5E HUISWERKOPDRACHT CONTINUE WISKUNDE 1

Inleverdatum dinsdag 19 oktober

N.B. Je moet de hele uitwerking opschrijven en niet alleen het antwoord geven.
Handgeschreven (mits goed leesbaar) en getypt mag alletwee.
Zet je voornaam en achternaam (beide in HOOFDLETTERS) en studentnummer op het huiswerk.
Maak één pdf van je hele huiswerk. Je mag geen aparte foto's van elk blaadje inleveren.
Na de huiswerkopgaven staan enkele uitgewerkte voorbeeldopgaven.

Opgave 1. Bepaal de scheve asymptoot voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ van $f(x) = \dfrac{2x^6 + 33x^5}{x^5 + x}$.

Opgave 2. Schets de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - 81}$.
Je moet hiervoor het volgende bepalen:
a) het domein van f;
b) de verticale asymptoten van f en voor elke verticale asymptoot $x = a$ van f de limieten $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow a} f(x)$; hiervoor is een tekenoverzicht van f nodig;
c) eventuele horizontale of scheve asymptoten van f voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$; in het geval van een scheve asymptoot moet je kijken of de grafiek van f snijpunten heeft met de scheve asymptoot.
d) de afgeleide van f, een tekenoverzicht van f', en de extremen van f met plaats, grootte en aard.

Opgave 3. Bereken de volgende limieten:
a) $\displaystyle\lim_{x \to e^2} \frac{\ln x - 2}{x - e^2}$;
b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1}$.

UITGEWERKTE OPGAVEN

Opgave 1. Bepaal de scheve asymptoot voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ van $f(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 + 8}{x^4 + 3}$.

Oplossing. We beginnen met een staartdeling.

$$\begin{array}{rll} x^4+3\,/ & x^5 + 2x^4 + 8 & \backslash\ x+2 \\ & x^5 + 3x \quad - & \\ \cline{2-2} & 2x^4 - 3x + 8 & \\ & 2x^4 + 6 \quad - & \\ \cline{2-2} & -3x + 2 & \end{array}$$

Dus $x^5 + 2x^4 + 8 = (x+2)(x^4+3) + (-3x+2),\ f(x) = x + 2 + \dfrac{-3x+2}{x^4+3}$.

Er geldt

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x+2}{x^4+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^{-3} + 2x^{-4}}{1 + 3x^{-4}} = 0.$$

Dus $y = x + 2$ is een scheve asymptoot van $f(x)$ voor zowel $x \to \infty$ als $x \to -\infty$.

Opgave 2. Bereken de volgende limieten:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} x^a \ln x$ voor $a > 0$ (met de regel van L'Hôpital)

(d) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} x^a (\ln x)^b$ voor $a > 0$ en $b = 1, 2, 3, \ldots$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{b^x}$ voor $b > 1$ (met de regel van L'Hôpital)

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{b^x}$ voor $a > 0,\ b > 1$

(g) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} x^{x^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} (1+x)^{1/x}$

Oplossing. Met een H boven het =-teken wordt aangegeven dat de regel van L'Hôpital wordt gebruikt.

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{(\cos x)^{-2}-1} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-2(\cos x)^{-3}(-\sin x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(\cos x)^{-3}} = \lim_{x\to 0} -\tfrac{1}{2}\cos^3 x = -\tfrac{1}{2}.$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \underset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\cos x + \sin x}$$
$$\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x - x\sin x + \cos x} = \frac{0}{1-0+1} = 0$$

(omwerken naar $\frac{0}{0}$-limiet en de regel van L'Hôpital toepassen).

(c)
$$\lim_{x\downarrow 0} x^a \ln x \underset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln x}{x^{-a}} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\downarrow 0}\frac{1/x}{-ax^{-a-1}}$$
$$= \lim_{x\downarrow 0}\frac{x^{a+1}(1/x)}{-a} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{x^a}{-a} = 0.$$

(d)
$$\lim_{x\downarrow 0} x^a(\ln x)^b = \lim_{x\downarrow 0}(x^{a/b}(\ln x))^b = 0^b = 0$$

(pas (c) toe met a/b in plaats van a).

(e) Er geldt $b^x = e^{(\ln b)x}$, dus de afgeleide van b^x is $e^{(\ln b)x}\ln b = b^x \ln b$. We vinden zo
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{b^x} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{b^x\ln b} = 0.$$

(f)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{b^x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{(b^{1/a})^x}\right)^a = 0^a = 0$$

(we hebben hier gebruikt dat $b^x = \left((b^x)^{1/a}\right)^a = (b^{x\cdot(1/a)})^a = \left((b^{1/a})^x\right)^a$ en (e) toegepast met $b^{1/a}$ in plaats van b).

(g)
$$\lim_{x\downarrow 0} x^{x^2} \underset{0^0}{=} \lim_{x\downarrow 0} e^{x^2\ln x} = e^0 = 1$$

(we gebruiken hier dat $g(x)^{h(x)} = (e^{\ln g(x)})^{h(x)} = e^{h(x)\ln g(x)}$; in de laatste stap gebruken we (c)).

(h)
$$\lim_{x\downarrow 0}(1+x)^{1/x} \underset{1^\infty}{=} \lim_{x\downarrow 0} e^{(1/x)\ln(1+x)} = e^1 = e$$

(we gebruiken hier $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1$).

Opgave 3. Schets de grafiek van $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$.

Oplossing.
a) Het domein van f is $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) De verticale asymptoot van f is $x = 1$. Het tekenoverzicht van f is:
$f(x) < 0$ voor $x < 1$ en $x \neq 0$ ($x^3 - 1 < 0$ en $x^4 > 0$);
$f(x) = 0$ voor $x = 0$;
$f(x) > 0$ voor $x > 1$ ($x^3 - 1 > 0$ en $x^4 > 0$).

Dus

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\downarrow 1} f(x) = \infty. \quad \lim_{x\uparrow 1} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\downarrow 1} f(x) = \infty.$$

c) De graad van de teller van f is 1 groter dan de graad van de noemer van f. Dus f heeft een scheve asymptoot zowel voor $x \to \infty$ als voor $x \to -\infty$. Er geldt

$$x^4 = x(x^3-1) + x, \quad \text{dus } f(x) = x + \frac{x}{x^3-1}.$$

Hieruit volgt

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{-2}}{1-x^{-3}} = 0.$$

Dus $y = x$ is een scheve asymptoot van f zowel voor $x \to \infty$ als voor $x \to -\infty$.
De grafiek van f en de scheve asymptoot $y = x$ snijden elkaar alleen in het punt $(0,0)$.

d) De afgeleide van f is

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3-1)\cdot 4x^3 - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{4x^6 - 4x^3 - 3x^6}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}. \end{aligned}$$

Dus $f'(x) = 0$ voor $x = \sqrt[3]{4}$ of $x = 0$.
Het tekenoverzicht van f' is:
$f'(x) > 0$ en f stijgend voor $x < 0$ ($x^3 - 4 < 0$, $x^3 < 0$, het kwadraat is > 0);
$f'(x) < 0$ en f dalend voor $0 < x < \sqrt[3]{4}$, $x \neq 1$ ($x^3 - 4 < 0$, $x^3 > 0$);
$f'(x) > 0$ en f stijgend voor $x > \sqrt[3]{4}$ ($x^3 - 4 > 0$, $x^3 > 0$).

Uit dit tekenoverzicht volgt dat f in $x = 0$ een maximum aanneemt, en in $x = \sqrt[3]{4}$ een minimum. Omdat bijvoorbeeld $\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\downarrow 1} f(x) = \infty$, zijn zowel het minimum als het maximum relatief.

plaats	**grootte**	**aard**
$x = 0$	$f(0) = 0$	relatief maximum
$x = \sqrt[3]{4}$	$f(\sqrt[3]{4}) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	relatief minimum