CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

13e college: Oud tentamen

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 2

4 april 2018, 14:00-16:00

- Op de achterzijde staan opgaven 2c,d, 3 en 4 en een lijstje met formules.
- Het gebruik van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan.
- Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of redenering.
- Vul op elk tentamenpapier **duidelijk leesbaar** je naam en collegekaartnummer in.
- Het cijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 5.

---

3 **1.** *a)* Bepaal de inhoud van het onwentelingslichaam om de x-as van het gebied begrensd door de lijnen $x = 0$, $x = 7/2$ en de grafiek van $f(x) = \sqrt{1 + \cos \pi x}$.

5 *b)* Bepaal de primitieven van $x\sqrt[3]{1 + 2x^2}$.

5 *c)* Bereken de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-3x}\,dx$.

2. Gegeven is de functie $f(x, y) = (x + 1)^3 - xy^2$.

4 *a)* Bepaal $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, en laat zien dat $(-1, 0), (0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$ de enige stationaire punten zijn van f.
Hint. $(x + 1)^3$ niet uitwerken.

4 *b)* Ga voor elk van de stationaire punten $(0, \sqrt{3})$ en $(0, -\sqrt{3})$ na of f daarin een maximum of minimum aanneemt of dat dit punt een zadelpunt is van f.

2 *c)* Laat zien dat $(-1,0)$ een zadelpunt is van f, dat wil zeggen dat f in dat punt geen maximum of minimum aanneemt (in dit punt is $H = 0$ dus het criterium met de tweede orde partiële afgeleiden geeft geen uitsluitsel. Bekijk de waarden van f met $y = 0$).

2 *d)* Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, 1, f(1,1))$.

3 **3.***a)* Schrijf $\dfrac{(1+i)^2}{2+i}$ in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

3 *b)* Schrijf $(8 - 8i)^{11}$ in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

3 *c)* Bepaal de oplossingen van $z^7 = 128i$ en schrijf die in de vorm $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$ en $\varphi \in \mathbb{R}$.

3 *d)* Bepaal de oplossingen van $e^z = 8i$ en schrijf ze in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

3 **4.***a)* Ga na of $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^k+1}$ convergeert of divergeert.

5 *b)* Ga na of $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{80}}{k!}$ convergeert of divergeert.

5 *c)* Ga na of $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5+k^{1/3}}{1+k^{3/2}}$ convergeert of divergeert. Je mag gebruiken dat $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ convergeert als $\alpha > 1$ en divergeert als $\alpha \leq 1$.

Opgave 1a

Bepaal de inhoud van het onwentelingslichaam om de x-as van het gebied begrensd door de lijnen $x = 0$, $x = 7/2$, de x-as en de grafiek van $f(x) = \sqrt{1 + \cos \pi x}$.

Opgave 1a

Bepaal de inhoud van het onwentelingslichaam om de x-as van het gebied begrensd door de lijnen $x = 0$, $x = 7/2$, de x-as en de grafiek van $f(x) = \sqrt{1 + \cos \pi x}$.

De inhoud van het omwentelingslichaam om de x-as van het gebied begrensd door $x = a$, $x = b$, de x-as en de grafiek van f is $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$.

In ons geval met $f(x) = \sqrt{1 + \cos \pi x}$, $a = 0$, $b = 7/2$ geeft dit

$$\begin{aligned}
\int_0^{7/2} \pi(1 + \cos \pi x) dx &= \left[\pi(x + \tfrac{1}{\pi} \sin \pi x)\right]_0^{7/2} = \left[\pi x + \sin \pi x\right]_0^{7/2} \\
&= \pi \tfrac{7}{2} + \sin \pi \tfrac{7}{2} - \left(\pi \cdot 0 + \sin \pi \cdot 0\right) \\
&= \tfrac{7}{2}\pi + \sin(-\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{7}{2}\pi - 1.
\end{aligned}$$

Opgave 1b

Bepaal de primitieven van $x\sqrt[3]{1+2x^2}$.

Opgave 1b

Bepaal de primitieven van $x\sqrt[3]{1+2x^2}$.

In de integrand staat $(1+2x^2)^{1/3}$.
We proberen de substitutieregel met $u = 1+2x^2$.
Dan is $du = (1+2x^2)'dx = 4xdx$, dus $xdx = \frac{1}{4}du$. Dit geeft

$$\begin{aligned} \int x\sqrt[3]{1+2x^2}dx &= \int u^{1/3} \cdot \tfrac{1}{4}du = \tfrac{3}{4}u^{4/3} \cdot \tfrac{1}{4} + C \\ &= \tfrac{3}{16}(1+2x^2)^{4/3} + C. \end{aligned}$$

Opgave 1c

Bereken de oneigenlijke integraal $\int_0^{\infty} xe^{-3x}dx$.

Opgave 1c

Bereken de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty xe^{-3x}dx$.

We bepalen eerst de primitieven van xe^{-3x}.
Bij functies van het type $x^a e^{bx}$ moet je partiële integratie proberen met $f(x) = x^a$, $g'(x) = e^{bx}$, $g(x) = b^{-1}e^{bx}$.
In ons geval moeten we dus $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-3x}$, $g(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}$ nemen.

Met de formule voor partiële integratie $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$ geeft dit

$$\begin{aligned} \int xe^{-3x}dx &= -\tfrac{1}{3}xe^{-3x} - \int(-\tfrac{1}{3}e^{-3x}x')dx = -\tfrac{1}{3}xe^{-3x} + \int \tfrac{1}{3}e^{-3x}dx \\ &= -\tfrac{1}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x} + C. \end{aligned}$$

Opgave 1c

Bereken de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty xe^{-3x}dx$.

We hebben gezien dat $\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$. Dus

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-3x}dx &= \lim_{B\to\infty}\int_0^B xe^{-3x}dx \\
&= \lim_{B\to\infty}\Big[-\tfrac{1}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x}\Big]_0^B \\
&= \lim_{B\to\infty}\Big(Be^{-3B} - \tfrac{1}{9}e^{-3B} - \big(-\tfrac{1}{3}0\cdot e^{-3\cdot 0} - \tfrac{1}{9}e^{-3\cdot 0}\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Hier hebben we gebruikt dat Be^{-3B} en e^{-3B} naar 0 gaan als $B\to\infty$.

Opgave 1c

Bereken de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty xe^{-3x}dx$.

We hebben gezien dat $\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$. Dus

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-3x}dx &= \lim_{B\to\infty}\int_0^B xe^{-3x}dx \\
&= \lim_{B\to\infty}\Big[-\tfrac{1}{3}xe^{-3x} - \tfrac{1}{9}e^{-3x}\Big]_0^B \\
&= \lim_{B\to\infty}\Big(Be^{-3B} - \tfrac{1}{9}e^{-3B} - (-\tfrac{1}{3}0\cdot e^{-3\cdot 0} - \tfrac{1}{9}e^{-3\cdot 0})\Big) \\
&= \tfrac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Hier hebben we gebruikt dat Be^{-3B} en e^{-3B} naar 0 gaan als $B \to \infty$.

Controle. De functie xe^{-3x} is ≥ 0 op $[0,\infty)$ dus de uitkomst van de integraal moet ≥ 0 zijn.

Opgave 2a

Gegeven is de functie $f(x, y) = (x + 1)^3 - xy^2$.
Bepaal $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, en laat zien dat $(-1, 0), (0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$ de enige stationaire punten zijn van f.

Opgave 2a

Gegeven is de functie $f(x,y) = (x+1)^3 - xy^2$.
Bepaal $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, en laat zien dat $(-1,0),(0,\sqrt{3}),(0,-\sqrt{3})$ de enige stationaire punten zijn van f.

Er geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x+1)^2 - y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$. De stationaire punten vinden we door $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ op te lossen. Er geldt:

$$
\begin{aligned}
(x,y) \text{ stat. pnt.} \quad &\Leftrightarrow \quad 3(x+1)^2 - y^2 = 0,\ 2xy = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (3(x+1)^2 = y^2,\ x = 0) \text{ of } (3(x+1)^2 = y^2,\ y = 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x = 0,\ y^2 = 3) \text{ of } (y = 0,\ 3(x+1)^2 = 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \{(0,\sqrt{3}),\ (0,-\sqrt{3}),\ (-1,0)\}.
\end{aligned}
$$

Opgave 2b

Gegeven is de functie $f(x, y) = (x + 1)^3 - xy^2$.
Ga voor elk van de stationaire punten $(0, \sqrt{3})$ en $(0, -\sqrt{3})$ na of f daarin een maximum of minimum aanneemt of dat dit punt een zadelpunt is van f.

Opgave 2b

Gegeven is de functie $f(x, y) = (x + 1)^3 - xy^2$.
Ga voor elk van de stationaire punten $(0, \sqrt{3})$ en $(0, -\sqrt{3})$ na of f daarin een maximum of minimum aanneemt of dat dit punt een zadelpunt is van f.

We gebruiken de classificatiestelling voor stationaire punten:

Zij (x_0, y_0) een stationair punt van f. Definieer $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ en $H = AC - B^2$.
Dan geldt:

als $H < 0$ dan is (x_0, y_0) een zadelpunt van f;
als $H > 0$ en $A > 0$ dan neemt f in (x_0, y_0) een minimum aan (absoluut of relatief);
als $H > 0$ en $A < 0$ dan neemt f in (x_0, y_0) een maximum aan (absoluut of relatief);
als $H = 0$ dan is er geen uitsluitsel.

Opgave 2b

Gegeven is de functie $f(x,y) = (x+1)^3 - xy^2$.
Ga voor elk van de stationaire punten $(0, \sqrt{3})$ en $(0, -\sqrt{3})$ na of f daarin een maximum of minimum aanneemt of dat dit punt een zadelpunt is van f.

We classificeren de stationaire punten van f.
We hebben gezien dat $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x+1)^2 - y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$.
Dus $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(x+1)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$, $H = AC - B^2$.

stationair punt	A	B	C	H	classificatie
$(-1, 0)$	0	0	0	0	geen uitsluitsel
$(0, \sqrt{3})$	6	$-2\sqrt{3}$	0	$-12 < 0$	zadelpunt
$(0, -\sqrt{3})$	6	$2\sqrt{3}$	0	$-12 < 0$	zadelpunt

Opgave 2c

Gegeven is de functie $f(x, y) = (x + 1)^3 - xy^2$.
Laat zien dat $(-1, 0)$ een zadelpunt is van f, dat wil zeggen dat f in dat punt geen maximum of minimum aanneemt (in dit punt is $H = 0$ dus het criterium met de tweede orde partiële afgeleiden geeft geen uitsluitsel. Bekijk de waarden van f met $y = 0$).

Opgave 2c

Gegeven is de functie $f(x, y) = (x + 1)^3 - xy^2$.
Laat zien dat $(-1, 0)$ een zadelpunt is van f, dat wil zeggen dat f in dat punt geen maximum of minimum aanneemt (in dit punt is $H = 0$ dus het criterium met de tweede orde partiële afgeleiden geeft geen uitsluitsel. Bekijk de waarden van f met $y = 0$).

In de punten met $y = 0$ is $f(x, y) = (x + 1)^3$. Er geldt $f(-1, 0) = 0$, $f(x, y) > 0$ als $x > -1$ en $y = 0$ en $f(x, y) < 0$ als $x < -1$ and $y = 0$.

Dus f neemt in de buurt van $(-1, 0)$ zowel waarden > 0 als < 0 aan.

Hieruit volgt dat f in $(-1, 0)$ noch een maximum, noch een minimum aanneemt.

Opgave 2d

Gegeven is de functie $f(x, y) = (x + 1)^3 - xy^2$.
Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, 1, f(1, 1))$.

Opgave 2d

Gegeven is de functie $f(x,y) = (x+1)^3 - xy^2$.
Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, 1, f(1,1))$.

We hebben gezien dat $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x+1)^2 - y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$. Dus de vergelijking van het raakvlak is

$$\begin{aligned} z &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) \\ &= 7 + 11(x-1) - 2(y-1). \end{aligned}$$

Opgave 3a

Schrijf $\frac{(1+i)^2}{2+i}$ in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Opgave 3a

Schrijf $\frac{(1+i)^2}{2+i}$ in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Er geldt $(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1 + i + i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Dus

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^2}{2+i} &= \frac{2i}{2+i} = \frac{2i(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{4i - 2i^2}{2^2 + 1^2} = \frac{2+4i}{5} = \tfrac{2}{5} + \tfrac{4}{5}i. \end{aligned}$$

Opgave 3b

Schrijf $(8 - 8i)^{11}$ in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Opgave 3b

Schrijf $(8-8i)^{11}$ in de vorm $a+bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

We schrijven eerst $8-8i$ in de vorm $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Er geldt:

$$r = |8-8i| = \sqrt{8^2+(-8)^2} = \sqrt{8^2\cdot 2} = 8\sqrt{2},$$
$$\cos\varphi = \frac{8}{8\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = \frac{-8}{8\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Dus we kunnen $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$ nemen.

Opgave 3b

Schrijf $(8-8i)^{11}$ in de vorm $a+bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

We schrijven eerst $8-8i$ in de vorm $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Er geldt:

$$r = |8-8i| = \sqrt{8^2+(-8)^2} = \sqrt{8^2\cdot 2} = 8\sqrt{2},$$
$$\cos\varphi = \frac{8}{8\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = \frac{-8}{8\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Dus we kunnen $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$ nemen.

Volgens de formule van de Moivre
$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ is

$$\begin{aligned}
(8-8i)^{11} &= r^{11}\big(\cos(11\varphi) + i\sin(11\varphi)\big)\\
&= (8\sqrt{2})^{11}\big(\cos(-\tfrac{11}{4}\pi) + i\sin(-\tfrac{11}{4}\pi)\big)\\
&= (2^{7/2})^{11}\big(\cos(-\tfrac{3}{4}\pi) + i\sin(-\tfrac{3}{4}\pi)\big)\\
&= 2^{77/2}\big(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i\big)\\
&= -2^{38}(1+i).
\end{aligned}$$

Opgave 3c

Bepaal de oplossingen van $z^7 = 128i$ en schrijf die in de vorm $\rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$ en $\psi \in \mathbb{R}$.

Opgave 3c

Bepaal de oplossingen van $z^7 = 128i$ en schrijf die in de vorm $\rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$ en $\psi \in \mathbb{R}$.

We schrijven eerst $128i$ in de vorm $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Er geldt $128i = 128(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi)$. Dus we kunnen $r = 128$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ nemen.

Opgave 3c

Bepaal de oplossingen van $z^7 = 128i$ en schrijf die in de vorm $\rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$ en $\psi \in \mathbb{R}$.

We schrijven eerst $128i$ in de vorm $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Er geldt $128i = 128(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi)$. Dus we kunnen $r = 128$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ nemen.

In het algemeen zijn de oplossingen van $z^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gegeven door

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\tfrac{1}{n}\varphi + \tfrac{2k}{7}\pi) + i\sin(\tfrac{1}{n}\varphi + \tfrac{2k}{7}\pi)\Big) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Dus in ons geval, met $r = 128$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ en $n = 7$,

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[7]{128}\Big(\cos(\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{2k}{7}\pi) + i\sin(\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{2k}{7}\pi)\Big) \\ &= 2\Big(\cos(\tfrac{1}{14}\pi + \tfrac{2k}{7}\pi) + i\sin(\tfrac{1}{14}\pi + \tfrac{2k}{7}\pi)\Big) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{aligned}$$

Opgave 3d

Bepaal de oplossingen van $e^z = 8i$ en schrijf ze in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Opgave 3d

Bepaal de oplossingen van $e^z = 8i$ en schrijf ze in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

We schrijven eerst $8i$ in de vorm $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Er geldt $8i = 8(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi)$. Dus we kunnen $r = 8$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ nemen.

Nu zijn de oplossingen van $e^z = 8i$ gegeven door

$$z_k = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i = \ln 8 + (\tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi)i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Opgave 4a

Ga na of $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 1}$ convergeert of divergeert.

Opgave 4a

Ga na of $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$ convergeert of divergeert.

Het is verstandig om bij het onderzoek naar de convergentie of divergentie van een reeks eerst het divergentiekenmerk te proberen: als $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergeert dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

In ons geval is $a_n = \frac{2^n}{2^n+1}$, dus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^{-n}} = 1 \neq 0.$$

Bijgevolg is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$ **divergent**.

Opgave 4b

Ga na of $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{80}}{n!}$ convergeert of divergeert.

Opgave 4b

Ga na of $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{80}}{n!}$ convergeert of divergeert.

In de termen van de reeks komen faculteiten voor. In dat geval is het het handigste het quotiëntkenmerk te proberen: als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent, als de limiet > 1 is dan is de reeks divergent.

We passen dit toe met $a_n = \frac{n^{80}}{n!}$. Dan is $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{80}}{(n+1)!}$. Dus

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{80}/(n+1)!}{n^{80}/n!} = \frac{(n+1)^{80}\, n!}{n^{80}(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)^{80}}{n^{80}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{80} \cdot \frac{1\cdot 2 \cdots n}{1\cdot 2\cdots n(n+1)} \\
&= \left(1 + n^{-1}\right)^{80} \cdot \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$. Dus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{80}}{n!}$ is **convergent.**

Opgave 4c

Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n^{1/3}}{1+n^{3/2}}$ convergeert of divergeert. Je mag gebruiken dat $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$.

Opgave 4c

Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n^{1/3}}{1+n^{3/2}}$ convergeert of divergeert. Je mag gebruiken dat $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$.

De formulering van de opgave suggereert dat we het vergelijkingskenmerk toe moeten passen met $a_n = \frac{5+n^{1/3}}{1+n^{3/2}}$ en $b_n = n^{-s}$ voor geschikte s.

Er geldt:

$$\sum_{n=q}^{\infty} b_n \text{ convergent}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty \ \Rightarrow \sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ convergent;}$$

$$\sum_{n=q}^{\infty} b_n \text{ divergent}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \ \Rightarrow \sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ divergent.}$$

Opgave 4c

Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n^{1/3}}{1+n^{3/2}}$ convergeert of divergeert. Je mag gebruiken dat $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$.

De formulering van de opgave suggereert dat we het vergelijkingskenmerk toe moeten passen met $a_n = \frac{5+n^{1/3}}{1+n^{3/2}}$ en $b_n = n^{-s}$ voor geschikte s.

Er geldt:

$$\sum_{n=q}^{\infty} b_n \text{ convergent, } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty \ \Rightarrow \sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ convergent;}$$

$$\sum_{n=q}^{\infty} b_n \text{ divergent, } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \ \Rightarrow \sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ divergent.}$$

De teller van a_n is van orde grootte $n^{1/3}$ en de noemer van orde van grootte $n^{3/2}$. Dus a_n zelf is van orde van grootte $n^{(1/3)-(3/2)} = n^{-7/6}$. Daarom vergelijken we a_n met $b_n = n^{-7/6}$.

Opgave 4c

Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n^{1/3}}{1+n^{3/2}}$ convergeert of divergeert. Je mag gebruiken dat $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$.

We passen het vergelijkingskenmerk toe met $a_n = \frac{5+n^{1/3}}{1+n^{3/2}}$ en $b_n = n^{-7/6}$.
Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{5+n^{1/3}}{1+n^{3/2}} \cdot n^{7/6} = \frac{(5+n^{1/3})n^{7/6}n^{-3/2}}{n^{-3/2}+1} = \frac{(5+n^{1/3})n^{-1/3}}{n^{-3/2}+1} \\ &= \frac{5n^{-1/3}+1}{n^{-3/2}+1}. \end{aligned}$$

Dus $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 < \infty$.

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-7/6}$ is convergent want $\frac{7}{6} > 1$.

Dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n^{1/3}}{1+n^{3/2}}$ is **convergent.**

EINDE VAN HET COLLEGE
EN VAN CONTINUE
WISKUNDE 2