CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

3e college: Integraalrekening 3

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Oneigenlijke integralen

Een *oneigenlijke integraal* is een bepaalde integraal $\int_a^b f(x)dx$ waarbij één van de volgende situaties geldt:

(i) $a = -\infty$ of $b = \infty$ of beide;

(ii) a en b zijn eindig maar $\lim_{t \downarrow a} f(t) = \pm\infty$, of $\lim_{t \uparrow b} f(t) = \pm\infty$, of beide.

Zulke integralen worden gedefinieerd als limieten van bepaalde integralen van begrensde functies over begrensde intervallen.

Oneigenlijke integralen met één van de grenzen $\pm\infty$

Zij f een continue functie. Dan definiëren we:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx \quad (a \text{ eindig}),$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)dx \quad (b \text{ eindig}),$$

mits deze limieten bestaan.

We zeggen dat $\int_a^\infty f(x)dx$ **convergent** is als $\lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx$ bestaat en eindig is (er komt geen $\pm\infty$ uit);

we zeggen dat $\int_a^\infty f(x)dx$ **divergent** is als $\lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx$ niet bestaat of $\pm\infty$ is.

Idem voor $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Voorbeeld 1

Voor welke α is $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ convergent?

Voorbeeld 1

Voor welke α is $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ convergent?

Neem eerst aan dat $\alpha \neq 1$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty x^{-\alpha} dx &= \lim_{B\to\infty} \int_1^B x^{-\alpha} dx = \lim_{B\to\infty} \left[\tfrac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^B \\
&= \lim_{B\to\infty} \left(\tfrac{1}{1-\alpha} B^{1-\alpha} - \tfrac{1}{1-\alpha} \right) \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} & \text{als } \alpha > 1, \\ \infty & \text{als } \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Voorbeeld 1

Voor welke α is $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ convergent?

Neem eerst aan dat $\alpha \neq 1$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty x^{-\alpha} dx &= \lim_{B\to\infty} \int_1^B x^{-\alpha} dx = \lim_{B\to\infty} \left[\tfrac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^B \\
&= \lim_{B\to\infty} \left(\tfrac{1}{1-\alpha} B^{1-\alpha} - \tfrac{1}{1-\alpha}\right) \\
&= \begin{cases} -\tfrac{1}{1-\alpha} = \tfrac{1}{\alpha-1} & \text{als } \alpha > 1, \\ \infty & \text{als } \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Voor $\alpha = 1$ geldt

$$\int_1^\infty x^{-1} dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^B x^{-1} dx = \lim_{B\to\infty} \left[\ln x\right]_1^B = \lim_{B\to\infty} \left(\ln B - \ln 1\right) = \infty.$$

Voorbeeld 1

Voor welke α is $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ convergent?

Neem eerst aan dat $\alpha \neq 1$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty x^{-\alpha} dx &= \lim_{B\to\infty} \int_1^B x^{-\alpha} dx = \lim_{B\to\infty} \left[\tfrac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^B \\
&= \lim_{B\to\infty} \left(\tfrac{1}{1-\alpha} B^{1-\alpha} - \tfrac{1}{1-\alpha}\right) \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} & \text{als } \alpha > 1, \\ \infty & \text{als } \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Voor $\alpha = 1$ geldt

$$\int_1^\infty x^{-1} dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^B x^{-1} dx = \lim_{B\to\infty} \left[\ln x\right]_1^B = \lim_{B\to\infty} \left(\ln B - \ln 1\right) = \infty.$$

Dus $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ is convergent als $\alpha > 1$ en divergent als $\alpha \leq 1$.

Voorbeeld 2

Bepaal $\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx$.

Voorbeeld 2

Bepaal $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

We bepalen eerst de primitieven van xe^x.
We passen partiële integratie toe met $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$.
Dan volgt

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx = xe^x - \int e^x x' dx \\ &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bepaal $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

We bepalen eerst de primitieven van xe^x.
We passen partiële integratie toe met $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$.
Dan volgt

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx = xe^x - \int e^x x' dx \\ &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} xe^x dx &= \lim_{B\to-\infty} \int_B^0 xe^x dx = \lim_{B\to-\infty} \left[xe^x - e^x\right]_B^0 \\ &= \lim_{B\to-\infty} \Big((0e^0 - e^0) - (Be^B - e^B)\Big) \\ &= \lim_{B\to-\infty} -1 - Be^B + e^B.\end{aligned}$$

Voorbeeld 2 (vervolg)

We hebben gezien dat $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{B \to -\infty} -1 - Be^B + e^B$.

We moeten de limieten uitrekenen van e^B en Be^B voor $B \to -\infty$.

Voorbeeld 2 (vervolg)

We hebben gezien dat $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{B\to-\infty} -1 - Be^B + e^B$.

We moeten de limieten uitrekenen van e^B en Be^B voor $B \to -\infty$.

We substitueren $A = -B$ zodat $A \to \infty$. Dit geeft

$$\lim_{B\to-\infty} e^B = \lim_{A\to\infty} e^{-A} = 0, \quad \lim_{B\to-\infty} Be^B = \lim_{A\to\infty} -Ae^{-A} = 0$$

(standaardlimieten uit Continue wiskunde 1).

Dit leidt uiteindelijk tot $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = -1.$

Voorbeeld 2 (vervolg)

We hebben gezien dat $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{B\to-\infty} -1 - Be^B + e^B.$

We moeten de limieten uitrekenen van e^B en Be^B voor $B \to -\infty$.

We substitueren $A = -B$ zodat $A \to \infty$. Dit geeft

$$\lim_{B\to-\infty} e^B = \lim_{A\to\infty} e^{-A} = 0, \quad \lim_{B\to-\infty} Be^B = \lim_{A\to\infty} -Ae^{-A} = 0$$

(standaardlimieten uit Continue wiskunde 1).

Dit leidt uiteindelijk tot $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = -1.$

Controle: als een functie ≤ 0 is op het integratie-interval dan is de integraal ≤ 0.
Er geldt $xe^x \leq 0$ op $(-\infty, 0)$ en $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx \leq 0$.

Oneigenlijke integralen met $f(x)$ onbegrensd

De grenzen a en b zijn eindig, met $a < b$. Dan definiëren we:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)dx$$

als f continu is op $(a, b]$ en $\lim\limits_{t \downarrow a} f(t) = \pm\infty$ of niet bestaat;

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \uparrow b} \int_a^t f(x)dx$$

als f continu is op $[a, b)$ en $\lim\limits_{t \uparrow b} f(t) = \pm\infty$ of niet bestaat

mits de limieten $\lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)dx$, resp. $\lim_{t \uparrow b} \int_a^t f(x)dx$ bestaan.

We zeggen dat $\int_a^b f(x)dx$ **convergent** is als $\lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)dx$, resp. $\lim_{t \uparrow b} \int_a^t f(x)dx$ bestaat en eindig is;

We zeggen dat $\int_a^b f(x)dx$ **divergent** is als $\lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)dx$, resp. $\lim_{t \uparrow b} \int_a^t f(x)dx$ niet bestaat of $\pm\infty$ is.

Voorbeeld 1

We bepalen $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

Voorbeeld 1

We bepalen $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

Merk op dat $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ continu is op $[0,2)$ en dat $\lim\limits_{t \uparrow 2} \frac{1}{\sqrt{2-t}} = \infty$ ($\sqrt{2-t}$ gaat van de positieve kant naar 0 als $t \uparrow 2$).

Voorbeeld 1

We bepalen $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

Merk op dat $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ continu is op $[0,2)$ en dat $\lim\limits_{t \uparrow 2} \frac{1}{\sqrt{2-t}} = \infty$ ($\sqrt{2-t}$ gaat van de positieve kant naar 0 als $t \uparrow 2$).

We bepalen eerst de onbepaalde integraal $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

Voorbeeld 1

We bepalen $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

Merk op dat $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ continu is op $[0, 2)$ en dat $\lim\limits_{t \uparrow 2} \frac{1}{\sqrt{2-t}} = \infty$
($\sqrt{2-t}$ gaat van de positieve kant naar 0 als $t \uparrow 2$).

We bepalen eerst de onbepaalde integraal $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

In de integrand staat $(2-x)^{-1/2}$. We passen de substitutieregel toe met $u = 2 - x$. Dan is $du = (2-x)' dx = -dx$. Dus $dx = -du$.

Voorbeeld 1

We bepalen $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

Merk op dat $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ continu is op $[0,2)$ en dat $\lim_{t \uparrow 2} \frac{1}{\sqrt{2-t}} = \infty$ ($\sqrt{2-t}$ gaat van de positieve kant naar 0 als $t \uparrow 2$).

We bepalen eerst de onbepaalde integraal $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

In de integrand staat $(2-x)^{-1/2}$. We passen de substitutieregel toe met $u = 2-x$. Dan is $du = (2-x)' dx = -dx$. Dus $dx = -du$. Dit geeft

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \int u^{-1/2}(-du) = -2u^{1/2} + C = -2(2-x)^{1/2} + C.$$

Voorbeeld 1

We bepalen $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

Merk op dat $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ continu is op $[0,2)$ en dat $\lim\limits_{t\uparrow 2} \frac{1}{\sqrt{2-t}} = \infty$ ($\sqrt{2-t}$ gaat van de positieve kant naar 0 als $t \uparrow 2$).

We bepalen eerst de onbepaalde integraal $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

In de integrand staat $(2-x)^{-1/2}$. We passen de substitutieregel toe met $u = 2-x$. Dan is $du = (2-x)' dx = -dx$. Dus $dx = -du$. Dit geeft

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \int u^{-1/2}(-du) = -2u^{1/2} + C = -2(2-x)^{1/2} + C.$$

Dus
$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx &= \lim_{t\uparrow 2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{t\uparrow 2} \Big[-2(2-x)^{1/2} \Big]_0^t \\ &= \lim_{t\uparrow 2} -2(2-t)^{1/2} - (-2 \cdot 2^{1/2}) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

We bepalen $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

Merk op dat $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ continu is op $[0,2)$ en dat $\lim\limits_{t \uparrow 2} \frac{1}{\sqrt{2-t}} = \infty$
($\sqrt{2-t}$ gaat van de positieve kant naar 0 als $t \uparrow 2$).

We bepalen eerst de onbepaalde integraal $\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

In de integrand staat $(2-x)^{-1/2}$. We passen de substitutieregel toe met $u = 2-x$. Dan is $du = (2-x)' dx = -dx$. Dus $dx = -du$. Dit geeft

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \int u^{-1/2}(-du) = -2u^{1/2} + C = -2(2-x)^{1/2} + C.$$

Dus
$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx &= \lim_{t \uparrow 2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{t \uparrow 2} \Big[-2(2-x)^{1/2} \Big]_0^t \\ &= \lim_{t \uparrow 2} -2(2-t)^{1/2} - (-2 \cdot 2^{1/2}) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Controle: $\frac{1}{\sqrt{2-x}} \geq 0$ op $[0,2) \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \geq 0$.

Voorbeeld 2

We bepalen $\int_0^1 \ln x \, dx$.

Voorbeeld 2

We bepalen $\int_0^1 \ln x \, dx$.

Merk op dat $\ln x$ continu is op $(0, 1]$ en $\lim\limits_{t \downarrow 0} \ln t = -\infty$

(nl. neem $s = t^{-1}$; dan $t \downarrow 0 \Rightarrow s \to \infty \Rightarrow \ln t = -\ln s \to -\infty$).

Voorbeeld 2

We bepalen $\int_0^1 \ln x \, dx$.

Merk op dat $\ln x$ continu is op $(0,1]$ en $\lim_{t \downarrow 0} \ln t = -\infty$

(nl. neem $s = t^{-1}$; dan $t \downarrow 0 \Rightarrow s \to \infty \Rightarrow \ln t = -\ln s \to -\infty$).

We hebben in het vorige college gezien dat $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$.

Voorbeeld 2

We bepalen $\int_0^1 \ln x \, dx$.

Merk op dat $\ln x$ continu is op $(0,1]$ en $\lim\limits_{t\downarrow 0} \ln t = -\infty$

(nl. neem $s = t^{-1}$; dan $t \downarrow 0 \Rightarrow s \to \infty \Rightarrow \ln t = -\ln s \to -\infty$).

We hebben in het vorige college gezien dat $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$.

Dus
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x \, dx &= \lim_{t\downarrow 0} \int_t^1 \ln x \, dx = \lim_{t\downarrow 0} \left[x \ln x - x \right]_t^1 \\
&= \lim_{t\downarrow 0} 1 \ln 1 - 1 - (t \ln t - t) = \lim_{t\downarrow 0} -1 - t \ln t + t \\
&= -1 \quad (\lim_{t\downarrow 0} t \ln t = 0 \text{ is een limiet uit CW1}).
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

We bepalen $\int_0^1 \ln x \, dx$.

Merk op dat $\ln x$ continu is op $(0, 1]$ en $\lim\limits_{t \downarrow 0} \ln t = -\infty$

(nl. neem $s = t^{-1}$; dan $t \downarrow 0 \Rightarrow s \to \infty \Rightarrow \ln t = -\ln s \to -\infty$).

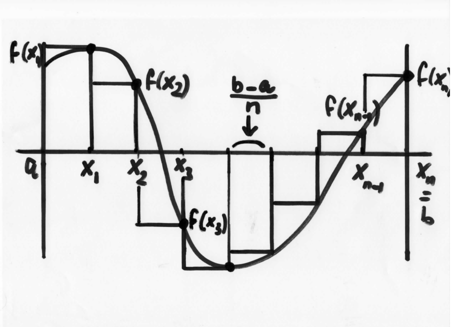
We hebben in het vorige college gezien dat $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$.

Dus
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x \, dx &= \lim_{t \downarrow 0} \int_t^1 \ln x \, dx = \lim_{t \downarrow 0} \left[x \ln x - x \right]_t^1 \\
&= \lim_{t \downarrow 0} 1 \ln 1 - 1 - (t \ln t - t) = \lim_{t \downarrow 0} -1 - t \ln t + t \\
&= -1 \quad (\lim_{t \downarrow 0} t \ln t = 0 \text{ is een limiet uit CW1}).
\end{aligned}$$

Controle: $\ln x \leq 0$ op $(0, 1] \Rightarrow \int_0^1 \ln x \, dx \leq 0$.

We gaan verder met bepaalde integralen als limieten van sommen.

Bepaalde integraal als limiet van een som

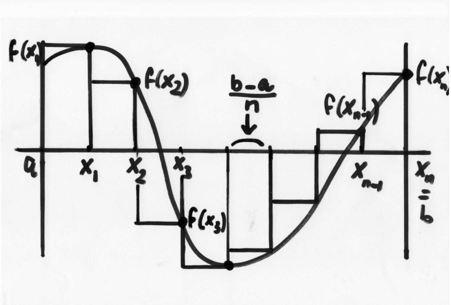


Zij f een continue functie op $[a, b]$.

Verdeel $[a, b]$ in n intervalletjes van gelijke lengte; dan hebben die intervalletjes allemaal lengte $\frac{b-a}{n}$.
Noem de eindpunten van die intervalletjes $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$.
Dus $a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ liggen op een afstand $\frac{b-a}{n}$ van elkaar.

Maak rechthoekjes op die intervalletjes van hoogte $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) = f(b)$.

Bepaalde integraal als limiet van een som

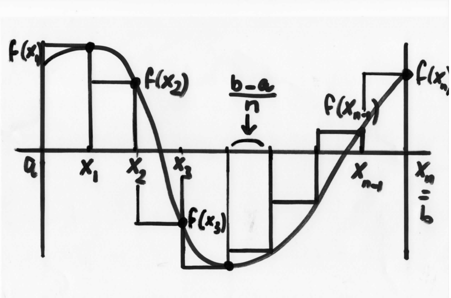


De som van de oppervlaktes van die rechthoekjes (breedte$\times$hoogte, met oppervlaktes onder de x-as negatief genomen) is

$$\frac{b-a}{n} f(x_1) + \frac{b-a}{n} f(x_2) + \cdots + \frac{b-a}{n} f(x_n) = \frac{b-a}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)).$$

Dit benadert $\int_a^b f(x)dx$ steeds beter als $n \to \infty$.

Bepaalde integraal als limiet van een som



De som van de oppervlaktes van die rechthoekjes (breedte×hoogte, met oppervlaktes onder de x-as negatief genomen) is

$$\frac{b-a}{n} f(x_1) + \frac{b-a}{n} f(x_2) + \cdots + \frac{b-a}{n} f(x_n) = \frac{b-a}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)).$$

Dit benadert $\int_a^b f(x)dx$ steeds beter als $n \to \infty$. Dit geeft

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)),$$

waarbij $a, x_1, \ldots, x_n = b$ op een afstand $\frac{b-a}{n}$ van elkaar liggen.

Een speciaal geval

We bekijken het geval $a = 0$, $b = 1$ en dat f een continue functie is op $[0, 1]$.
We verdelen $[0, 1]$ in n intervalletjes van lengte $\frac{1}{n}$.

Zijn $x_1, x_2, \ldots, x_n = 1$ de eindpunten van die intervalletjes.
Dan liggen $0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 1$ op afstand $\frac{1}{n}$ van elkaar, dus
$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1$.

Een speciaal geval

We bekijken het geval $a = 0$, $b = 1$ en dat f een continue functie is op $[0, 1]$.
We verdelen $[0, 1]$ in n intervalletjes van lengte $\frac{1}{n}$.

Zijn $x_1, x_2, \ldots, x_n = 1$ de eindpunten van die intervalletjes.
Dan liggen $0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 1$ op afstand $\frac{1}{n}$ van elkaar, dus
$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1$.

Dit geeft

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(f(\tfrac{1}{n}) + f(\tfrac{2}{n}) + \cdots + f(\tfrac{n}{n})\Big).$$

Voorbeeld

Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Voorbeeld

Bereken $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

We proberen de uitdrukking achter de limiet te schrijven als

$$\frac{1}{n}\Big(f(\tfrac{1}{n}) + \cdots + f(\tfrac{n}{n})\Big) \text{ voor geschikte } f.$$

Dan is de uitkomst van de limiet $\int_0^1 f(x)dx$.

Voorbeeld

Bereken $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

We proberen de uitdrukking achter de limiet te schrijven als

$$\frac{1}{n}\Big(f(\tfrac{1}{n})+\cdots+f(\tfrac{n}{n})\Big) \text{ voor geschikte } f.$$

Dan is de uitkomst van de limiet $\int_0^1 f(x)dx$.

Splits $\frac{1}{n}$ af. Dan vinden we

$$\begin{aligned}
\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2} = \frac{1}{n}\Big(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\Big)\\
&= \frac{1}{n}\Big((\tfrac{1}{n})^2+\cdots+(\tfrac{n}{n})^2\Big)\\
&= \frac{1}{n}\Big(f(\tfrac{1}{n})+\cdots+f(\tfrac{n}{n})\Big) \text{ met } f(x)=x^2.
\end{aligned}$$

Voorbeeld

Bereken $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

We proberen de uitdrukking achter de limiet te schrijven als

$$\frac{1}{n}\Big(f(\tfrac{1}{n}) + \cdots + f(\tfrac{n}{n})\Big) \text{ voor geschikte } f.$$

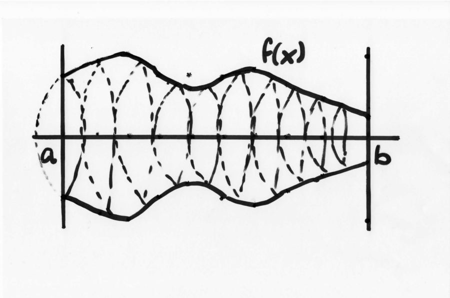
Dan is de uitkomst van de limiet $\int_0^1 f(x)dx$.

Splits $\frac{1}{n}$ af. Dan vinden we

$$\begin{aligned}
\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2} = \frac{1}{n}\Big(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\Big)\\
&= \frac{1}{n}\Big((\tfrac{1}{n})^2+\cdots+(\tfrac{n}{n})^2\Big)\\
&= \frac{1}{n}\Big(f(\tfrac{1}{n})+\cdots+f(\tfrac{n}{n})\Big) \text{ met } f(x)=x^2.
\end{aligned}$$

Dus $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \int_0^1 x^2dx = \big[\tfrac{1}{3}x^3\big]_0^1 = \tfrac{1}{3}1^3 - 0 = \tfrac{1}{3}$.

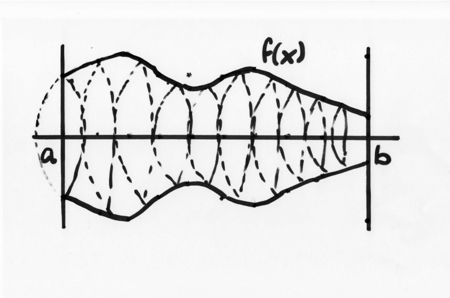
We vervolgen met inhouden van omwentelingslichamen



Gegeven is een continue functie f op $[a, b]$ met $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$.

We willen de grafiek van f om de x-as wentelen en de inhoud bepalen van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

Inhouden van omwentelingslichamen



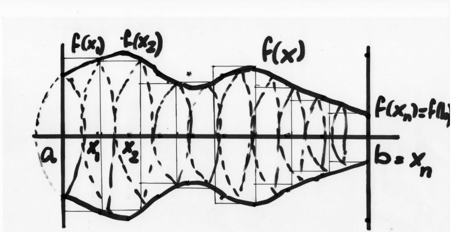
Gegeven is een continue functie f op $[a, b]$ met $f(x) \geq 0$ op $[a, b]$.

We willen de grafiek van f om de x-as wentelen en de inhoud bepalen van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

Er geldt:

De inhoud van het omwentelingslichaam om de x-as van de grafiek van f op $[a, b]$ is gelijk aan
$$\int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Uitleg van de formule voor de inhoud

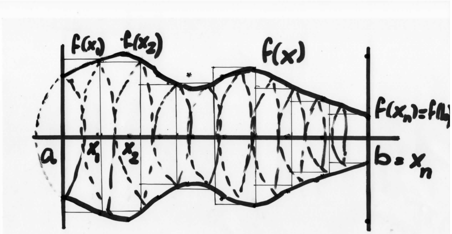


We verdelen het interval $[a, b]$ weer in n intervalletjes van lengte $\frac{b-a}{n}$.
We noemen de eindpunten van die intervalletjes $x_1, \ldots, x_n = b$.

Op die intervalletjes maken we rechthoekjes van hoogtes resp. $f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

We kunnen de inhoud van het omwentelingslichaam van de grafiek van f benaderen door de inhouden van de omwentelingslichamen van de rechthoekjes op te tellen.

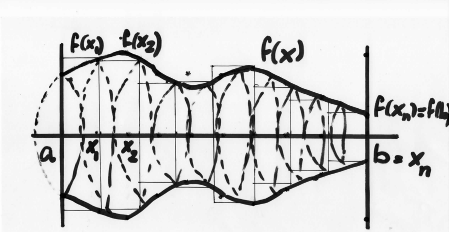
Uitleg van de formule voor de inhoud



Het omwentelingslichaam van een rechthoekje met breedte $\frac{b-a}{n}$ en hoogte $f(x_j)$ is een schijfje met straal $f(x_j)$ en dikte $\frac{b-a}{n}$.
Zo'n schijfje heeft inhoud

$$(\text{oppervlakte cirkel van straal } f(x_j)) \times (\text{dikte } \frac{b-a}{n}) = \frac{b-a}{n} \pi f(x_j)^2.$$

Uitleg van de formule voor de inhoud



Het omwentelingslichaam van een rechthoekje met breedte $\frac{b-a}{n}$ en hoogte $f(x_j)$ is een schijfje met straal $f(x_j)$ en dikte $\frac{b-a}{n}$.
Zo'n schijfje heeft inhoud

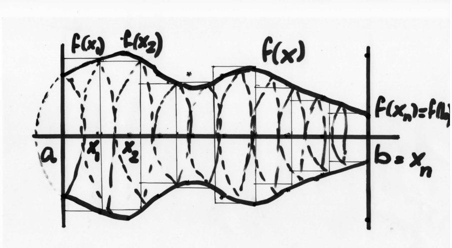
$$(\text{oppervlakte cirkel van straal } f(x_j)) \times (\text{dikte } \tfrac{b-a}{n}) = \tfrac{b-a}{n}\pi f(x_j)^2.$$

Dus de som van de inhouden van de schijfjes is

$$\tfrac{b-a}{n}\pi f(x_1)^2 + \cdots + \tfrac{b-a}{n}\pi f(x_n)^2 = \tfrac{b-a}{n}\left(\pi f(x_1)^2 + \cdots + \pi f(x_n)^2\right)$$

Voor $n \to \infty$ benadert dit de inhoud van het omwentelingslichaam steeds beter.

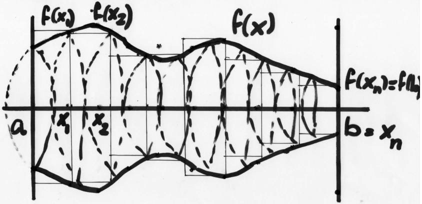
Uitleg van de formule voor de inhoud



Dus

$$(\text{inhoud van het omwentelingslichaam}) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(\pi f(x_1)^2 + \cdots + \pi f(x_n)^2\right).$$

Uitleg van de formule voor de inhoud



Dus

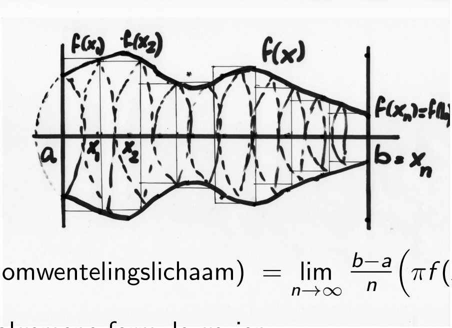
(inhoud van het omwentelingslichaam) $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\Big(\pi f(x_1)^2 + \cdots + \pi f(x_n)^2\Big).$

We hebben een algemene formule gezien

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)),$$ geldig voor **elke** continue functie f.

Als f continu is dan ook πf^2. Dus de formule blijft geldig als we $f(x)$ door $\pi f(x)^2$ vervangen.

Uitleg van de formule voor de inhoud



Dus

(inhoud van het omwentelingslichaam) $= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(\pi f(x_1)^2 + \cdots + \pi f(x_n)^2\right).$

We hebben een algemene formule gezien

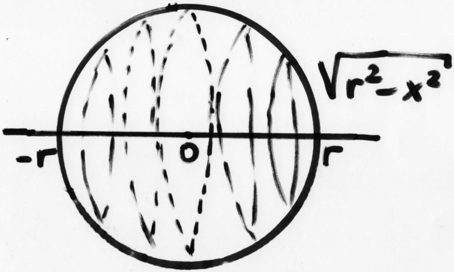
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)),$ geldig voor **elke** continue functie f.

Als f continu is dan ook πf^2. Dus de formule blijft geldig als we $f(x)$ door $\pi f(x)^2$ vervangen.

Dit geeft tenslotte

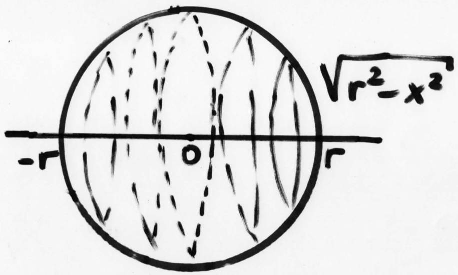
(inhoud van het omwentelingslichaam) $= \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$

Inhoud van een bol



We bepalen de inhoud van een bol van straal r.

Inhoud van een bol

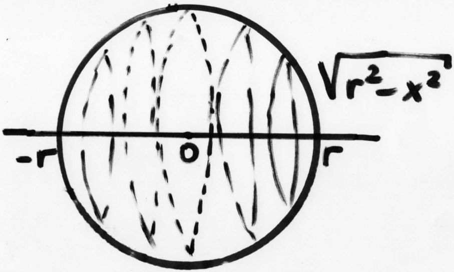


We bepalen de inhoud van een bol van straal r.

De cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal r heeft vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$.
De bovenste helft van de cirkel wordt gegeven door $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Dit is de grafiek van $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Het omwentelingslichaam van de grafiek van $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ geeft een bol van straal r.

Inhoud van een bol

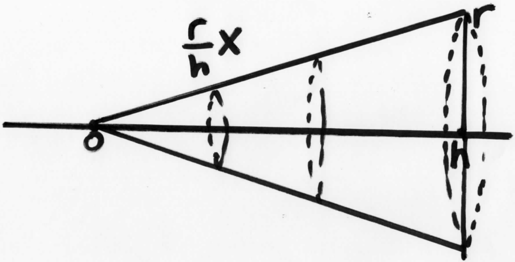


Het omwentelingslichaam van de grafiek van $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ geeft een bol van straal r.

Dus de inhoud van een bol van straal r is

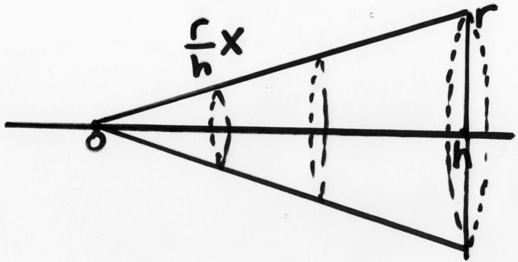
$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx &= \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2) dx = \left[\pi(r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3)\right]_{-r}^{r} \\
&= \pi(r^2 \cdot r - \tfrac{1}{3}r^3) - \pi(r^2(-r) - \tfrac{1}{3}(-r)^3) \\
&= \pi \cdot \tfrac{2}{3}r^3 - \pi \cdot (-\tfrac{2}{3}r^3) = \tfrac{4}{3}\pi r^3.
\end{aligned}$$

Inhoud van een kegel



We bepalen de inhoud van een kegel van straal r en hoogte h.

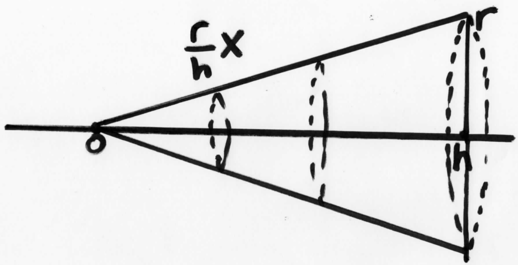
Inhoud van een kegel



We bepalen de inhoud van een kegel van straal r en hoogte h.

We krijgen zo'n kegel door het omwentelingslichaam te nemen van het lijnstuk van $(0, 0)$ naar (h, r) om de x-as, dat is het omwentelingslichaam om de x-as van de grafiek van $f(x) = \frac{r}{h}x$ op $[0, h]$.

Inhoud van een kegel



Het omwentelingslichaam om de x-as van de grafiek van $\frac{r}{h}x$ op $[0, h]$ geeft een kegel van straal r en hoogte h.

Dus de inhoud van zo'n kegel is

$$\begin{aligned} \int_0^h \pi\left(\tfrac{r}{h}x\right)^2 dx &= \int_0^h \pi\frac{r^2}{h^2}\cdot x^2 dx = \left[\pi\cdot\tfrac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}x^3\right]_0^h \\ &= \pi\cdot\tfrac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}\cdot h^3 - 0 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h. \end{aligned}$$

EINDE VAN HET COLLEGE