88 Möbius band, voor de wetenschapsquiz; 2003/07/04

De som in de wetenschapsquiz is:

> Knip een Möbiusband langs het midden door, en dan nog eens, hoeveel stukken heb je dan?

Hoe beschrijven we de Möbius band? Begin met een strook papier, lang genoeg en niet te breed. Plak dan de twee korte zijden aan elkaar, maar zo dat de bovenkant van de ene zijde aan de onderkant van de andere komt. Dan heb je de Möbiusband. Hoeveel slagen je erin hebt gelegd doet er niet toe voor het probleem waar het nu over gaat (maar het moet wel een oneven aantal zijn, want anders waren de bovenkanten aan elkaar geplakt).

Om nu te kunnen begrijpen wat er gebeurt als we gaan knippen, tekenen we de strook, met wat punten die we voorzien van getallen die laten zien hoe de korte zijden geplakt worden. We verdelen ook alvast de strook in 4 kleinere stroken.

In dit plaatje wordt dus de linkerzijde aan de rechterzijde geplakt zodat de punten met hetzelfde nummer op elkaar komen. Voor de duidelijkheid van wat dit plakken betekent: als we nu een streep trekken van links naar rechts over strook 1, en over de lijn tussen de punten 4 en 5 door gaan, komen we links terecht op de achterkant van strook 4. In het bijzonder zijn de stroken 1 en 4 aan elkaar geplakt, en zo ook de stroken 2 en 3.

Wat gebeurt er nu bij de het knippen? De eerste knip begint bij het punt 3 links, gaat naar rechts tot het punt 3 wat hetzelfde is als het punt 3 links, en is dan dus klaar. De tweede knip begint bij het punt 2 links, gaat naar rechts tot het punt 4 wat hetzelfde is als het punt 4 links, gaat vandaar weer naar rechts tot het punt 2 en is dan pas klaar.

Als nu de linker en rechterzijden van de strook niet aan elkaar geplakt waren, hadden we nu 4 losse stroken: stroken 1 tot en met 4. Maar vanwege het plakken zitten de stroken 1 en 4 nog aan elkaar vast en vormen dus één stuk, en zo ook stroken 2 en 3. Dat betekent dus dat er na twee keer knippen 2 stukken zijn.

Iets uitgebreider: het voorwerp dat we na het plakken en knippen hebben, krijgen we ook als we de volgorde van het plakken en knippen verwisselen. Dan is duidelijk dat er precies twee losse stukken zijn: stroken 1 en 4 samen, en stroken 2 en 3 samen.

Het deelgebied van de wiskunde dat antwoord geeft op het soort vragen als in hoeveel losse stukken dingen uiteen vallen na knippen heet algebraïsche topologie. Het geven van formules is in dit geval niet zinvol: het draagt niet bij tot het beter begrijpen van het probleem. Tot slot merken we op dat de manier waarop de losse stukken ruimtelijk door elkaar geknoopt zitten ook interessant is (knopentheorie), en dat dat wèl afhangt van hoeveel slagen men in de Möbiusband heeft gemaakt. Het aantal losse stukken na knippen is een eigenschap van de Möbiusband zelf, d.w.z., hangt niet af van hoe de Möbiusband in onze 3-dimensionale ruimte zit, maar hoe de stukken zelf en door elkaar geknoopt zijn hangt daar wel af. Aan de andere kant, in een 4-dimensional of nog hoger-dimensionale ruimte zou men ook nog steeds 2 losse stukken zien, maar die zijn dan niet meer door elkaar geknoopt.

Probeer het voor de lol maar eens met drie slagen in plaats van één, en zie wat een janboel het wordt, maar wel met twee losse stukken.