4E HUISWERKOPDRACHT CONTINUE WISKUNDE

Inleverdatum dinsdag 12 oktober

N.B. Je moet de hele uitwerking opschrijven en niet alleen het antwoord geven.
Handgeschreven (mits goed leesbaar) en getypt mag alletwee.
Zet je voornaam en achternaam (beide in HOOFDLETTERS) en studentnummer op het huiswerk.
Maak één pdf van je hele huiswerk. Je mag geen aparte foto's van elk blaadje inleveren.
Na de huiswerkopgaven staan enkele uitgewerkte voorbeeldopgaven.

Opgave 1. Bepaal de afgeleiden van

a) $\dfrac{\ln x}{4+\sin x}$; b) $x^{\cos x}$ (hint: $x^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \ln x}$).

Opgave 2. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = (x^3 + x)^{10}$ in het punt $(2, f(2))$.

Opgave 3. Druk de afgeleide van $g(x) := f(x + e^x)$ uit in termen van f' en x.

Opgave 4. Een rechthoekige driehoek heeft rechthoekszijden $x, y \geq 0$ en schuine zijde $\sqrt{x^2 + y^2}$ (volgens de stelling van Pythagoras). De oppervlakte van deze driehoek is $\frac{1}{2}xy = 2$. Bepaal x en y zodat de schuine zijde $\sqrt{x^2 + y^2}$ minimaal is.

UITGEWERKTE OPGAVEN

Opgave 1. Druk de afgeleide van $g(x) := f(5x^3 + e^x)$ uit in de afgeleide van f en in x.

Oplossing. De functie $g(x)$ is de samenstelling van $f(x)$ en $5x^3 + e^x$. Volgens de kettingregel krijgen we $g'(x)$ door eerst $5x^3 + e^x$ in te vullen in de afgeleide van f en daarna met de afgeleide van $5x^3 + e^x$ te vermenigvuldigen. Dus $g'(x) = f'(5x^3 + e^x)(5x^3 + e^x)' = f'(5x^3 + e^x) \cdot (15x^2 + e^x)$.

Opgave 2. Bepaal de afgeleide van $f(x) = x^{1/\sin x}$.

Oplossing. In het algemeen kunnen we een functie $g(x)^{h(x)}$ schrijven als $(e^{\ln g(x)})^{h(x)} = e^{h(x)\ln g(x)}$.
In ons geval (met $g(x) = x$ en $h(x) = 1/\sin x$) geeft dit $f(x) = e^{(1/\sin x)\ln x} = e^{\ln x/\sin x}$. We kunnen deze functie differentiëren met de kettingregel. Dit geeft

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\ln x/\sin x}(\ln x/\sin x)' = e^{\ln x/\sin x} \cdot \frac{\sin x \ln' x - \sin' x \ln x}{\sin^2 x} \\ &= e^{\ln x/\sin x} \cdot \frac{(\sin x/x) - \cos x \ln x}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Opgave 3. Bepaal de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(1, f(1))$ van de functie $f(x) = \sin(\pi\sqrt{x^2+8})$.

Oplossing. De vergelijking van de raaklijn in $(a, f(a))$ aan de grafiek van f is

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Volgens de kettingregel is

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(\pi\sqrt{x^2+8}) \cdot (\pi\sqrt{x^2+8})' \\ &= \cos(\pi\sqrt{x^2+8}) \cdot \pi\frac{1}{2}((x^2+8))^{-1/2} \cdot (x^2+8)' \\ &= \cos(\pi\sqrt{x^2+8}) \cdot \pi\frac{1}{2}(x^2+8)^{-1/2} \cdot 2x \\ &= \cos(\pi\sqrt{x^2+8}) \cdot \pi(x^2+8)^{-1/2} \cdot x. \end{aligned}$$

We vinden $f(1) = \sin(\pi\sqrt{9}) = \sin 3\pi = 0$, en

$$f'(1) = (\cos 3\pi)\pi \cdot 9^{-1/2} \cdot 1 = (-1) \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{\pi}{3}.$$

Dus de vergelijking van de raaklijn wordt $y = -\frac{1}{3}\pi(x - 1)$.

Opgave 4. Bepaal de extremen, met plaats, grootte en aard, van $f(x) = x^4 - 2x^2$ op $[-2, 2]$.

Oplossing. De afgeleide van f is $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.
De extremen van f liggen óf op de rand van het domein, dat wil zeggen in $x = -2$ of $x = 2$, of in een punt waar $f'(x) = 0$ dat wil zeggen $x = -1, 0$ of 1.
We bepalen eerst een tekenoverzicht van f' om te bepalen waar de functie f stijgend of dalend is. Er geldt:
$f'(x) < 0$ en f dalend voor $-2 \leq x < -1$ ($x < 0$ en $x^2 - 1 > 0$);
$f'(x) > 0$ en f stijgend voor $-1 < x < 0$ ($x < 0$ en $x^2 - 1 < 0$);
$f'(x) < 0$ en f dalend voor $0 < x < 1$ ($x > 0$ en $x^2 - 1 < 0$);
$f'(x) > 0$ en f stijgend voor $1 < x \leq 2$ ($x > 0$ en $x^2 - 1 > 0$).

Dus f heeft een maximum voor $x = -2$, een minimum voor $x = -1$, een maximum voor $x = 0$, een minimum voor $x = 1$ en een maximum voor $x = 2$. Om te bepalen of die maxima en minima absoluut of relatief zijn moeten we de functiewaarden uitrekenen. Er geldt

$$f(-2) = 8,\ f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = -1,\ f(2) = 8.$$

Dit geeft het volgende:

plaats	**grootte**	**aard**
$x = -2$	$f(-2) = 8$	absoluut maximum
$x = -1$	$f(-1) = -1$	absoluut minimum
$x = 0$	$f(0) = 0$	relatief maximum
$x = 1$	$f(1) = -1$	absoluut minimum
$x = 2$	$f(2) = 8$	absoluut maximum

Opgave 5. Een rechthoekig blok heeft lengte en breedte x en hoogte y en inhoud 1000. Bepaal x en y zodat de oppervlakte van het blok minimaal is.

Oplossing. Volgens gegeven heeft het blok inhoud $x^2y = 1000$. Dus $y = 1000x^{-2}$.
De oppervlakte van het blok is

$$\begin{aligned} &2x^2 \text{ (ondervlak en bovenvlak) } + 4xy \text{ (4 zijvlakken)} \\ &= 2x^2 + 4x(1000x^{-2}) = 2x^2 + 4000x^{-1} =: f(x). \end{aligned}$$

Uiteraard zijn lengtes van zijden altijd positief, dus we mogen aannemen dat $x > 0$ en $y > 0$. We moeten het minimum bepalen van $f(x)$ op $(0, \infty)$. Er geldt

$$f'(x) = 4x - 4000x^{-2}.$$

De afgeleide f' van f is negatief voor $0 < x < \sqrt[3]{1000} = 10$, gelijk aan 0 voor $x = 10$ en positief voor $x > 10$. Dus de functie f is dalend voor $0 < x < 10$, stijgend voor $x > 10$, en neemt in $x = 10$ een absoluut minimum op $(0, \infty)$ aan.
We concluderen dat de oppervlakte van het blok minimaal is wanneer $x = 10$ en $y = 1000x^{-2} = 10$.