OEFENOPGAVEN CONTINUE WISKUNDE 1

De antwoorden staan op de volgende bladzijde

Opgave 1. Bepaal het 2$^{\text{e}}$ Taylorpolynoom $p_{3,0}(x)$ van $\sin(2x + x^2)$ rond $x = 0$.

Opgave 2. a) Bepaal het 3$^{\text{e}}$ Taylorpolynoom $p_{3,81}(x)$ van $\sqrt[4]{x}$ rond $x = 81$.
b) Bepaal de restterm $R_{4,81}(x)$.
c) Laat met behulp van de restterm uit b) zien dat $|\sqrt[4]{82} - p_{3,81}(82)| \leq \frac{77}{4096} \cdot 3^{-15} < 10^{-8}$.

ANTWOORDEN

Opgave 1: $p_{2,0}(x) = 2x + x^2$

Opgave 2:

a) $p_{3,81}(x) = 3 + \dfrac{1}{108} \cdot (x-81) - \dfrac{1}{23328} \cdot (x-81)^2 + \dfrac{7}{22674816} \cdot (x-81)^3$

b) $R_{4,81}(x) = -\dfrac{77}{4096} \cdot s^{-15/4} \cdot (x-81)^4$, waarbij s ligt tussen 81 en x
(je mag de opmerking dat s tussen 81 en x ligt niet vergeten!)

c) $|\sqrt[4]{81} - p_{3,81}(82)| = |R_{4,81}(82)| = \frac{77}{4096} \cdot s^{-15/4}$ met s tussen 81 en 82.
Er geldt $s^{-15/4} \leq 81^{-15/4} = 3^{-15}$. Dus $|R_{4,81}(82)| \leq \frac{77}{4096} \cdot 3^{-15} < 10^{-8}$.

UITGEWERKTE OPGAVEN

Opgave 1. Bepaal het 2$^{\text{e}}$ Taylorpolynoom $p_{2,0}(x)$ van $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ rond $x = 0$.

Oplossing. Algemeen geldt: als $f(x)$ n keer differentieerbaar is rond $x = a$, dan is het n^{e} Taylorpolynoom van f) rond $x = a$ gegeven door

$$p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

In ons geval is $n = 2$, $a = 0$, $p_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$.
We maken eerst een tabel met de coëfficiënten van het Taylorpolynoom.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\ln(1+x+x^2)$	0	0
1	$\frac{1+2x}{1+x+x^2}$	1	1
2	$\frac{(1+x+x^2)\cdot 2-(1+2x)(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$	$\frac{1\cdot 2-1^2}{1^2} = 1$	$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

Bij het berekenen van de eerste afgeleide hebben we de kettingregel gebruikt, bij het berekenen van de tweede afgeleide de productregel voor afgeleiden $(fg)' = f'g + fg'$.
Je hoeft de tweede afgeleide niet uit te werken, je hoeft alleen maar $x = 0$ in te vullen.
De coëfficiënten van $p_{2,0}(x)$ lezen we af in de laatste kolom. We zien $p_{2,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

Opgave 2. (a) Bepaal het 3$^{\text{e}}$ Taylorpolynoom $p_{3,1000}(x)$ rond $x = 1000$ van $\sqrt[3]{x}$. Geef ook de restterm $R_{4,1000}(x)$.
(b) Laat zien dat $|\sqrt[3]{1001} - p_{3,1000}(x)| < 10^{-12}$.

Oplossing. Algemeen geldt: als $f(x)$ $(n+1)$ keer continu differentieerbaar is rond $x = a$, dan is

$$f(x) = p_{n,a}(x) + R_{n+1,a}(x)$$

waarbij $p_{n,a}(x)$ het n^{e} Taylorpolynoom is rond $x = a$, en

$$R_{n+1,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{met } s \text{ tussen } a \text{ en } x$$

de $(n+1)^{\text{e}}$ Lagrange-restterm.
De restterm $R_{n+1,a}(x)$ is dus de fout die we maken wanneer we $f(x)$ benaderen door $p_{n,a}(x)$ en

$$|f(x) - p_{n,a}(x)| = |R_{n+1,a}(x)|.$$

(a) Het Taylorpolynoom dat we moeten bepalen is

$$p_{3,1000}(x) = f(1000) + f'(1000)(x-1000) + \frac{f^{(2)}(1000)}{2!}(x-1000)^2 + \frac{f^{(3)}(1000)}{3!}(x-1000)^3.$$

We berekenen eerst de tabel met de coëfficiënten van het Taylorpolynoom:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1000)$	$f^{(n)}(1000)/n!$
0	$x^{1/3}$	10	10
1	$\frac{1}{3}x^{-2/3}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{300}$
2	$-\frac{2}{9}x^{-5/3}$	$-\frac{2}{9} \times 10^{-5}$	$-\frac{1}{9} \times 10^{-5}$
3	$\frac{10}{27}x^{-8/3}$	$\frac{1}{27} \times 10^{-7}$	$\frac{1}{162} \times 10^{-7}$
4	$-\frac{80}{81}x^{-11/3}$		

($1000^{-5/3} = (1000^{1/3})^{-5} = 10^{-5}$ etc.)

Uit bovenstaande tabel vinden we dat

$$p_{3,1000}(x) = 10 + \frac{1}{300}(x-1000) - \frac{1}{9}10^{-5}(x-1000)^2 + \frac{1}{162}10^{-7}(x-1000)^3.$$

De Lagrange-restterm is

$$R_{4,1000}(x) = \frac{f^{(4)}(s)}{4!}(x-1000)^4 = -\frac{80}{81 \cdot 24}s^{-11/3}(x-1000)^4 \quad \text{met } s \text{ tussen 1000 en } x.$$

Je mag de opmerking dat s tussen 1000 en x ligt niet vergeten!

(b) Vul in het bovenstaande $x = 1001$ in. Dan is

$$|\sqrt[3]{1001} - p_{3,1000}(1001)| = |R_{4,1000}(1001)| = \frac{80}{81 \cdot 24}s^{-11/3} \quad \text{met } s \text{ tussen 1000 en 1001}.$$

Er geldt $s^{-11/3} \leq 1000^{-11/3} = 10^{-11}$, dus

$$|\sqrt[3]{1001} - p_{3,1000}(1001)| = |R_{4,1000}(1001)| \leq \frac{80}{81 \cdot 24}10^{-11} < 10^{-12}.$$