. 1}$$

$$(v_1, v_2, v_3) = (v_3, 2, v_3) \quad \text{alleen een andere notatie}$$

$$(v_1, v_2, v_3) = (0, 2, 0) + v_3 \cdot (1, 0, 1) \quad \text{definities van } + \text{ en } \cdot$$

Omdat alle condities equivalent zijn hebben we bewezen dat

$$H \cap H' = \{(0, 2, 0) + \lambda \cdot (1, 0, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- 1.3.7 Laat L de verzameling $\{\lambda p + \mu q : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ en } \lambda + \mu = 1\}$. Vanwege Propositie 1.12 in het dictaat is het voldoende te bewijzen dat L een lijn is, en dat L p en q bevat. We laten eerst zien dat L een lijn is. De (λ, μ) in $\mathbb{R}^2$

¹Dit is een equivalentie want je kunt links en rechts weer v_1 aftrekken. Net zo, verderop, is vermenigvuldiging met 2 de inverse bewerking van vermenigvuldigen met $1/2$.

met $\lambda + \mu = 1$ zijn precies de (λ, μ) met $\mu = 1 - \lambda$. Invullen geeft dan $\lambda p + \mu q = \lambda p + (1 - \lambda)q = q + \lambda(p - q)$. Dus $L = \{q + \lambda(p - q) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ en daarom is L een lijn (want $p \neq q$, dus $p - q \neq 0$). Voor $\lambda = 0$ zien we dat $q \in L$ en voor $\lambda = 1$ dat $p \in L$. Klaar.

- 1.4.1 Laat (p, q, r, s) de hoekpunten van een parallellogram zijn. Dan geldt (vanwege de definitie die in het college is gegeven) dat $q - p = r - s$. Dan zijn de zijden $v = q - p$ en $w = s - p$ en de diagonalen $w + v$ en $w - v$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} c^2 + d^2 &= \|w + v\|^2 + \|w - v\|^2 = \langle w + v, w + v \rangle + \langle w - v, w - v \rangle \\ &= \|w\|^2 + 2\langle w, v \rangle + \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle w, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2\|w\|^2 + 2\|v\|^2 = 2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

- 1.4.2 (1) For each $v, w \in \mathbb{R}^n$ we have

$$\begin{aligned} \langle v - w, v + w \rangle &= \langle v - w, v \rangle + \langle v - w, w \rangle = \langle v, v \rangle - \langle w, v \rangle + \langle v, w \rangle - \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2. \end{aligned}$$

By definition, the vectors $v - w$ and $v + w$ are orthogonal if and only if we have $\langle v - w, v + w \rangle = 0$, which by the above happens if and only if $\|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$, that is, $\|v\| = \|w\|$ (since lengths are nonnegative).

- (2) Choose a vertex p of the parallelogram and let v and w be the vectors represented by the arrows from p to the two vertices connected to p . Then the sides of the parallelogram are $\|v\|$ and $\|w\|$. The diagonals of the parallelogram represent the vectors $v - w$ and $v + w$ (after choosing a direction of these diagonals). By part (1) of this exercise they are orthogonal to each other if and only if $\|v\| = \|w\|$, that is, all sides have the same length.

1.4.4 60 degrees

- 1.4.5 (1) True: the lines do not intersect each other because there is no $x \in \mathbb{R}^2$ with $\langle a, x \rangle = 0$ and $\langle a, x \rangle = 1$.
 (2) False: if $a = 2b$, then the line $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle a, x \rangle = 0\}$ is the same as the line $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle b, x \rangle = 0\}$, which is parallel to the line $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle b, x \rangle = 1\}$ by part (1).
 (3) True: if $v = (x, y)$, then $\langle 0, v \rangle = 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. (The first 0 in the statement is the zero vector, the second is the real number 0.)