CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

2e college: Integraalrekening 2

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Substitutieregel voor onbepaalde integralen

Zij f een continue functie en F een primitieve van f.
Zij g een differentieerbare functie. Dan is

$$\begin{aligned} F(g(x))' &= F'(g(x))g'(x) \quad \text{wegens de kettingregel} \\ &= f(g(x))g'(x) \quad \text{omdat } F' = f. \end{aligned}$$

Dus $F(g(x))$ is een primitieve van $f(g(x))g'(x)$.

Substitutieregel voor onbepaalde integralen

Zij f een continue functie en F een primitieve van f.
Zij g een differentieerbare functie. Dan is

$$\begin{aligned} F(g(x))' &= F'(g(x))g'(x) \text{ wegens de kettingregel} \\ &= f(g(x))g'(x) \text{ omdat } F' = f. \end{aligned}$$

Dus $F(g(x))$ is een primitieve van $f(g(x))g'(x)$.

Dit geeft de volgende belangrijke regel:

Substitutieregel

Gegeven zijn een interval D, een continue functie $f : D \to \mathbb{R}$ en een differentieerbare functie $g : D \to \mathbb{R}$.

Zij F een primitieve van f.

Dan is $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$.

Een andere interpretatie

Neem weer een continue functie f met primitieve F en een differentieerbare functie g.

Definieer nu $u = g(x)$ (dit is de substitutie).
Schrijf $g'(x) = \frac{du}{dx}$, $du = g'(x)dx$.

Een andere interpretatie

Neem weer een continue functie f met primitieve F en een differentieerbare functie g.

Definieer nu $u = g(x)$ (dit is de substitutie).
Schrijf $g'(x) = \frac{du}{dx}$, $du = g'(x)dx$.

(du, dx zijn formele symbolen, geen getallen, maar we kunnen er net zo mee rekenen als getallen.)

Een andere interpretatie

Neem weer een continue functie f met primitieve F en een differentieerbare functie g.

Definieer nu $u = g(x)$ (dit is de substitutie).
Schrijf $g'(x) = \frac{du}{dx}$, $du = g'(x)dx$.

Hiermee kunnen we de substitutieregel makkelijker onthouden: vervang eerst $g(x)$ door u en $g'(x)dx$ door du, bepaal daarna de integraal, en vervang aan het eind weer u door $g(x)$:

$$\begin{aligned}
\int f(g(x))g'(x)dx &= \int f(u)du \quad \text{(substitueer } u = g(x),\ du = g'(x)dx\text{)} \\
&= F(u) + C \quad \text{(bereken de integraal)} \\
&= F(g(x)) + C \quad \text{(vervang } u \text{ door } g(x)\text{)}
\end{aligned}$$

Een andere interpretatie

Neem weer een continue functie f met primitieve F en een differentieerbare functie g.

Definieer nu $u = g(x)$ (dit is de substitutie).
Schrijf $g'(x) = \frac{du}{dx}$, $du = g'(x)dx$.

Hiermee kunnen we de substitutieregel makkelijker onthouden: vervang eerst $g(x)$ door u en $g'(x)dx$ door du, bepaal daarna de integraal, en vervang aan het eind weer u door $g(x)$:

$$
\begin{aligned}
\int f(g(x))g'(x)dx &= \int f(u)du \quad \text{(substitueer } u = g(x),\ du = g'(x)dx\text{)} \\
&= F(u) + C \quad \text{(bereken de integraal)} \\
&= F(g(x)) + C \quad \text{(vervang } u \text{ door } g(x)\text{)}
\end{aligned}
$$

We kunnen dus met de substitutieregel de 'moeilijke' integraal $\int f(g(x))g'(x)dx$ omzetten in de 'makkelijke' integraal $\int f(u)du$.

Voorbeeld

Bepaal $\int x e^{x^2}\, dx$.

Voorbeeld

Bepaal $\int x e^{x^2} dx$.

Schrijf de integraal als $\int e^{x^2} \cdot x dx$.

Substitueer $u = x^2$. Dan is $du = (x^2)' dx = 2x dx$, $x dx = \frac{1}{2} du$.

Voorbeeld

Bepaal $\int xe^{x^2}dx$.

Schrijf de integraal als $\int e^{x^2} \cdot xdx$.

Substitueer $u = x^2$. Dan is $du = (x^2)'dx = 2xdx$, $xdx = \frac{1}{2}du$.
Dus

$$\begin{aligned}
\int xe^{x^2}dx &= \int e^{x^2} \cdot xdx = \int e^u \cdot \tfrac{1}{2}du \\
&= \tfrac{1}{2}e^u + C \quad \text{(integraal uitrekenen)} \\
&= \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C \quad (u = x^2 \text{ invullen}).
\end{aligned}$$

Hoe vind je een geschikte substitutie?

Een methode die vaak (maar niet altijd!) werkt:

Als er in de integrand (de functie onder het integraalteken) iets voorkomt van de vorm $g(x)^\alpha$, $e^{g(x)}$, $\sin g(x)$, $\cos g(x)$ probeer dan $u = g(x)$.

Hoe vind je een geschikte substitutie?

Een methode die vaak (maar niet altijd!) werkt:

Als er in de integrand (de functie onder het integraalteken) iets voorkomt van de vorm $g(x)^\alpha$, $e^{g(x)}$, $\sin g(x)$, $\cos g(x)$ probeer dan $u = g(x)$.

Voorbeeld. Bepaal $\int \sqrt[4]{2+\sin x} \cdot \cos x \, dx$.

Hoe vind je een geschikte substitutie?

Een methode die vaak (maar niet altijd!) werkt:

Als er in de integrand (de functie onder het integraalteken) iets voorkomt van de vorm $g(x)^\alpha$, $e^{g(x)}$, $\sin g(x)$, $\cos g(x)$ probeer dan $u = g(x)$.

Voorbeeld. Bepaal $\int \sqrt[4]{2+\sin x} \cdot \cos x \, dx$.

In de integrand komt $\sqrt[4]{2+\sin x} = (2+\sin x)^{1/4}$ voor, dus $g(x)^{1/4}$ met $g(x) = 2+\sin x$.
We nemen $u = 2+\sin x$. Dan is $du = (2+\sin x)' dx = \cos x \, dx$.

Hoe vind je een geschikte substitutie?

Een methode die vaak (maar niet altijd!) werkt:

Als er in de integrand (de functie onder het integraalteken) iets voorkomt van de vorm $g(x)^\alpha$, $e^{g(x)}$, $\sin g(x)$, $\cos g(x)$ probeer dan $u = g(x)$.

Voorbeeld. Bepaal $\int \sqrt[4]{2+\sin x} \cdot \cos x \, dx$.

In de integrand komt $\sqrt[4]{2+\sin x} = (2+\sin x)^{1/4}$ voor, dus $g(x)^{1/4}$ met $g(x) = 2 + \sin x$.
We nemen $u = 2 + \sin x$. Dan is $du = (2+\sin x)' dx = \cos x \, dx$. Dus

$$\begin{aligned} \int \sqrt[4]{2+\sin x} \cdot \cos x \, dx &= \int u^{1/4} du \\ &= \frac{4}{5} u^{5/4} + C \quad \text{(integraal uitrekenen)} \\ &= \frac{4}{5}(2+\sin x)^{5/4} + C \quad (2+\sin x \text{ invullen voor } u). \end{aligned}$$

Nog een voorbeeld.

Bepaal $\int (\ln x + 1)^{88} \cdot \frac{1}{x} dx$.

Nog een voorbeeld.

Bepaal $\int(\ln x + 1)^{88} \cdot \frac{1}{x} dx$.

In de integrand komt $(\ln x + 1)^{88}$ voor, dus $g(x)^{88}$ met $g(x) = \ln x + 1$.

We nemen $u = \ln x + 1$. Dan is $du = (\ln x + 1)' dx = \frac{1}{x} dx$.

Nog een voorbeeld.

Bepaal $\int (\ln x + 1)^{88} \cdot \frac{1}{x} dx$.

In de integrand komt $(\ln x + 1)^{88}$ voor, dus $g(x)^{88}$ met $g(x) = \ln x + 1$.

We nemen $u = \ln x + 1$. Dan is $du = (\ln x + 1)' dx = \frac{1}{x} dx$. Dus

$$\begin{aligned} \int (\ln x + 1)^{88} \frac{1}{x} dx &= \int u^{88} du \\ &= \frac{1}{89} u^{89} + C \\ &= \frac{1}{89} (\ln x + 1)^{89} + C. \end{aligned}$$

Substitutieregel voor bepaalde integralen

Zij f een continue functie op $[a, b]$ en g een differentieerbare functie op $[a, b]$. Dan is

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Substitutieregel voor bepaalde integralen

Zij f een continue functie op $[a,b]$ en g een differentieerbare functie op $[a,b]$. Dan is

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Namelijk substitueer $u = g(x)$. Dan is $du = g'(x)dx$ en dus $f(g(x))g'(x)dx = f(u)du$.

x loopt van a naar b dus $u = g(x)$ loopt van $g(a)$ naar $g(b)$.

Substitutieregel voor bepaalde integralen

Zij f een continue functie op $[a, b]$ en g een differentieerbare functie op $[a, b]$. Dan is

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Namelijk substitueer $u = g(x)$. Dan is $du = g'(x)dx$ en dus $f(g(x))g'(x)dx = f(u)du$.

x loopt van a naar b dus $u = g(x)$ loopt van $g(a)$ naar $g(b)$.

Vergeet nooit de grenzen a en b te veranderen in $g(a)$ en $g(b)$!

Voorbeeld

Bepaal $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx$.

Voorbeeld

Bepaal $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx$.

In de integrand staat $e^{\cos x}$, dus $e^{g(x)}$ met $g(x) = \cos x$.

Substitueer $u = \cos x$.
Dan is $du = \cos' x \cdot dx = -\sin x \cdot dx$, $\sin x \cdot dx = -du$.

Voorbeeld

Bepaal $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx$.

In de integrand staat $e^{\cos x}$, dus $e^{g(x)}$ met $g(x) = \cos x$.

Substitueer $u = \cos x$.
Dan is $du = \cos' x \cdot dx = -\sin x \cdot dx$, $\sin x \cdot dx = -du$.

Dus
$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx = \int_{\cos 0}^{\cos \pi/2} e^u (-du) = -\int_1^0 e^u du$$

Voorbeeld

Bepaal $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx$.

In de integrand staat $e^{\cos x}$, dus $e^{g(x)}$ met $g(x) = \cos x$.

Substitueer $u = \cos x$.
Dan is $du = \cos' x \cdot dx = -\sin x \cdot dx$, $\sin x \cdot dx = -du$.

Dus

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx = \int_{\cos 0}^{\cos \pi/2} e^u (-du) = -\int_1^0 e^u du.$$

Opmerking. Als F een primitieve is van f dan geldt altijd

$$\int_a^b f(x) dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{ook als } b < a \text{ of } b = a.$$

Voorbeeld

Bepaal $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx$.

In de integrand staat $e^{\cos x}$, dus $e^{g(x)}$ met $g(x) = \cos x$.

Substitueer $u = \cos x$.
Dan is $du = \cos' x \cdot dx = -\sin x \cdot dx$, $\sin x \cdot dx = -du$.

Dus

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx &= \int_{\cos 0}^{\cos \pi/2} e^u(-du) = -\int_1^0 e^u \, du \\ &= -\left[e^u\right]_1^0 = -(e^0 - e^1) = e - 1.\end{aligned}$$

We gaan verder met partiële integratie.

Partiële integratie

De productregel voor differentiëren luidt

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

We kunnen dit herschrijven tot $f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - g(x)f'(x)$.

Partiële integratie

De productregel voor differentiëren luidt

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

We kunnen dit herschrijven tot $f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - g(x)f'(x)$.

We nemen links en rechts de onbepaalde integraal en gebruiken dat $(fg)'$ primitieve fg heeft. Dit geeft:

Regel van partiële integratie

$$\int f(x)g'(x)dx \;=\; f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Partiële integratie

De productregel voor differentiëren luidt

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

We kunnen dit herschrijven tot $f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - g(x)f'(x)$.

We nemen links en rechts de onbepaalde integraal en gebruiken dat $(fg)'$ primitieve fg heeft. Dit geeft:

Regel van partiële integratie

$$\int f(x)g'(x)dx \; = \; f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Gebruik. Zoek functies f en g zodat de integrand gelijk is aan $f(x)g'(x)$.

Dat wil zeggen, van een stukje van de integrand, namelijk $g'(x)$, weten we een primitieve, namelijk $g(x)$.
Vandaar de term 'partiële integratie.'

Voorbeeld 1

We bepalen $\int x \sin x \cdot dx$.

We willen $x \sin x$ opsplitsen in $f(x)g'(x)$.

Voorbeeld 1

We bepalen $\int x \sin x \cdot dx$.

We willen $x \sin x$ opsplitsen in $f(x)g'(x)$.

Een voor de hand liggende keuze is $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos x$.

Voorbeeld 1

We bepalen $\int x \sin x \cdot dx$.

We willen $x \sin x$ opsplitsen in $f(x)g'(x)$.

Een voor de hand liggende keuze is $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos x$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int x \sin x \cdot dx &= \int x(-\cos x)' dx \quad (\int f(x)g'(x)dx) \\
&= x(-\cos x) - \int (-\cos x)x' dx \quad (f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx) \\
&= -x\cos x + \int \cos x \cdot 1 \cdot dx \quad \text{(de 1 zullen we niet meer opschrijven)} \\
&= -x\cos x + \sin x + C \ \ (\sin x \text{ is een primitieve van } \cos x).
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

We bepalen $\int \ln x \cdot dx$.

We willen $\ln x$ opsplitsen in $f(x)g'(x)$. Welke f en g moeten we kiezen?

Voorbeeld 2

We bepalen $\int \ln x \cdot dx$.

We willen $\ln x$ opsplitsen in $f(x)g'(x)$. Welke f en g moeten we kiezen?

Schrijf $\int \ln x \cdot dx = \int \ln x \cdot 1 \cdot dx$.

Kies $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$.

Voorbeeld 2

We bepalen $\int \ln x \cdot dx$.

We willen $\ln x$ opsplitsen in $f(x)g'(x)$. Welke f en g moeten we kiezen?

Schrijf $\int \ln x \cdot dx = \int \ln x \cdot 1 \cdot dx$.

Kies $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int \ln x \cdot dx &= \int (\ln x) \cdot x' dx \quad \left(\int f(x)g'(x)dx\right) \\
&= (\ln x)x - \int x \cdot \ln' x \cdot dx \quad \left(f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx\right) \\
&= x \ln x - \int x \cdot x^{-1} dx = x \ln x - \int dx \\
&= x \ln x - x + C.
\end{aligned}$$

Herhaaldelijk partiëel integreren

We bepalen $\int x^2 e^x dx$.

Herhaaldelijk partiëel integreren

We bepalen $\int x^2 e^x dx$.

Neem $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$.

Herhaaldelijk partiëel integreren

We bepalen $\int x^2 e^x dx$.

Neem $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$. Dan is

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x (x^2)' dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx.$$

Herhaaldelijk partiëel integreren

We bepalen $\int x^2 e^x dx$.

Neem $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$. Dan is

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x (x^2)' dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx.$$

Hoe nu verder? We kunnen weer partiële integratie toepassen op de laatste integraal. Kiezen we $f(x) = e^x$, $g'(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ dan krijgen we weer $\int x^2 e^x dx$ terug en zijn we niets opgeschoten.

Herhaaldelijk partiëel integreren

We bepalen $\int x^2 e^x dx$.

Neem $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$. Dan is

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x (x^2)' dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx.$$

Hoe nu verder? We kunnen weer partiële integratie toepassen op de laatste integraal. Kiezen we $f(x) = e^x$, $g'(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ dan krijgen we weer $\int x^2 e^x dx$ terug en zijn we niets opgeschoten.

We schrijven de laatste integraal als $\int 2x \cdot e^x dx$ en kiezen $f(x) = 2x$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$.

Herhaaldelijk partiëel integreren

We bepalen $\int x^2 e^x dx$.

Neem $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$. Dan is

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x (x^2)' dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx \quad (*).$$

Passen we partiële integratie toe op de laatste integraal met $f(x) = 2x$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$ dan krijgen we

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot 2x dx &= \int 2x e^x dx = 2xe^x - \int e^x (2x)' dx = 2xe^x - \int 2e^x dx \\ &= 2xe^x - 2e^x + C. \end{aligned}$$

Herhaaldelijk partiëel integreren

We bepalen $\int x^2 e^x dx$.

Neem $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$. Dan is

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x (x^2)' dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx \quad (*).$$

Passen we partiële integratie toe op de laatste integraal met $f(x) = 2x$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$ dan krijgen we

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot 2x dx &= \int 2xe^x dx = 2xe^x - \int e^x (2x)' dx = 2xe^x - \int 2e^x dx \\ &= 2xe^x - 2e^x + C. \end{aligned}$$

Door dit in te vullen in (*) krijgen we tenslotte

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \left(2xe^x - 2e^x\right) + C \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C. \end{aligned}$$

Enkele hints

Integralen van de vorm $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin ax\, dx$, $\int x^n \cos ax\, dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

pas partiële integratie toe met $f(x) = x^n$ en $g'(x) = e^{ax}$, $\sin ax$ of $\cos ax$.

Om zulke integralen te berekenen moet je n keer partiëel integreren. Bij de eerste keer partiëel integreren krijg je een uitdrukking met een integraal met x^{n-1}, na de tweede keer een integraal met x^{n-2} enzovoort, en tenslotte een integraal zonder macht van x.

Enkele hints

Integralen van de vorm $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin ax \, dx$, $\int x^n \cos ax \, dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

pas partiële integratie toe met $f(x) = x^n$ en $g'(x) = e^{ax}$, $\sin ax$ of $\cos ax$.

Om zulke integralen te berekenen moet je n keer partiëel integreren.
Bij de eerste keer partiëel integreren krijg je een uitdrukking met een integraal met x^{n-1}, na de tweede keer een integraal met x^{n-2} enzovoort, en tenslotte een integraal zonder macht van x.

Integralen van de vorm $\int x^\alpha \ln x \cdot dx$ (α willekeurig reëel getal):

pas partiële integratie toe met $f(x) = \ln x$ en $g'(x) = x^\alpha$.

Je hoeft hier maar één keer partiëel te integreren.

Partiële integratie voor bepaalde integralen

We berekenen $\int_0^1 xe^{-2x}dx$.

Partiële integratie voor bepaalde integralen

We berekenen $\int_0^1 xe^{-2x}dx$.

Het is het makkelijkst eerst de primitieven van xe^{-2x} te bepalen.
We passen partiële integratie toe met $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-2x}$,
$g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ (ga na dat $(-\frac{1}{2}e^{-2x})' = e^{-2x}$).

Partiële integratie voor bepaalde integralen

We berekenen $\int_0^1 xe^{-2x}dx$.

Het is het makkelijkst eerst de primitieven van xe^{-2x} te bepalen.
We passen partiële integratie toe met $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-2x}$,
$g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ (ga na dat $(-\frac{1}{2}e^{-2x})' = e^{-2x}$).

Dit geeft

$$\begin{aligned}\int xe^{-2x}dx &= x(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}) - \int(-\tfrac{1}{2}e^{-2x})x'dx = -\tfrac{1}{2}xe^{-2x} + \tfrac{1}{2}\int e^{-2x}dx \\ &= -\tfrac{1}{2}xe^{-2x} - \tfrac{1}{4}e^{-2x} + C.\end{aligned}$$

Partiële integratie voor bepaalde integralen

We berekenen $\int_0^1 xe^{-2x}dx$.

Het is het makkelijkst eerst de primitieven van xe^{-2x} te bepalen.
We passen partiële integratie toe met $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-2x}$, $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ (ga na dat $(-\frac{1}{2}e^{-2x})' = e^{-2x}$).

Dit geeft

$$\begin{aligned}\int xe^{-2x}dx &= x(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}) - \int(-\tfrac{1}{2}e^{-2x})x'dx = -\tfrac{1}{2}xe^{-2x} + \tfrac{1}{2}\int e^{-2x}dx \\ &= -\tfrac{1}{2}xe^{-2x} - \tfrac{1}{4}e^{-2x} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Dus } \int_0^1 xe^{-2x}dx &= \Big[-\tfrac{1}{2}xe^{-2x} - \tfrac{1}{4}e^{-2x}\Big]_0^1 \\ &= -\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-2} - \tfrac{1}{4}e^{-2} - \Big(-\tfrac{1}{2}\cdot 0\cdot e^{-0} - \tfrac{1}{4}e^{-0}\Big) \\ &= -\tfrac{1}{2}e^{-2} - \tfrac{1}{4}e^{-2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}e^{-2}.\end{aligned}$$

Controle

Feit

Als $a < b$ en $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$, dan is $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Bijvoorbeeld $xe^{-2x} \geq 0$ op $[0, 1]$.

Er geldt $\int_0^1 xe^{-2x} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2} > 0$.

Als $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$ en je hebt een uitkomst < 0 gekregen voor $\int_a^b f(x)dx$ dan heb je ergens een rekenfout gemaakt, bijvoorbeeld een minteken vergeten.

Substitutie of partiële integratie?

Hoe bepaal je of je de substitutieregel of de regel voor partiële integratie moet gebruiken?

Hiervoor is geen eenduidig algoritme.

Substitutie of partiële integratie?

Hoe bepaal je of je de substitutieregel of de regel voor partiële integratie moet gebruiken?

Hiervoor is geen eenduidig algoritme.

Het handigste is om eerst te kijken of er in de integrand iets staat van de vorm $g(x)^\alpha$, $e^{g(x)}$, $\sin g(x)$ of $\cos g(x)$.
Dan kun je de substitutie $u = g(x)$ proberen en zien of dat een eenvoudiger integraal geeft.
Die integraal kun je dan misschien rechtstreeks uitrekenen of wellicht moet je partiële integratie toepassen.

Substitutie of partiële integratie?

Hoe bepaal je of je de substitutieregel of de regel voor partiële integratie moet gebruiken?

Hiervoor is geen eenduidig algoritme.

Het handigste is om eerst te kijken of er in de integrand iets staat van de vorm $g(x)^\alpha$, $e^{g(x)}$, $\sin g(x)$ of $\cos g(x)$.
Dan kun je de substitutie $u = g(x)$ proberen en zien of dat een eenvoudiger integraal geeft.
Die integraal kun je dan misschien rechtstreeks uitrekenen of wellicht moet je partiële integratie toepassen.

Wanneer er in de integrand niet iets staat van de vorm $g(x)^\alpha$, $e^{g(x)}$, $\sin g(x)$ of $\cos g(x)$ dan is er geen voor de hand liggende substitutie.
Dan kun je het beste partiële integratie proberen.

EINDE VAN HET COLLEGE