CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

1e college: Integraalrekening 1

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Primitieven

Gegeven is een functie $f : D \to \mathbb{R}$, waarbij D een interval is (dus $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ of een kleiner interval; D is het domein van f)

We zeggen dat f *primitiveerbaar* is op D als er een functie $F : D \to \mathbb{R}$ bestaat zodat $F' = f$.

Zo'n functie F noemen we een *primitieve* (Eng. anti-derivative, 'anti-afgeleide') van f.

Er zijn niet-primitiveerbare functies maar er geldt:

Stelling

Elke continue functie is primitiveerbaar.

Primitieven

Gegeven is een functie $f : D \to \mathbb{R}$, waarbij D een interval is (dus $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ of een kleiner interval; D is het domein van f)

We zeggen dat f *primitiveerbaar* is op D als er een functie $F : D \to \mathbb{R}$ bestaat zodat $F' = f$.

Zo'n functie F noemen we een *primitieve* (Eng. anti-derivative, 'anti-afgeleide') van f.

Er zijn niet-primitiveerbare functies maar er geldt:

Stelling

Elke continue functie is primitiveerbaar.

Dit is een *existentiestelling:* De stelling zegt alleen dat continue functies primitieven hebben maar niet hoe je ze kan vinden.

Primitieven

Gegeven is een functie $f : D \to \mathbb{R}$, waarbij D een interval is (dus $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ of een kleiner interval; D is het domein van f)

We zeggen dat f *primitiveerbaar* is op D als er een functie $F : D \to \mathbb{R}$ bestaat zodat $F' = f$.

Zo'n functie F noemen we een *primitieve* (Eng. anti-derivative, 'anti-afgeleide') van f.

Er zijn niet-primitiveerbare functies maar er geldt:

Stelling

Elke continue functie is primitiveerbaar.

Dit is een *existentiestelling:* De stelling zegt alleen dat continue functies primitieven hebben maar niet hoe je ze kan vinden.

Vaak kan dit ook niet: bijvoorbeeld de functie e^{x^2} is continu op $\mathbb{R}$ en heeft dus primitieven. Maar deze primitieven kunnen niet in bekende functies zoals machten van x, e-macht, ln, sin, cos, of samenstellingen daarvan worden uitgedrukt.

Onbepaalde integralen

Definitie

De onbepaalde integraal $\int f(x)dx$ is de verzameling van alle primitieven van f.

Onbepaalde integralen

Definitie

De onbepaalde integraal $\int f(x)dx$ is de verzameling van alle primitieven van f.

Feit

Zij D een interval, $f : D \to \mathbb{R}$ een primitiveerbare functie en F een primitieve van f.
Dan is $\int f(x)dx$ de verzameling van functies $F(x) + C$ waarbij C elk reëel getal aan kan nemen.

We schrijven gemakshalve $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Onbepaalde integralen

Definitie

De onbepaalde integraal $\int f(x)dx$ is de verzameling van alle primitieven van f.

Feit

Zij D een interval, $f: D \to \mathbb{R}$ een primitiveerbare functie en F een primitieve van f.
Dan is $\int f(x)dx$ de verzameling van functies $F(x) + C$ waarbij C elk reëel getal aan kan nemen.

We schrijven gemakshalve $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Opmerking: voor elke C geldt $(F + C)' = F' + C' = f$, omdat de afgeleide van een constante gelijk is aan 0.

Lijstje van onbepaalde integralen

In dit en het volgende college beschrijven we enkele methoden om primitieven te bepalen. We beginnen met een basislijstje.

C kan steeds alle reële getallen aannemen.

f	$\int f(x)dx$	domein van f
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$	$\mathbb{R}$ als $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ $(0, \infty)$ als $\alpha \neq 0, 1, 2, \dots$
x^{-1}	$\ln x + C$	$(0, \infty)$
x^{-1}	$\ln(-x) + C$	$(-\infty, 0)$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$

Voorbeeld

We geven een voorbeeld van $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$.

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \sqrt[7]{x^2} dx &= \int x^{3\frac{2}{7}} dx \\
&= \int x^{23/7} dx \quad (\alpha = \tfrac{23}{7},\ \alpha + 1 = \tfrac{30}{7}) \\
&= \tfrac{7}{30} x^{30/7} + C
\end{aligned}
$$

Vergeet bij onbepaalde integralen nooit de integratieconstante!

Rekenregels voor onbepaalde integralen

Optelregel

Zij D een interval, $f, g : D \to \mathbb{R}$ twee continue functies en a en b constanten. Dan is

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Rekenregels voor onbepaalde integralen

Optelregel

Zij D een interval, $f, g : D \to \mathbb{R}$ twee continue functies en a en b constanten. Dan is

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Voorbeeld. $\int (3e^x - 7\cos x + 2)dx = 3e^x - 7\sin x + 2x + C.$

Rekenregels voor onbepaalde integralen

Lineaire substitutieregel

Zij D een interval en $f : D \to \mathbb{R}$ een continue functie met $\int f(x)dx = F(x) + C$. Dan geldt voor alle a, b met $a \neq 0$ dat

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Rekenregels voor onbepaalde integralen

Lineaire substitutieregel

Zij D een interval en $f : D \to \mathbb{R}$ een continue functie met $\int f(x)dx = F(x) + C$. Dan geldt voor alle a, b met $a \neq 0$ dat

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$$

Namelijk vanwege de kettingregel heeft $\frac{1}{a}F(ax + b)$ afgeleide

$$\frac{1}{a}F'(ax + b)(ax + b)' = \frac{1}{a}f(ax + b) \cdot a = f(ax + b).$$

Dus $\frac{1}{a}F(ax + b)$ is een primitieve van $f(ax + b)$.

Rekenregels voor onbepaalde integralen

Lineaire substitutieregel

Zij D een interval en $f : D \to \mathbb{R}$ een continue functie met $\int f(x)dx = F(x) + C$. Dan geldt voor alle a, b met $a \neq 0$ dat

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

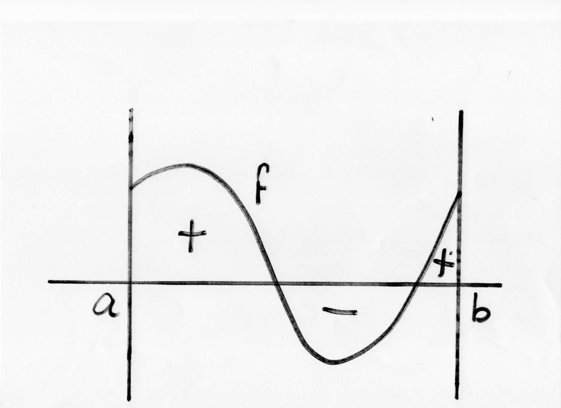
Voorbeeld. We bepalen $\displaystyle\int \sin(9x+8)dx$.

Er geldt $\int \sin x dx = -\cos x + C$, dus wegens de lineaire substitutieregel

$$\int \sin(9x+8)dx = -\frac{1}{9}\cos(9x+8) + C.$$

We gaan verder met bepaalde integralen.

Bepaalde integralen

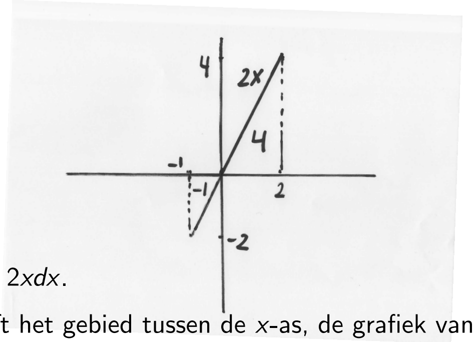


Vaag idee:

Neem een continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$\int_a^b f(x)dx$ is de oppervlakte van het gebied dat begrensd wordt door de x-as, de grafiek van f, en de lijnen $x = a$ en $x = b$, waarbij oppervlaktes van stukken onder de x-as negatief worden genomen.

Voorbeeld 1



We bepalen $\int_{-1}^{2} 2x dx$.

Het plaatje geeft het gebied tussen de x-as, de grafiek van $2x$ en de lijnen $x = -1$ and $x = 2$. Dit gebied bestaat uit een driehoek boven de x-as en een driehoek onder de x-as.

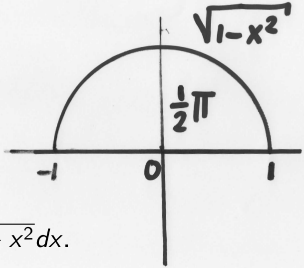
De oppervlakte van een driehoek is $\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$.

De oppervlakte van de driehoek boven de x-as is $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$.

De oppervlakte van de driehoek onder de x-as is $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$; deze wordt negatief genomen.

Dus $\int_{-1}^{2} 2x dx = 4 - 1 = 3$.

Voorbeeld 2



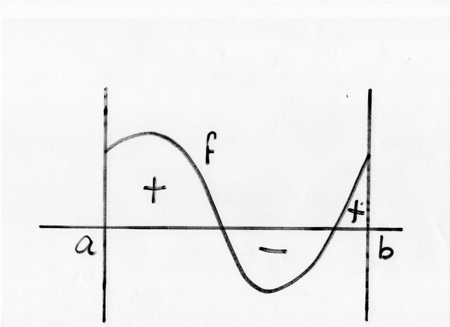
We bepalen $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$.

De cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 1 heeft vergelijking $x^2+y^2=1$, ofwel $y^2=1-x^2$.

$y=\sqrt{1-x^2}$ beschrijft de bovenste helft van de cirkel, dit is de grafiek van $\sqrt{1-x^2}$.

Dus de integraal is gelijk aan de oppervlakte van de bovenste helft van de cirkelschijf, dat wil zeggen $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\pi$.

Bepaalde integralen (preciezer)

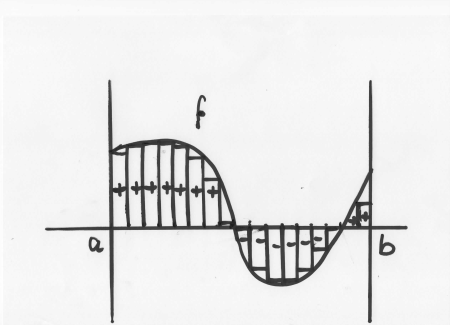


We hebben $\int_a^b f(x)dx$ 'gedefinieerd' als de oppervlakte van het gebied tussen de x-as, de grafiek van f en de lijnen $x = a$ en $x = b$, waarbij oppervlaktes van stukken onder de x-as negatief worden genomen.

We hebben formules voor de oppervlaktes van rechthoeken, driehoeken, stukken van cirkelschijven en dergelijke.

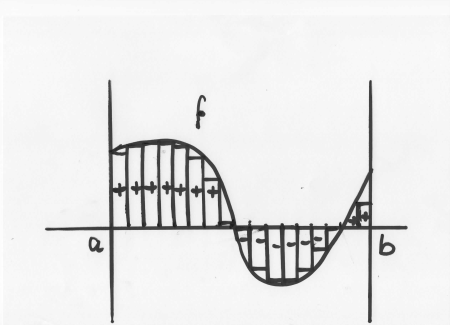
Maar hoe definiëren we de oppervlakte van een gebied met willekeurige kromme grenzen?

Bepaalde integralen (preciezer)



Idee: Verdeel het interval $[a, b]$ in n gelijke intervalletjes. Maak rechthoekjes op die intervalletjes tot aan de grafiek van f.
Deze rechthoekjes geven een steeds betere benadering van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as naarmate n groter wordt.

Bepaalde integralen (preciezer)



Idee: Verdeel het interval $[a, b]$ in n gelijke intervalletjes. Maak rechthoekjes op die intervalletjes tot aan de grafiek van f.
Deze rechthoekjes geven een steeds betere benadering van het gebied tussen de grafiek van f en de x-as naarmate n groter wordt.

Tel de oppervlaktes van die rechthoekjes (lengte$\times$breedte) op, maar neem de oppervlaktes van de rechthoekjes onder de x-as negatief.
Zo ontstaat een som $S(f, n)$.

Als we n naar oneindig laten gaan dan nadert $S(f, n)$ naar een limiet die we als $\int_a^b f(x)dx$ noteren.

Relatie tussen bepaalde en onbepaalde integralen

Hoofdstelling van de integraalrekening

Zij f een continue functie op $[a, b]$ en F een primitieve van f. Dan is

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Relatie tussen bepaalde en onbepaalde integralen

Hoofdstelling van de integraalrekening

Zij f een continue functie op $[a, b]$ en F een primitieve van f. Dan is

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Opmerking. Het maakt niet uit welke primitieve van f we kiezen.

Als G een andere primitieve is van F dan is $G(x) = F(x) + C$ voor zekere constante C. Dus

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ &= F(b) + C - F(a) - C \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Belangrijk!!

Een onbepaalde integraal $\int f(x)dx$ is een *verzameling functies* $F(x) + C$, waarbij C alle reële getallen doorloopt.

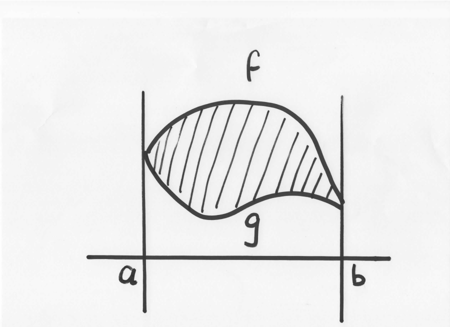
In de uitkomst van een onbepaalde integraal moet er een integratieconstante C bij.

Een bepaalde integraal $\int_a^b f(x)dx$ is een *getal*.

In de uitkomst van een bepaalde integraal moet er **geen** integratieconstante C bij.

We bekijken nu de oppervlaktes van gebieden ingesloten door de grafieken van twee functies.

Oppervlaktes van gebieden

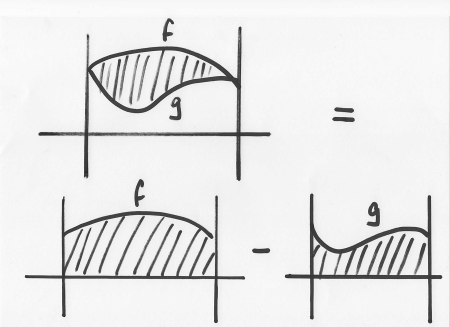


Gegeven zijn twee continue functies f en g zodat $f(x)$ en $g(x)$ gelijk zijn voor $x = a$ en $x = b$ en $f(x) \geq g(x)$ voor $a \leq x \leq b$.

Dan is de oppervlakte van het gebied tussen de grafieken van f en g gelijk aan

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Bewijs (I)

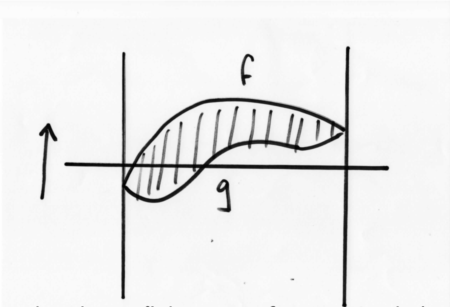


We nemen voorlopig aan dat de grafieken van f en g beide helemaal boven de x-as liggen.

Volgens het plaatje is de oppervlakte van het gebied tussen de grafieken van f en g dan gelijk aan

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

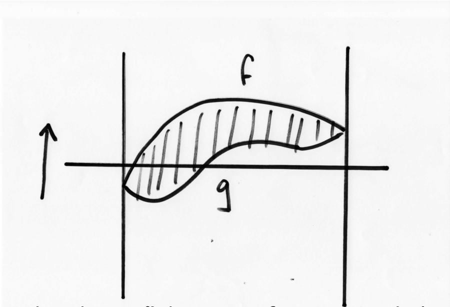
Bewijs (II)



We nemen nu aan dat de grafieken van f en g niet helemaal boven de x-as liggen.

We schuiven het gebied tussen de grafieken van f en g zover omhoog dat de grafieken van f en g helemaal boven de x-as komen te liggen.

Bewijs (II)



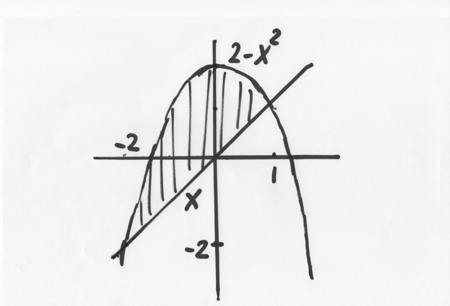
We nemen nu aan dat de grafieken van f en g niet helemaal boven de x-as liggen.

We schuiven het gebied tussen de grafieken van f en g zover omhoog dat de grafieken van f en g helemaal boven de x-as komen te liggen.

Door die verschuiving verandert $f(x) - g(x)$ (dat is de afstand tussen $f(x)$ en $g(x)$) niet en verandert de oppervlakte van het gebied niet.

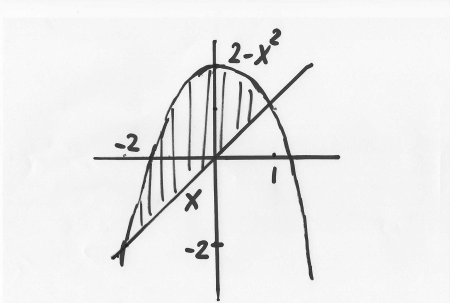
Dus we vinden weer dat de oppervlakte van het gebied tussen de grafieken van f en g gelijk is aan $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Voorbeeld



We bepalen de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken van $f(x) = 2 - x^2$ en $g(x) = x$.

Voorbeeld



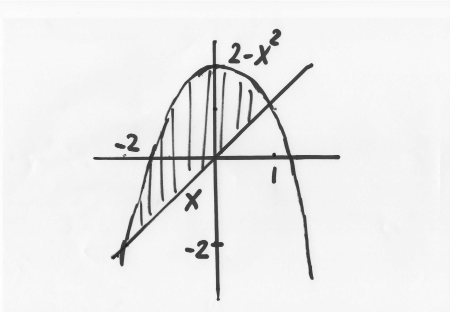
We bepalen de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafieken van $f(x) = 2 - x^2$ en $g(x) = x$.

We bepalen eerste de snijpunten van de grafieken van f en g. Deze kunnen worden bepaald door $f(x)$ en $g(x)$ gelijk te stellen:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 2 - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ of } x = -2. \end{aligned}$$

Op $[-2, 1]$ is $2 - x^2 \geq x$.

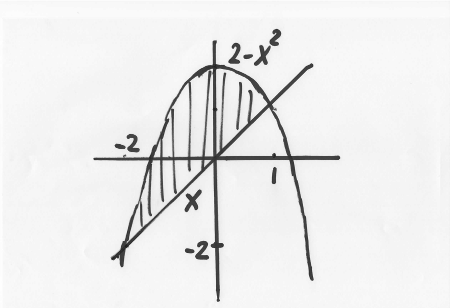
Voorbeeld



De oppervlakte van het gebied tussen de grafieken van $f(x) = 2 - x^2$ en $g(x) = x$ is

$$\int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)dx = \big[F(x)\big]_{-2}^{1} = F(1) - F(-2), \quad F(x) = 2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Voorbeeld



De oppervlakte van het gebied tussen de grafieken van $f(x) = 2 - x^2$ en $g(x) = x$ is

$$\int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = \left[F(x)\right]_{-2}^{1} = F(1) - F(-2), \quad F(x) = 2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Er geldt $F(1) = 2 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$,

$$F(-2) = 2 \cdot (-2) - \tfrac{1}{3}(-2)^3 - \tfrac{1}{2}(-2)^2 = -4 - (-\tfrac{8}{3}) - 2 = -\tfrac{10}{3},$$

dus de oppervlakte is $\int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$.