CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

12e college: Reeksen 3

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Het quotiëntkenmerk

Het quotiëntkenmerk kan worden gebruikt voor reeksen $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ waarbij a_n ook negatief mag zijn.

(i) Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent.

(ii) Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

(iii) Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ of niet bestaat dan geeft dit criterium geen uitsluitsel.

Dit kenmerk is vooral nuttig wanneer in a_n exponentiële functies (bijvoorbeeld c^n, n^n) of faculteiten (bijvoorbeeld $n!$) voorkomen.

Het quotiëntkenmerk

(i) Als $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ dan is $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent.

(ii) Als $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ dan is $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

(iii) Als $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ of niet bestaat dan geeft dit criterium geen uitsluitsel.

Idee van bewijs van (i). We bekijken alleen het geval dat alle $a_n \geq 0$. Neem aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$.

Dan is wanneer n voldoende groot is, zeg $\geq n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \ell$, dus $a_{n+1} \approx a_n \ell$. Maar dan is $a_{n_0+2} \approx a_{n_0+1}\ell \approx a_{n_0}\ell^2$, $a_{n_0+3} \approx a_{n_0}\ell^3$, enzovoort.

Dus voor $n \geq n_0$ vormen de a_n bij benadering een meetkundige rij met reden (= vermenigvuldigingsfactor) $\ell < 1$.

De som van de termen van zo'n rij is eindig.

Het quotiëntkenmerk

(i) Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent.

(ii) Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

(iii) Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ of niet bestaat dan geeft dit criterium geen uitsluitsel.

Idee van bewijs van (ii). Het divergentiecriterium zegt dat als $\lim_{n\to\infty} a_n$ ongelijk is aan 0 of niet bestaat, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Neem aan dat $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell > 1$.

Wanneer n voldoende groot is, zeg $\geq n_0$, dan is $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \approx \ell > 1$ dus zeker $|a_{n+1}| > |a_n|$.

Maar dan is $|a_{n_0}| < |a_{n_0+1}| < |a_{n_0+2}| < \cdots$ en kan $\lim_{n\to\infty} a_n$ niet gelijk zijn aan 0.

Voorbeeld 1

Is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^6}{2^n}$ convergent of divergent?

Voorbeeld 1

Is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^6}{2^n}$ convergent of divergent?

In de termen van de reeks komt een exponentiële functie voor dus we proberen het quotiëntkenmerk. We passen dit toe met $a_n = \frac{n^6}{2^n}$.

Voorbeeld 1

Is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^6}{2^n}$ convergent of divergent?

In de termen van de reeks komt een exponentiële functie voor dus we proberen het quotiëntkenmerk. We passen dit toe met $a_n = \frac{n^6}{2^n}$.

We krijgen a_{n+1} door overal n door $n+1$ te vervangen. Dit geeft $a_{n+1} = \frac{(n+1)^6}{2^{n+1}}$. Dus

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^6/2^{n+1}}{n^6/2^n} = \frac{(n+1)^6}{n^6} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^6 \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^6 \cdot \frac{1}{2}.$$

Hieruit volgt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$

Wegens het quotiëntkenmerk is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^6}{2^n}$ convergent.

Voorbeeld 2

Is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$ convergent of divergent?

Voorbeeld 2

Is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$ convergent of divergent?

In de termen van de reeks komen faculteiten voor dus we proberen weer het quotiëntkenmerk. We passen dit toe met $a_n = \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$.

Voorbeeld 2

Is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\cdot n!}{(2n)!}$ convergent of divergent?

In de termen van de reeks komen faculteiten voor dus we proberen weer het quotiëntkenmerk. We passen dit toe met $a_n = \frac{n!\cdot n!}{(2n)!}$.

Dan is $a_{n+1} = \frac{(n+1)!\cdot(n+1)!}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)!\cdot(n+1)!}{(2n+2)!}$. Dus

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\cdot(n+1)!/(2n+2)!}{n!\cdot n!/(2n)!} = \frac{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(2n)!}{n!\cdot n!\cdot(2n+2)!}.$$

Voorbeeld 2

Is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$ convergent of divergent?

In de termen van de reeks komen faculteiten voor dus we proberen weer het quotiëntkenmerk. We passen dit toe met $a_n = \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$.

Dan is $a_{n+1} = \frac{(n+1)! \cdot (n+1)!}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)! \cdot (n+1)!}{(2n+2)!}$. Dus

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot (n+1)!/(2n+2)!}{n! \cdot n!/(2n)!} = \frac{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot (2n)!}{n! \cdot n! \cdot (2n+2)!}.$$

We kunnen in teller en noemer een heleboel tegen elkaar wegstrepen:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = n+1, \quad \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdots 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Dus $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$, $\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{(1+n^{-1})(1+n^{-1})}{(2+n^{-1})(2+2n^{-1})} = \frac{1}{4} < 1$.

Wegens het quotiëntkenmerk is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$ convergent.

Voorbeeld 3

Laat zien dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergeert voor alle x.

Voorbeeld 3

Laat zien dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergeert voor alle x.

In de termen van de reeks komen zowel exponentiële functies als faculteiten voor dus we proberen weer het quotiëntkenmerk, met $a_n = \frac{x^n}{n!}$.

Voorbeeld 3

Laat zien dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergeert voor alle x.

In de termen van de reeks komen zowel exponentiële functies als faculteiten voor dus we proberen weer het quotiëntkenmerk, met $a_n = \frac{x^n}{n!}$.

Dan is $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Dus

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!} = \frac{x}{n+1}.$$

Hier hebben we gebruikt dat $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$.

Dus $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$.

Wegens het quotiëntkenmerk is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergent voor alle x.

Voorbeeld 3

Laat zien dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergeert voor alle x.

In de termen van de reeks komen zowel exponentiële functies als faculteiten voor dus we proberen weer het quotiëntkenmerk, met $a_n = \frac{x^n}{n!}$.

Dan is $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Dus

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!} = \frac{x}{n+1}.$$

Hier hebben we gebruikt dat $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n+1}$.

Dus $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$.

Wegens het quotiëntkenmerk is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergent voor alle x.

Opmerking. Er geldt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (Euler).

Machtreeksen

Een machtreeks is een reeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Het **convergentiegebied** van een machtreeks is de verzameling van x waarvoor de machtreeks convergeert.

Machtreeksen

Een machtreeks is een reeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Het **convergentiegebied** van een machtreeks is de verzameling van x waarvoor de machtreeks convergeert.

machtreeks	**convergentiegebied**
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$	$\mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$	$\mathbb{R}$

Deze identiteiten kunnen worden bewezen met behulp van de Taylorpolynomen en Lagrange-resttermen uit Continue wiskunde 1. We gaan hier niet verder op in.

Machtreeksen

Een machtreeks is een reeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Het **convergentiegebied** van een machtreeks is de verzameling van x waarvoor de machtreeks convergeert.

machtreeks	**convergentiegebied**
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$	$-1 < x < 1.$

Dit is de meetkundige reeks die we eerder hebben gezien (met r in plaats van x).

Machtreeksen

Je kan een machtreeks differentiëren en primitiveren door elke term te differentiëren en primitiveren.

Machtreeksen

Je kan een machtreeks differentiëren en primitiveren door elke term te differentiëren en primitiveren.

Voorbeeld. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ voor $-1 < x < 1$.

Als we links en rechts differentiëren dan krijgen we

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \quad \text{voor} \quad -1 < x < 1.$$

Machtreeksen

Je kan een machtreeks differentiëren en primitiveren door elke term te differentiëren en primitiveren.

Voorbeeld. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ voor $-1 < x < 1$.

Als we links en rechts differentiëren dan krijgen we

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad \text{voor} \quad -1 < x < 1.$$

Als we links en rechts primitiveren dan krijgen we

$$-\ln(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^n \quad \text{voor} \quad -1 < x < 1.$$

Met behulp van technieken die niet in dit college zijn besproken kun je bewijzen dat de identiteit ook geldt voor $x = -1$, dat wil zeggen

$$-\ln 2 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots$$

ofwel

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Overzicht van convergentiekenmerken

We willen van een reeks $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ onderzoeken of die convergent of divergent is.

We geven een overzicht van de convergentiekenmerken die we hebben behandeld en wat hints welke je wanneer moet gebruiken.

Overzicht van convergentiekenmerken

We willen van een reeks $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ onderzoeken of die convergent of divergent is.

We geven een overzicht van de convergentiekenmerken die we hebben behandeld en wat hints welke je wanneer moet gebruiken.

1) Ga eerst na of $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Zo nee, dan is de reeks divergent en zijn we snel klaar, zo ja dan is er nog geen uitsluitsel over convergentie of divergentie.

Overzicht van convergentiekenmerken

We willen van een reeks $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ onderzoeken of die convergent of divergent is.

We geven een overzicht van de convergentiekenmerken die we hebben behandeld en wat hints welke je wanneer moet gebruiken.

1) Ga eerst na of $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zo nee, dan is de reeks divergent en zijn we snel klaar, zo ja dan is er nog geen uitsluitsel over convergentie of divergentie.

2) Kijk of er een monotoon niet-stijgende continue functie $f(x)$ is die overal ≥ 0 is, zodat $a_n = f(n)$. Dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ convergent dan en slechts dan als $\int_p^{\infty} f(x)dx$ convergent is.

Dit kenmerk is vooral nuttig voor functies waarvoor de integraal kan worden uitgerekend, bijvoorbeeld $f(x) = x^{-s}$, $f(x) = \frac{1}{x\cdot(\ln x)^b}$ $(b > 0)$.

Overzicht van convergentiekenmerken

3) Neem aan dat $a_n \geq 0$ voor alle n. Kijk of a_n kan worden vergeleken met een 'eenvoudige' $b_n \geq 0$ waarvan bekend is of $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ convergeert of divergeert.

Bijvoorbeeld $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ is convergent als $s > 1$ en divergent als $s \leq 1$.

Als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ en $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ is convergent dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent;

als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ en $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ is divergent dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

Dit kenmerk is nuttig als a_n van orde van grootte zeg n^{-s} is (in geval van een breuk: bepaal dit door de hoogste macht van n in de teller te delen door de hoogste macht van n in de moemer); dan kun je a_n met $b_n = n^{-s}$ vergelijken.

Als er in a_n logaritmen voorkomen dan kun je gebruik maken van de limiet uit Continue wiskunde 1, $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0$ als $b > 0$, en ook weer a_n vergelijken met $b_n = n^{-s}$ voor geschikte s.

Overzicht van convergentiekenmerken

4) Kijk of in a_n exponentiële functies c^n of faculteiten $n!$ voorkomen. Gebruik dan het quotiëntkenmerk:

als $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ dan is $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent;

als $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ dan is $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent;

als de limiet gelijk is aan 1 of niet bestaat dan geeft het quotiëntkenmerk geen uitsluitsel.

Het quotiëntkenmerk kan ook worden toegepast om te kijken voor welke x een machtreeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergeert.

Je moet dan het quotiëntkenmerk toepassen met $a_n = c_n x^n$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ uitrekenen.

Nog een voorbeeld

Gegeven is de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^n$.

Laat zien dat deze convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| \geq 1$.

Nog een voorbeeld

Gegeven is de machtreeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^n$.

Laat zien dat deze convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| \geq 1$.

Pas het quotiëntkenmerk toe met $a_n = \frac{n}{n+1} x^n$.

Dan is $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot x^{n+1}$, dus

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}/(n+2)}{nx^n/(n+1)} = \frac{(n+1)(n+1)x^{n+1}}{n(n+2)x^n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \cdot x.$$

Dus $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n^{-1}+n^{-2}}{1+2n^{-1}} \cdot |x| = |x|$.

Het quotiëntkenmerk impliceert dat $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^n$ convergeert als $|x| < 1$ en divergeert als $|x| > 1$.

Voor $|x| = 1$ geeft het geen uitsluitsel.

Nog een voorbeeld

Gegeven is de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

We hebben gezien dat deze convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| > 1$.

We willen nog kijken naar het geval $|x| = 1$, m.a.w. $x = \pm 1$. Dat wil zeggen, we willen de reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n$ onderzoeken op convergentie.

Nog een voorbeeld

Gegeven is de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

We hebben gezien dat deze convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| > 1$.

We willen nog kijken naar het geval $|x| = 1$, m.a.w. $x = \pm 1$. Dat wil zeggen, we willen de reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n$ onderzoeken op convergentie.

We kunnen hier het divergentiekenmerk toepassen (altijd eerst proberen voordat je verder gaat).

Merk op dat $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^{-1}} = 1 \neq 0$.

Dus wegens het divergentiekenmerk is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ divergent.

Nog een voorbeeld

Gegeven is de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

We hebben gezien dat deze convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| > 1$.

We willen nog kijken naar het geval $|x| = 1$, m.a.w. $x = \pm 1$. Dat wil zeggen, we willen de reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n$ onderzoeken op convergentie.

We kunnen hier het divergentiekenmerk toepassen (altijd eerst proberen voordat je verder gaat).

Merk op dat $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^{-1}} = 1 \neq 0$.

Dus wegens het divergentiekenmerk is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ divergent.

Verder is $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n \neq 0$ omdat de absolute waarden van deze termen naar 1 naderen (je kan zelfs laten zien dat de limiet niet bestaat).

Dus wegens het divergentiekenmerk is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n$ divergent.

EINDE VAN HET COLLEGE