2E HUISWERKOPDRACHT
CONTINUE WISKUNDE 2

Inleverdatum woensdag 20 april, 11:15

Opgave 1. Bereken de volgende oneigenlijke integralen en ga na of ze convergent of divergent zijn. Het is het handigste om eerst de primitieven uit te rekenen en daarna de grenzen in te vullen.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{5x^4+2x}{(x^5+x^2+1)^2}\cdot dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[5]{(x-1)^3}}\cdot dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 x^8 \ln x \cdot dx$ (je mag gebruiken dat $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^a \ln x = 0$ voor $a > 0$).

Opgave 2. Bepaal de inhoud van het omwentelingslichaam om de x-as van de grafiek van $f(x) = \sqrt{\cos x + 3}$ tussen $x = 0$ en $x = \pi$.

Opgave 3. Gegeven is de functie $f(x,y) = \dfrac{1}{1-2x-y}$, gedefinieerd voor alle punten (x,y) met $2x + y \neq 1$.
Schets de niveaukrommen $N_c(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{1-2x-y} = c\right\}$ voor $c = 1$ en $c = 2$.
Laat zien dat er voor $c = 0$ geen niveaukrommen is.

Opgave 4. Bepaal de partiële afgeleiden $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ van de volgende functies f. Bepaal ook voor elke functie f het raakvlak aan de grafiek van f in $(1, 0, f(1,0))$.

a) $f(x,y) = e^{4xy} + 2y$;

b) $f(x,y) = \sin(\pi x + y^2)$.

VOORBEELDEN

1. Bereken $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+12}\cdot dx$. Is deze integraal convergent of divergent?

Oplossing. Het is het handigste om eerst primitieven te bepalen. Substitueer $u = x^2+12$. Dan is $du = (x^2+12)'dx = 2xdx$, dus $xdx = \frac{1}{2}du$. Dit geeft

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+12}\cdot dx &= \int \frac{1}{u}\cdot \tfrac{1}{2}du = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{u}\cdot du = \tfrac{1}{2}\ln u + C \\ &= \tfrac{1}{2}\ln(x^2+12) + C.\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{x^2+12}\cdot dx &= \lim_{B\to\infty}\int_0^B \frac{x}{x^2+12}\cdot dx = \lim_{B\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\ln(x^2+12)\right]_0^B \\ &= \lim_{B\to\infty}\tfrac{1}{2}\ln(B^2+12) - \tfrac{1}{2}\ln 12 = \infty.\end{aligned}$$

Dus de integraal is *divergent*.

2. Bereken $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot dx$.

Oplossing. Dit is een oneigenlijke integraal, omdat $\displaystyle\lim_{t\downarrow 1}\frac{1}{\sqrt{t-1}} = \infty$.

Er geldt nu

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot dx &= \lim_{t\downarrow 1}\int_t^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot dx \\ &= \lim_{t\downarrow 1}\left[2\cdot(x-1)^{1/2}\right]_t^2 = \lim_{t\downarrow 1}\left(2 - 2(t-1)^{1/2}\right) = 2.\end{aligned}$$

Dus de integraal is *convergent*.

3. Bereken $\displaystyle\int_0^1 \ln^2 x\cdot dx$. Is deze integraal convergent of divergent?

Oplossing. Merk eerst op dat dit een oneigenlijke integraal is. Namelijk met de substitutie $x = e^{-u}$ zien we dat $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0}\ln^2 x = \lim_{u\to\infty}(-u)^2 = \infty$.

We bepalen eerst de primitieven van $\ln^2 x$. We passen partiële integratie toe met $f(x) = \ln^2 x$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$. We vinden dan

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x\cdot dx &= (\ln^2 x)\cdot x - \int x\cdot(2\ln x)x^{-1}\cdot dx \\ &= x\ln^2 x - \int 2\ln x\cdot dx.\end{aligned}$$

We hebben al eens uitgerekend dat $\int \ln x \cdot dx = x \ln x - x + C$ (ook met partiële integratie $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$). Als we dit invullen krijgen we

$$\int \ln^2 x \cdot dx = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

Voor de oneigenlijke integraal vinden we nu

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln^2 x \cdot dx &= \lim_{t \downarrow 0} \int_t^1 \ln^2 x \cdot dx = \lim_{t \downarrow 0} \left[x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \right]_t^1 \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \Big(1 \ln^2 1 - 2 \ln 1 + 2 - (t \ln^2 t - 2t \ln t + 2t) \Big) = 2. \end{aligned}$$

Dus de integraal is *convergent.*

We gebruiken hier dat $\lim_{t \downarrow 0} t^a (\ln t)^b = 0$ als $a > 0$ en $b \geq 0$. Om dit te bewijzen, substitueer $t = e^{-u}$. Dan krijgen we

$$\lim_{t \downarrow 0} t^a (\ln t)^b = \lim_{u \to \infty} e^{-au} u^b = \lim_{u \to \infty} \frac{u^b}{e^{au}} = 0,$$

de e-macht groeit namelijk veel harder dan u^b.

4. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam om de x-as van de grafiek van $f(x) = x^2 - 1$ tussen $x = 1$ en $x = 2$.

Oplossing. Voor een functie $f(x)$ met $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$ geldt dat de inhoud van het omwentelingslichaam om de x-as van de grafiek van $f(x)$ tussen $x = a$ en $x = b$ gelijk is aan

$$\int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Merk op dat $x^2 - 1 \geq 0$ voor $1 \leq x \leq 2$. Dus in ons geval wordt de inhoud van het onwentelingslichaam

$$\begin{aligned} \int_1^2 \pi (x^2 - 1)^2 dx &= \pi \int_1^2 \big(x^4 - 2x^2 + 1 \big) dx = \pi \Big[\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + x \Big]_1^2 \\ &= \pi \Big(\frac{2^5}{5} - \frac{2 \times 2^3}{3} + 2 - (\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1) \Big) = \pi \Big(\frac{31}{5} - \frac{14}{3} + 1 \Big) \\ &= \pi \Big(\frac{31 \times 3 - 14 \times 5 + 15}{15} \Big) = \frac{38}{15} \pi. \end{aligned}$$

5. Gegeven is de functie $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Hoe zien de niveaukrommen eruit?

Oplossing. Merk op dat $f(x, y) \geq 0$ voor alle x, y en $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Dus

$$N_0(f) = \{(0, 0)\}, \quad N_c(f) = \emptyset \text{ voor } c < 0,$$

met andere woorden, voor $c < 0$ is er geen niveaukromme.

Voor $c > 0$ geldt

$$N_c(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = c^{1/2}\}.$$

In het algemeen is $x^2 + y^2 = r^2$ de vergelijking van een cirkel met straal r. Dus $N_c(f)$ is een cirkel met straal $(c^{1/2})^{1/2} = c^{1/4}$.

6. Gegeven is de functie $f(x,y) = (x+y)^2 + \sin y$. Bepaal de partiële afgeleiden van f. Bepaal ook de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in $(1, 0, f(1,0))$.

Oplossing. Door naar x te differentiëren en y constant te houden vinden we

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+y),$$

en door naar y te differentiëren en x constant te houden,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y) + \cos y.$$

De vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van $f(x,y)$ in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ wordt gegeven door

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) \ + \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot (y - y_0).$$

In ons geval hebben we $(x_0, y_0) = (1,0)$ en

$$\begin{aligned} f(1,0) &= 1 + \sin 0 = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) &= 2(1+0) = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) &= 2(1+0) + \cos 0 = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

De vergelijking van het raakvlak in $(1, 0, f(1,0))$ wordt dus

$$z = 1 + 2(x-1) + 3(y-0) = 1 + 2(x-1) + 3y.$$

Op een tentamen hoef je dit niet verder uit te werken.