CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

10e college: Reeksen (oneindige sommen) 1

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Limieten van rijen

Met een **rij** bedoelen we een oneindige rij reële getallen $a_0, a_1, \ldots$, ook wel genoteerd als $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

We kunnen ook met een andere index beginnen, bijvoorbeeld $a_1, a_2, \ldots$ geven we aan als $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Wanneer de beginindex niet van belang is schrijven we wel $\{a_n\}$.
In plaats van de letter n mag je ook iets anders gebruiken, bijvoorbeeld $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Limieten van rijen

Met een **rij** bedoelen we een oneindige rij reële getallen $a_0, a_1, \ldots$, ook wel genoteerd als $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

We kunnen ook met een andere index beginnen, bijvoorbeeld $a_1, a_2, \ldots$ geven we aan als $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Wanneer de beginindex niet van belang is schrijven we wel $\{a_n\}$.
In plaats van de letter n mag je ook iets anders gebruiken, bijvoorbeeld $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

We schrijven $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ (ℓ eindig getal) (limiet voor n gaat naar ∞ van a_n is ℓ) als a_n steeds dichter naar ℓ nadert wanneer n steeds groter wordt.

We schrijven $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ als voor elke $B > 0$ geldt dat $a_n \geq B$ vanaf zekere n.

We schrijven $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ als voor elke $B > 0$ geldt dat $a_n \leq -B$ vanaf zekere n.

Voorbeeld. $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$ want $\ln n \geq B$ voor alle $n \geq e^B$.

Convergentie en divergentie van rijen

We zeggen dat de rij $\{a_n\}$ **convergent** is of **convergeert** als $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat en eindig is (d.w.z. niet gelijk aan $\pm\infty$).

We zeggen dat $\{a_n\}$ **divergent** is of **divergeert** als $\lim_{n\to\infty} a_n$ gelijk is aan $\pm\infty$ of als de limiet niet bestaat.

Convergentie en divergentie van rijen

We zeggen dat de rij $\{a_n\}$ **convergent** is of **convergeert** als $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat en eindig is (d.w.z. niet gelijk aan $\pm\infty$).

We zeggen dat $\{a_n\}$ **divergent** is of **divergeert** als $\lim_{n\to\infty} a_n$ gelijk is aan $\pm\infty$ of als de limiet niet bestaat.

Voorbeeld 1. Voor de rij $\left\{\frac{n^2+1}{3n^2-7}\right\}$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-7n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{-2}}{3-7n^{-1}} = \frac{1}{3}.$$

(we hebben teller en noemer door n^2, de snelst groeiende term van de noemer gedeeld). Dus deze rij is convergent.

Convergentie en divergentie van rijen

We zeggen dat de rij $\{a_n\}$ **convergent** is of **convergeert** als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bestaat en eindig is (d.w.z. niet gelijk aan $\pm\infty$).

We zeggen dat $\{a_n\}$ **divergent** is of **divergeert** als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gelijk is aan $\pm\infty$ of als de limiet niet bestaat.

Voorbeeld 1. Voor de rij $\left\{\frac{n^2+1}{3n^2-7}\right\}$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-7n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{-2}}{3-7n^{-1}} = \frac{1}{3}.$$

(we hebben teller en noemer door n^2, de snelst groeiende term van de noemer gedeeld). Dus deze rij is convergent.

Voorbeeld 2. Voor de rij $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty} = 1, -1, 1, -1, \ldots$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \ \text{ bestaat niet.}$$

Namelijk de termen van de rij zijn afwisselend 1 en -1 dus ze naderen niet allemaal naar een limietwaarde als n naar oneindig gaat. Dus deze rij is divergent.

Exponentiële rijen

$$\text{Er geldt: } \lim_{n\to\infty} r^n \begin{cases} = 0 & \text{als } -1 < r < 1, \\ = 1 & \text{als } r = 1 \\ = \infty & \text{als } r > 1 \\ \text{bestaat niet} & \text{als } r \leq -1. \end{cases}$$

Dus de rij $\{r^n\}$ is convergent als $-1 < r \leq 1$ en divergent als $r > 1$ of $r \leq -1$.

Exponentiële rijen

$$\text{Er geldt:}\quad \lim_{n\to\infty} r^n \begin{cases} = 0 & \text{als } -1 < r < 1, \\ = 1 & \text{als } r = 1 \\ = \infty & \text{als } r > 1 \\ \text{bestaat niet} & \text{als } r \leq -1. \end{cases}$$

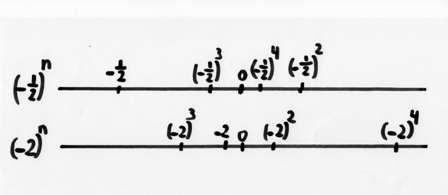
Dus de rij $\{r^n\}$ is convergent als $-1 < r \leq 1$ en divergent als $r > 1$ of $r \leq -1$.

Voor $r \geq 0$ is dit niet moeilijk in te zien.

Als $-1 < r < 0$ dan nadert de absolute waarde $|r^n| = |r|^n$ naar 0, dus r^n zelf nadert naar 0.

Als $r = -1$ dan is $r^n = (-1)^n$. Dit geval hebben we gezien.

Als $r < -1$ dan gaat r^n voor even n naar ∞ en voor oneven n naar $-\infty$. Dus de limiet van $\{r^n\}$ is noch ∞, noch $-\infty$, m.a.w. hij bestaat niet.



Rekenregels voor limieten van rijen

Zijn $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ twee rijen met $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\lim_{n\to\infty} b_n = m$ waarbij ℓ en m eindig zijn. Dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \ell + m,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \ell - m,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \ell \cdot m,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m} \quad (\text{mits } m \neq 0),$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \ell^m \quad (\text{mits } \ell^m \text{ is gedefinieerd}).$$

Rekenregels voor limieten van rijen

Zijn $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ twee rijen met $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\lim_{n\to\infty} b_n = m$ waarbij ℓ en m eindig zijn. Dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \ell + m,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \ell - m,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \ell \cdot m,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m} \quad (\text{mits } m \neq 0),$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \ell^m \quad (\text{mits } \ell^m \text{ is gedefinieerd}).$$

Zij f een functie met $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ en $\{a_n\}$ een rij met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dan is $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

Als in het bijzonder f continu is in a, d.w.z. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, dan is $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

Voorbeeld

We berekenen $\lim_{n\to\infty} (-2)^n \sin((-2)^{-n})$.

Voorbeeld

We berekenen $\lim_{n\to\infty}(-2)^n \sin((-2)^{-n})$.

We kunnen $(-2)^n \sin((-2)^{-n})$ schrijven als $\frac{\sin((-2)^{-n})}{(-2)^{-n}}$.
Er geldt $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (Continue wiskunde 1, regel van L'Hôpital) en $\lim_{n\to\infty}(-2)^{-n} = \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^n = 0$. Dus

$$\lim_{n\to\infty}(-2)^n \sin((-2)^{-n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin((-2)^{-n})}{(-2)^{-n}} = 1.$$

We gaan verder met reeksen (oneindige sommen).

Eindige sommen

We voeren de volgende som-notatie in:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q.$$

We noemen n de **sommatie-index.**
Je mag in plaats van n ook iets anders gebruiken, bijvoorbeeld i, j, k, l, m worden veel als sommatie-indices gebruikt.

Eindige sommen

We voeren de volgende som-notatie in:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q.$$

We noemen n de **sommatie-index.**
Je mag in plaats van n ook iets anders gebruiken, bijvoorbeeld i, j, k, l, m worden veel als sommatie-indices gebruikt.

Voorbeelden.

$$\sum_{n=-7}^{89} n^3 = (-7)^3 + (-6)^3 + \cdots + 88^3 + 89^3,$$

Eindige sommen

We voeren de volgende som-notatie in:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q.$$

We noemen n de **sommatie-index.**
Je mag in plaats van n ook iets anders gebruiken, bijvoorbeeld i, j, k, l, m worden veel als sommatie-indices gebruikt.

Voorbeelden.

$$\sum_{n=-7}^{89} n^3 = (-7)^3 + (-6)^3 + \cdots + 88^3 + 89^3,$$

$$\sum_{n=p}^{q} 1 = q - p + 1.$$

We sommeren over $n = p, p+1, \ldots, q$, dat zijn in totaal $q - p + 1$ termen. Elke term is gelijk aan 1, dus de som is $q - p + 1$.

Reeksen (oneindige sommen)

We willen een definitie geven voor de reeks (= oneindige som)
$\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots$ (met p een willekeurige beginindex).
Hoe doen we dit?

Reeksen (oneindige sommen)

We willen een definitie geven voor de reeks (= oneindige som)
$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots$ (met p een willekeurige beginindex).
Hoe doen we dit?

Voorbeeld. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = 0,3333\ldots = \frac{1}{3}.$

Reeksen (oneindige sommen)

We willen een definitie geven voor de reeks (= oneindige som) $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots$ (met p een willekeurige beginindex).
Hoe doen we dit?

Voorbeeld. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = 0,3333\ldots = \frac{1}{3}$.

Maar bekijk dit eens:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n &= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\ &= (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0 \end{aligned}$$

Reeksen (oneindige sommen)

We willen een definitie geven voor de reeks (= oneindige som) $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots$ (met p een willekeurige beginindex).
Hoe doen we dit?

Voorbeeld. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = 0,3333\ldots = \frac{1}{3}$.

Maar bekijk dit eens:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n &= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\
&= (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0 \\
&= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 \text{ ???}
\end{aligned}$$

Reeksen (oneindige sommen)

We willen een definitie geven voor de reeks (= oneindige som) $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots$ (met p een willekeurige beginindex).
Hoe doen we dit?

Voorbeeld. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = 0,3333\ldots = \frac{1}{3}$.

Maar bekijk dit eens:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n &= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\
&= (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0 \\
&= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 \text{ ???}
\end{aligned}$$

Wiskundige oplossing: iets wat meer dan één antwoord heeft is niet gedefinieerd.

Definitie van een reeks

We definiëren $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots$ als volgt.
Beschouw de **partiële sommen**

$$\begin{aligned}
s_p &= a_p, \\
s_{p+1} &= a_p + a_{p+1} \\
s_{p+2} &= a_p + a_{p+1} + a_{p+2} \\
&\vdots \\
s_K &= a_p + a_{p+1} + \cdots + a_K = \sum_{n=p}^{K} a_n.
\end{aligned}$$

Dan is

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n := \lim_{K\to\infty} s_K = \lim_{K\to\infty} \sum_{n=p}^{K} a_n$$

mits de limiet bestaat; als de limiet niet bestaat zeggen we dat de reeks niet is gedefinieerd.

Convergentie en divergentie van reeksen

We definiëren

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n := \lim_{K\to\infty} s_K = \lim_{K\to\infty} \sum_{n=p}^{K} a_n$$

mits de limiet bestaat.

We zeggen dat $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ **convergent** is/convergeert, als $\lim_{K\to\infty} s_K$ bestaat en $\neq \pm\infty$ is.

We zeggen dat $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ **divergent** is/divergeert, als $\lim_{K\to\infty} s_K$ niet bestaat of gelijk is aan $\pm\infty$.

Voorbeeld 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Voorbeeld 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

De partiële sommen zijn
$s_0 = 1$, $s_1 = 1 - 1 = 0$, $s_2 = 1 - 1 + 1 = 1$, $s_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \ldots$.
met andere woorden, de rij partiële sommen is $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$.

De limiet van deze rij bestaat niet, dus $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ is niet gedefiniëerd.

Voorbeeld 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots.$$

Voorbeeld 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots.$$

We berekenen de partiële sommen

$s_K = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(K-1)K} + \frac{1}{K(K+1)}$ en kijken of s_K naar een limiet convergeert.

Voorbeeld 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots.$$

We berekenen de partiële sommen

$s_K = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(K-1)K} + \frac{1}{K(K+1)}$ en kijken of s_K naar een limiet convergeert.

Er geldt:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},\ \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{(K-1)K} = \frac{1}{K-1} - \frac{1}{K},\ \frac{1}{K(K+1)} = \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } s_K &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(K-1)K} + \frac{1}{K(K+1)} \\ &= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{K-1} - \tfrac{1}{K}\right) + \left(\tfrac{1}{K} - \tfrac{1}{K+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{K+1}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{K \to \infty} s_K = 1.$

Weglaten of toevoegen van termen

Voor de convergentie of divergentie van een reeks $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ maakt het niet uit als we een eindig aantal termen weglaten of een eindig aantal termen toevoegen.

Namelijk $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \lim_{K \to \infty} s_K$ waarbij $s_K = a_p + \cdots + a_K$.
De reeks is convergent als $\lim_{K \to \infty} s_K$ bestaat en eindig is.

Haal bijvoorbeeld de eerste 100 termen van de reeks weg, dat wil zeggen bekijk $\sum_{n=p+100}^{\infty} a_n$.

Dan beginnen alle partiële sommen met a_{p+100} in plaats van a_p, met andere woorden, we trekken van alle partiële sommen $a_p + \cdots + a_{p+99}$ af.

Als we van alle termen van een rij hetzelfde getal aftrekken dan heeft dit geen invloed op het al of niet bestaan of eindig zijn van de limiet van de rij.

Rekenregels

Met convergente reeksen kun je op dezelfde manier rekenen als met eindige sommen:

Gegeven zijn convergente reeksen $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ en twee reële getallen C en D.

Dan is $\sum_{n=p}^{\infty}(Ca_n + Db_n)$ convergent en gelijk aan $C\sum_{n=0}^{\infty} a_n + D\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Eindige sommen van meetkundige rijen

Bekijk de meetkundige rij $1, r, r^2, \ldots, r^K$. Dan geldt:

Stelling

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^K = \begin{cases} \frac{1-r^K}{1-r} & \textit{als } r \neq 1, \\ K+1 & \textit{als } r = 1. \end{cases}$$

Eindige sommen van meetkundige rijen

Bekijk de meetkundige rij $1, r, r^2, \ldots, r^K$. Dan geldt:

Stelling

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^K = \begin{cases} \frac{1-r^K}{1-r} & \text{als } r \neq 1, \\ K+1 & \text{als } r = 1. \end{cases}$$

Bewijs. Voor $r = 1$ is dit duidelijk, we tellen $K + 1$ keer 1 op.

Eindige sommen van meetkundige rijen

Bekijk de meetkundige rij $1, r, r^2, \ldots, r^K$. Dan geldt:

Stelling

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^K = \begin{cases} \frac{1-r^K}{1-r} & \textit{als } r \neq 1, \\ K+1 & \textit{als } r = 1. \end{cases}$$

Bewijs. Voor $r = 1$ is dit duidelijk, we tellen $K + 1$ keer 1 op.

Laat nu $r \neq 1$. Noem $1 + r + r^2 + \cdots + r^K$ even S. Dan is $rS = r + r^2 + \cdots + r^K + r^{K+1}$. Dus

$$\begin{aligned} (1-r)S = S - rS &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^K \\ &\qquad -r - r^2 - \cdots - r^K - r^{K+1} \\ &= 1 - r^{K+1}. \end{aligned}$$

Dit geeft $S = \frac{1-r^{K+1}}{1-r}$.

Meetkundige reeksen

Stelling

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \textit{als } -1 < r < 1, \\ \infty & \textit{als } r \geq 1, \\ \textit{niet gedefinieerd} & \textit{als } r \leq -1. \end{cases}$$

Meetkundige reeksen

Stelling

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \textit{als } -1 < r < 1, \\ \infty & \textit{als } r \geq 1, \\ \textit{niet gedefinieerd} & \textit{als } r \leq -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Bewijs voor het geval $r \geq 1$.

In dit geval geldt $r^n \geq 1$ voor alle n. Dus zeker $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \infty$.

Meetkundige reeksen

Stelling

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \textit{als } -1 < r < 1, \\ \infty & \textit{als } r \geq 1, \\ \textit{niet gedefinieerd} & \textit{als } r \leq -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Bewijs voor het geval $-1 < r < 1$.

In dit geval geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{K\to\infty}(1 + r + r^2 + \cdots + r^K) = \lim_{K\to\infty} \frac{1-r^{K+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

omdat $\lim\limits_{K\to\infty} r^{K+1} = 0$.

Meetkundige reeksen

Stelling

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \textit{als } -1 < r < 1, \\ \infty & \textit{als } r \geq 1, \\ \textit{niet gedefinieerd} & \textit{als } r \leq -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Bewijs voor het geval $r \leq -1$.

In dit geval geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{K\to\infty} (1 + r + r^2 + \cdots + r^K) = \lim_{K\to\infty} \frac{1-r^{K+1}}{1-r}$$

mits de laatste limiet bestaat. Maar deze laatste limiet bestaat niet omdat we al eerder hebben gezien dat $\lim_{K\to\infty} r^{K+1}$ niet bestaat.

Voorbeeld 1

Bereken $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Voorbeeld 1

Bereken $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Er geldt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \cdots \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{1-(2/3)} = \frac{2^5}{3^5} \cdot 3 = \frac{2^5}{3^4} = \frac{32}{81}.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Bereken $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Er geldt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^n &= \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^7 + \cdots \\
&= \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 \Big(1 + \tfrac{2}{3} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \cdots\Big) \\
&= \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 \cdot \tfrac{1}{1-(2/3)} = \tfrac{2^5}{3^5} \cdot 3 = \tfrac{2^5}{3^4} = \tfrac{32}{81}.
\end{aligned}$$

Opmerking. Algemeen geldt voor $-1 < r < 1$:

$$\sum_{n=p}^{\infty} r^n = r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots = r^p(1 + r + r^2 + \cdots) = \tfrac{r^p}{1-r}.$$

Voorbeeld 2

Bereken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\times 4^n + 5\times(-6)^n}{7^n}$.

Voorbeeld 2

Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\times 4^n + 5\times(-6)^n}{7^n}$.

Er geldt
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\times 4^n + 5\times(-6)^n}{7^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(3\times\frac{4^n}{7^n} + 5\times\frac{(-6)^n}{7^n}\right)\\ &= 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{4}{7}\right)^n + 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{6}{7}\right)^n.\end{aligned}$$

Verder

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{4}{7}\right)^n = \frac{1}{1-(4/7)} = \frac{7}{3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{6}{7}\right)^n = \frac{1}{1+(6/7)} = \frac{7}{13}.$$

Dus

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\times 4^n + 5\times(-6)^n}{7^n} &= 3\times\frac{7}{3} + 5\times\frac{7}{13} = 7 + \frac{35}{13} = 7 + 2\frac{9}{13}\\ &= 9\frac{9}{13}.\end{aligned}$$

EINDE VAN HET COLLEGE