CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

11e college: Reeksen 2

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Convergentie en divergentie van reeksen

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \lim_{K \to \infty} (a_p + a_{p+1} + \cdots + a_K) \text{ is}$$

- **convergent** als de limiet bestaat en eindig is,
- **divergent** als de limiet niet bestaat of gelijk is aan $\pm\infty$.

Convergentie en divergentie van reeksen

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \lim_{K \to \infty} (a_p + a_{p+1} + \cdots + a_K) \text{ is}$$

- **convergent** als de limiet bestaat en eindig is,
- **divergent** als de limiet niet bestaat of gelijk is aan $\pm\infty$.

Moeilijk probleem: hoe bepalen we voor een gegeven reeks of die convergeert of divergeert?

Er is jammer genoeg geen methode om dit te bepalen die voor **alle** reeksen werkt.

Er zijn verschillende zogenaamde **convergentiekenmerken** die voor bepaalde types reeksen uitsluitsel geven of ze convergeren of divergeren.

Een ander probleem is om voor een gegeven reeks het goede convergentiekenmerk te vinden.

Een divergentiekenmerk

Neem aan dat $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergeert. Dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Een divergentiekenmerk

Neem aan dat $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergeert. Dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bewijs. Schrijf $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = s$. De convergentie van de reeks betekent dat s eindig is. Volgens definitie is s de limiet van de rij partiële sommen $s_K = a_p + \cdots + a_K$ voor $K \to \infty$.
Dan heeft de rij $s_{K-1} = a_p + \cdots + a_{K-1}$ ook limiet s. Dus

$$\lim_{K\to\infty} a_K = \lim_{K\to\infty} (s_K - s_{K-1}) = \lim_{K\to\infty} s_K - \lim_{K\to\infty} s_{K-1} = s - s = 0.$$

Een divergentiekenmerk

Neem aan dat $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergeert. Dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bewijs. Schrijf $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = s$. De convergentie van de reeks betekent dat s eindig is. Volgens definitie is s de limiet van de rij partiële sommen
$s_K = a_p + \cdots + a_K$ voor $K \to \infty$.
Dan heeft de rij $s_{K-1} = a_p + \cdots + a_{K-1}$ ook limiet s. Dus

$$\lim_{K\to\infty} a_K = \lim_{K\to\infty} (s_K - s_{K-1}) = \lim_{K\to\infty} s_K - \lim_{K\to\infty} s_{K-1} = s - s = 0.$$

Vanwege het logische principe $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ geeft dit het volgende

Divergentiekenmerk

Als $\lim_{n\to\infty} a_n$ ongelijk is aan 0 of niet bestaat, dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

Wat als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

We hebben gezien: als $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergeert dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Het omgekeerde geldt **niet**: als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dan hebben we geen uitsluitsel of $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergeert of divergeert.

Wat als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

We hebben gezien: als $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ convergeert dan is $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Het omgekeerde geldt **niet**: als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ dan hebben we geen uitsluitsel of $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ convergeert of divergeert.

Voorbeeld. De harmonische reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Er geldt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{\geq 4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\geq 8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \cdots$$

De som van de volgende 16 termen $\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}$ is $\geq \frac{1}{2}$, de som van de daaropvolgende 32 termen is $\geq \frac{1}{2}$ enzovoort.

Dus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \infty \cdot \frac{1}{2} = \infty$.

Wat als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

Aan de andere kant geldt bijvoorbeeld dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert. Preciezer gezegd,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(Leonhard Euler, 1707-1783).}$$

Wat als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

Aan de andere kant geldt bijvoorbeeld dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert. Preciezer gezegd,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(Leonhard Euler, 1707-1783).}$$

Als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dan is er nog geen uitsluitsel of $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergeert of niet. $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergeert als a_n te langzaam naar 0 nadert.

Convergentiekenmerken voor reeksen met termen ≥ 0

In het vervolg van het college bekijken we alleen reeksen $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ waarvoor alle $a_n \geq 0$.

Voor zulke reeksen bestaat $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \lim_{K\to\infty}(a_p + \cdots + a_K)$ altijd maar de uitkomst kan ∞ zijn. Dus

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ convergent} \Leftrightarrow \sum_{n=p}^{\infty} a_n < \infty; \quad \sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ divergent} \Leftrightarrow \sum_{n=p}^{\infty} a_n = \infty.$$

Het integraalkenmerk

Het integraalkenmerk geeft een verband tussen convergentie (al of niet eindig zijn) van reeksen en convergentie (al of niet eindig zijn) van oneigenlijke integralen.

In een aantal gevallen kun je de integraal uitrekenen en op die manier nagaan of de reeks convergeert of divergeert.

Het integraalkenmerk

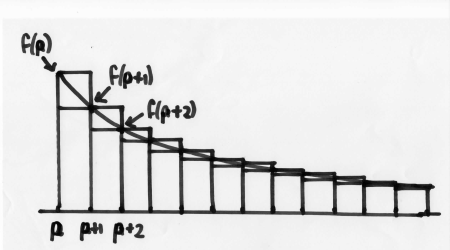
Het integraalkenmerk geeft een verband tussen convergentie (al of niet eindig zijn) van reeksen en convergentie (al of niet eindig zijn) van oneigenlijke integralen.

In een aantal gevallen kun je de integraal uitrekenen en op die manier nagaan of de reeks convergeert of divergeert.

Zij p een geheel getal en $f(x)$ een functie die op $[p, \infty)$ continu, monotoon niet-stijgend en ≥ 0 is. Dan geldt:

$$\sum_{n=p}^{\infty} f(n) \text{ convergent} \Leftrightarrow \int_{p}^{\infty} f(x)dx \text{ convergent.}$$

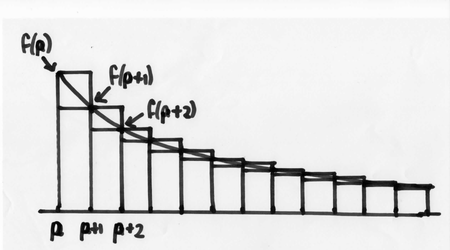
Het integraalkenmerk



Zij p een geheel getal en $f(x)$ een functie die op $[p, \infty)$ continu, monotoon niet-stijgend en ≥ 0 is. Dan geldt:

$$\sum_{n=p}^{\infty} f(n) \text{ convergent} \Leftrightarrow \int_p^{\infty} f(x)dx \text{ convergent.}$$

Het integraalkenmerk



Zij p een geheel getal en $f(x)$ een functie die op $[p, \infty)$ continu, monotoon niet-stijgend en ≥ 0 is. Dan geldt:

$$\sum_{n=p}^{\infty} f(n) \text{ convergent} \Leftrightarrow \int_p^{\infty} f(x)dx \text{ convergent.}$$

Bewijs. Er geldt:
som van de oppervlaktes van de rechthoekjes onder de grafiek van f
$\leq$ oppervlakte onder de grafiek van f
$\leq$ som van de oppervlaktes van de rechthoekjes boven de grafiek van f

ofwel $f(p+1) + f(p+2) + \cdots \leq \int_p^{\infty} f(x)dx \leq f(p) + f(p+1) + \cdots$

Het integraalkenmerk

Zij p een geheel getal en $f(x)$ een functie die op $[p, \infty)$ continu, monotoon niet-stijgend en ≥ 0 is. Dan geldt:

$$\sum_{n=p}^{\infty} f(n) \text{ convergent} \Leftrightarrow \int_p^{\infty} f(x)dx \text{ convergent.}$$

Vervolg bewijs. We hebben gezien:

$$f(p+1) + f(p+2) + \cdots \leq \int_p^{\infty} f(x)dx \leq f(p) + f(p+1) + \cdots$$

ofwel $\left(\sum_{n=p}^{\infty} f(n)\right) - f(p) \leq \int_p^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n).$

Dus $\sum_{n=p}^{\infty} f(n) < \infty$ (d.w.z. convergent) $\Leftrightarrow \int_p^{\infty} f(x)dx < \infty.$

Voorbeeld 1

Voor welke s convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ en voor welke s divergeert hij?

Voorbeeld 1

Voor welke s convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ en voor welke s divergeert hij?

We weten: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} x^{-s} dx$ convergeert.

Voorbeeld 1

Voor welke s convergeert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ en voor welke s divergeert hij?

We weten: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert $\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^{\infty} x^{-s} dx$ convergeert.

Er geldt:

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^{B} x^{-s} dx \\
&= \lim_{B\to\infty} \left[\tfrac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_1^B = \lim_{B\to\infty} \tfrac{1}{1-s}(B^{1-s}-1) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} < \infty & \text{als } s > 1, \\ \infty & \text{als } s < 1. \end{cases} \\
&= \lim_{B\to\infty} \left[\ln x\right]_1^B = \lim_{B\to\infty} \ln B = \infty \text{ als } s = 1.
\end{aligned}$$

Dus $\int_1^{\infty} x^{-s} dx$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$.

Voorbeeld 1

Voor welke s convergeert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ en voor welke s divergeert hij?

We weten: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert $\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^{\infty} x^{-s}dx$ convergeert.

Er geldt:

$$\int_1^{\infty} x^{-s}dx = \lim_{B\to\infty}\int_1^{B} x^{-s}dx$$

$$= \lim_{B\to\infty}\left[\tfrac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^B = \lim_{B\to\infty}\tfrac{1}{1-s}(B^{1-s}-1) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} < \infty & \text{als } s > 1, \\ \infty & \text{als } s < 1. \end{cases}$$

$$= \lim_{B\to\infty}\left[\ln x\right]_1^B = \lim_{B\to\infty}\ln B = \infty \text{ als } s = 1.$$

Dus $\int_1^{\infty} x^{-s}dx$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$.

Dus $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$.

Voorbeeld 2

Convergeert of divergeert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$?

Voorbeeld 2

Convergeert of divergeert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$?

We weten $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ convergeert $\Leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ convergeert.

Voorbeeld 2

Convergeert of divergeert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$?

We weten $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ convergeert $\Leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ convergeert.

Er geldt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int u^{-1} du \quad (\text{substitutie } u = \ln x,\ du = \tfrac{1}{x} dx) \\ &= \ln u + C = \ln \ln x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{B \to \infty} \int_2^{B} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= \lim_{B \to \infty} \big[\ln \ln x \big]_2^B = \lim_{B \to \infty} (\ln \ln B - \ln \ln 2) = \infty \quad \text{is divergent.} \end{aligned}$$

Dus $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ is divergent.

We vervolgen met het vergelijkingskenmerk

Het vergelijkingskenmerk

Neem aan dat we van een bepaalde 'makkelijke' reeks $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ met $b_n \geq 0$ weten of hij convergeert of divergeert.

We willen van een 'moeilijke' reeks $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ met $a_n \geq 0$ bepalen of hij convergeert door a_n met b_n te vergelijken.

Het vergelijkingskenmerk

Neem aan dat we van een bepaalde 'makkelijke' reeks $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ met $b_n \geq 0$ weten of hij convergeert of divergeert.

We willen van een 'moeilijke' reeks $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ met $a_n \geq 0$ bepalen of hij convergeert door a_n met b_n te vergelijken.

Bij 'makkelijke' reeksen moet je denken aan
$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ (convergent als $s > 1$ en divergent als $s \leq 1$).

Het vergelijkingskenmerk

Neem aan dat we van een bepaalde 'makkelijke' reeks $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ met $b_n \geq 0$ weten of hij convergeert of divergeert.

We willen van een 'moeilijke' reeks $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ met $a_n \geq 0$ bepalen of hij convergeert door a_n met b_n te vergelijken.

Bij 'makkelijke' reeksen moet je denken aan
$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ (convergent als $s > 1$ en divergent als $s \leq 1$).

Ruw gezegd, als a_n van orde van grootte hoogstens b_n is en $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ is convergent, dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent;

als a_n van orde van grootte minstens b_n is en $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ is divergent, dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

Het vergelijkingskenmerk

Zijn $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ reeksen met $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ voor alle n.

(i) als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell < \infty$, $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ convergent dan $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent;

(ii) als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell > 0$, $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ divergent dan $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

Het vergelijkingskenmerk

Zijn $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=q}^{\infty} b_n$ reeksen met $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ voor alle n.

(i) als $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell < \infty$, $\sum\limits_{n=q}^{\infty} b_n$ convergent dan $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent;

(ii) als $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell > 0$, $\sum\limits_{n=q}^{\infty} b_n$ divergent dan $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

Als $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell < \infty$ dan is a_n van orde van grootte hoogstens b_n, dus als $\sum\limits_{n=q}^{\infty} b_n$ convergent (d.w.z. $< \infty$) is dan is $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent;

als $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell > 0$ dan is a_n van orde van grootte minstens b_n, dus als $\sum\limits_{n=q}^{\infty} b_n$ divergent (d.w.z. ∞) is dan is $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

Voorbeeld 1

Is $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ convergent of divergent?

Voorbeeld 1

Is $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ convergent of divergent?

We willen het vergelijkingskenmerk toepassen met $a_n = \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ en met een 'eenvoudige' b_n van dezelfde orde van grootte waarvan we weten of $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ convergeert of divergeert.

We proberen iets van de vorm $b_n = n^{-s}$. We weten dat $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$.

Voorbeeld 1

Is $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ convergent of divergent?

We willen het vergelijkingskenmerk toepassen met $a_n = \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ en met een 'eenvoudige' b_n van dezelfde orde van grootte waarvan we weten of $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ convergeert of divergeert.

We proberen iets van de vorm $b_n = n^{-s}$. We weten dat $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$.

De teller van a_n is van orde van grootte n^{11} (hoogste macht van n, als n groot wordt is n^{11} de dominante term) en de noemer van a_n van orde van grootte n^{13}.

Dus a_n zelf is van orde van grootte $n^{11-13} = n^{-2}$.

We vergelijken a_n met $b_n = n^{-2}$.

Voorbeeld 1

Is $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ convergent of divergent?

We vergelijken $a_n = \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ met $b_n = n^{-2}$.

Voorbeeld 1

Is $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ convergent of divergent?

We vergelijken $a_n = \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ met $b_n = n^{-2}$.

Er geldt

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(5n^{11}+17n^{10})/(n^{13}-1)}{n^{-2}} = \frac{(5n^{11}+17n^{10})n^2}{n^{13}-1} = \frac{5n^{13}+17n^{12}}{n^{13}-1}.$$

Als we teller en noemer door de snelstgroeiende term van de noemer, dat is n^{13} delen krijgen we

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+17n^{-1}}{1-n^{-13}} = 5.$$

Zoals bekend is $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ convergent.

Volgens het vergelijkingskenmerk (i) is $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n^{11}+17n^{10}}{n^{13}-1}$ convergent.

Voorbeeld 2

Is $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ convergent of divergent?

Voorbeeld 2

Is $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ convergent of divergent?

We hebben in Continue wiskunde 1 gezien dat $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^t}{n^s} = 0$ voor elke $t > 0, s > 0$. Dus voor $a_n = \frac{1}{\ln n}$, $b_n = \frac{1}{n^s}$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\ln n}{1/n^s} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{\ln n} = \infty \text{ voor alle } s > 0.$$

Zoals bekend is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ divergent voor $0 < s < 1$.

Dan is volgens vergelijkingskenmerk (ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ook divergent.

Voorbeeld 3

Is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{1000}}{n^2}$ convergent of divergent?

Voorbeeld 3

Is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{1000}}{n^2}$ convergent of divergent?

We weten dat $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^t}{n^s} = 0$ voor elke $t > 0, s > 0$.

Dus $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{1000}/n^2}{n^{s-2}} = 0$ voor elke $s > 0$.

M.a.w. voor $a_n = \frac{(\ln n)^{1000}}{n^2}$ en $b_n = n^{s-2}$ geldt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

We weten dat $\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-2}$ convergeert als $s - 2 < -1$ dus als $s < 1$.

Dan is volgens vergelijkingskenmerk (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{1000}}{n^2}$ ook convergent.

EINDE VAN HET COLLEGE