CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

4e college: Functies van twee variabelen 1

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Functies van twee variabelen

Definieer $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, het twee-dimensionale vlak.
Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$.

Een functie van twee variabelen f met domein D is een voorschrift dat aan elk paar $(x, y) \in D$ een getal $f(x, y) \in \mathbb{R}$ toevoegt. We schrijven $f : D \to \mathbb{R}$.

Functies van twee variabelen

Definieer $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, het twee-dimensionale vlak.
Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$.

Een functie van twee variabelen f met domein D is een voorschrift dat aan elk paar $(x, y) \in D$ een getal $f(x, y) \in \mathbb{R}$ toevoegt. We schrijven $f : D \to \mathbb{R}$.

Voorbeeld 1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.
Deze functie is gedefinieerd voor alle paren (x, y) met $x^2 + y^2 \neq 0$, d.w.z. waarvoor $(x, y) \neq (0, 0)$.
Het domein van f is $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Functies van twee variabelen

Definieer $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, het twee-dimensionale vlak.
Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$.

Een functie van twee variabelen f met domein D is een voorschrift dat aan elk paar $(x,y) \in D$ een getal $f(x,y) \in \mathbb{R}$ toevoegt. We schrijven $f : D \to \mathbb{R}$.

Voorbeeld 1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.
Deze functie is gedefinieerd voor alle paren (x,y) met $x^2 + y^2 \neq 0$, d.w.z. waarvoor $(x,y) \neq (0,0)$.
Het domein van f is $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Voorbeeld 2. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
Deze functie is gedefinieerd voor alle paren (x,y) met $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, d.w.z. met $x^2 + y^2 \leq 9$.

De afstand van (x,y) tot $(0,0)$ wordt gegeven door $\sqrt{x^2 + y^2}$.

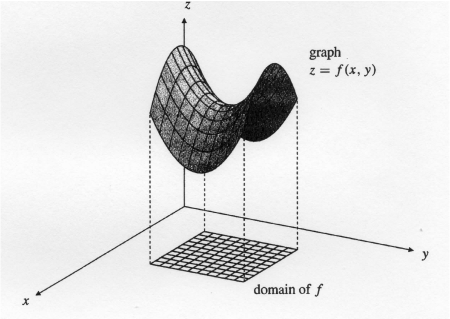
Dus het domein $x^2 + y^2 \leq 9$ van f is de verzameling punten met afstand ≤ 3 tot $(0,0)$, dat is een cirkelschijf (cirkel met binnengebied) met middelpunt $(0,0)$ en straal 3.

Grafieken van functies van twee variabelen

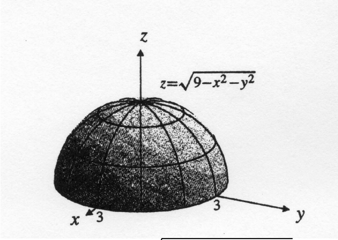
We definiëren $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, de drie-dimensionale ruimte. $\mathbb{R}^3$ heeft drie coördinaatassen, de x-as, y-as en z-as.

Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ en $f : D \to \mathbb{R}$ een functie van twee variabelen met domein D.

De **grafiek** van f bestaat uit alle punten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ met $(x, y) \in D$ en $z = f(x, y)$. Dit is in het algemeen een gekromd oppervlak in de drie-dimensionale ruimte; het domein D ligt in het (x, y)-vlak, d.w.z. het vlak door de x-as en en y-as.

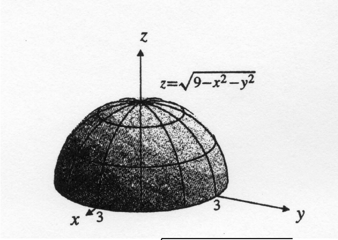


Voorbeeld



We bekijken de functie $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
Het domein van f is de cirkelschijf in het (x, y)-vlak met middelpunt $(0, 0)$ en straal 3.

Voorbeeld

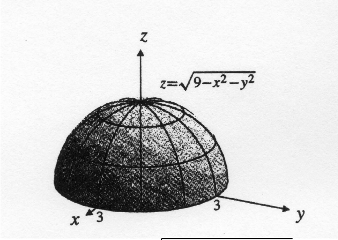


We bekijken de functie $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
Het domein van f is de cirkelschijf in het (x, y)-vlak met middelpunt $(0, 0)$ en straal 3.

In het algemeen wordt een bol in de drie-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$ met middelpunt $(0, 0, 0)$ en straal r gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

De bovenste helft van de bol van straal r wordt gegeven door $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$ en $z \geq 0$, dus door $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Voorbeeld



We bekijken de functie $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
Het domein van f is de cirkelschijf in het (x,y)-vlak met middelpunt $(0,0)$ en straal 3.

In het algemeen wordt een bol in de drie-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$ met middelpunt $(0,0,0)$ en straal r gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

De bovenste helft van de bol van straal r wordt gegeven door $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$ en $z \geq 0$, dus door $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Dus de grafiek van $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ is de bovenste helft van de bol met middelpunt $(0,0,0)$ en straal 3.

Niveaukrommen

Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ en $f: D \to \mathbb{R}$ een functie.

De *niveaukromme* van f of niveau C is de verzameling punten

$$N_C(f) = \{(x, y) \in D : f(x, y) = C\}.$$

Ruwgezegd nemen we de doorsnede van de grafiek $z = f(x, y)$ van f met het vlak $z = C$. Deze doorsnede is een kromme en die projecteren we op het (x, y)-vlak.

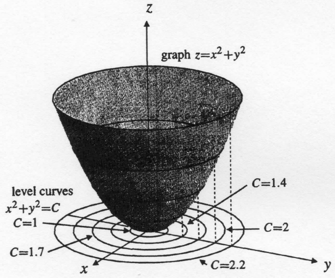


Figure 12.5 The graph of $f(x, y) = x^2 + y^2$ and some level curves of f

Voorbeeld 1

We bekijken de functie $f(x, y) = x^2 + y^2$ op $\mathbb{R}^2$.

De niveaukrommen van f zijn

$$\begin{aligned} N_C(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = C\} \\ &= \begin{cases} \emptyset \text{ (lege verzameling) als } C < 0; \\ \{(0,0)\} \text{(een enkel punt) als } C = 0; \\ \text{een cirkel van straal } \sqrt{C} \text{ als } C > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

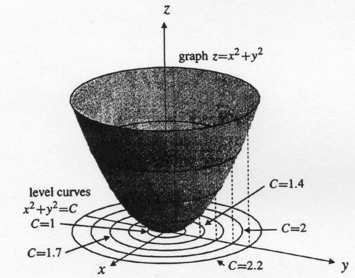


Figure 12.5 The graph of $f(x, y) = x^2 + y^2$ and some level curves of f

We krijgen de grafiek van $f(x, y) = x^2 + y^2$ door de niveaukrommen 'op elkaar te stapelen.'

De doorsnede van de grafiek van f met het vlak $z = C$ $(C > 0)$ is een cirkel van straal $\sqrt{C}$.
Bijvoorbeeld voor $z = 1$ is dit een cirkel van straal 1, op niveau $z = 2$ een cirkel van straal $\sqrt{2}$ enz.

We krijgen de grafiek van f door een parabool om de z-as te draaien. Zo ontstaat een *paraboloïde*.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ $(x + y \neq 0)$.

We bepalen de niveaukrommen van f.

Voorbeeld 2

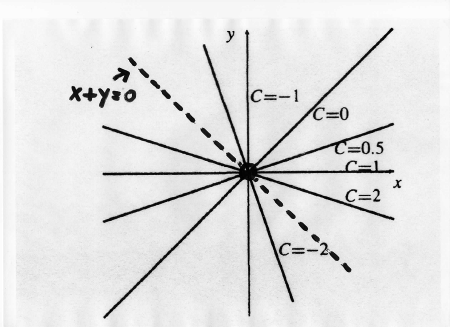
Gegeven is de functie $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ $(x+y \neq 0)$.

We bepalen de niveaukrommen van f.

Er geldt:

$$\begin{aligned}(x,y) \in N_C(f) = \{(x,y) : \tfrac{x-y}{x+y} = C,\ x+y \neq 0\}\\ \Leftrightarrow x-y = C(x+y) = Cx + Cy,\ x+y \neq 0\\ \Leftrightarrow x - Cx = Cy + y,\ x+y \neq 0\\ \Leftrightarrow (1-C)x = (1+C)y,\ x+y \neq 0.\end{aligned}$$

Voorbeeld 2



Gegeven is de functie $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ $(x+y \neq 0)$. We hebben gezien

$$(x,y) \in N_C(f) \Leftrightarrow (1-C)x = (1+C)y,\ x+y \neq 0.$$

Ga na dat $(1-C)x = (1+C)y$, $x+y=0$ lijnen zijn die snijden in $(0,0)$ (lineaire algebra). Dus

$$N_C(f) = \{(x,y) :\ (1-C)x = (1+C)y\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Dit zijn lijnen door $(0,0)$ maar met het punt $(0,0)$ daaruit weggelaten.

Continuïteit en differentieerbaarheid

Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ en $f : D \to \mathbb{R}$ een functie.

We geven geen precieze definities van continuïteit en differentieerbaarheid van functies in twee variabelen (lastig).

Ruwgezegd is een functie f continu in een punt $(x_0, y_0) \in D$ als de grafiek van f geen gat heeft in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$,

Continuïteit en differentieerbaarheid

Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ en $f : D \to \mathbb{R}$ een functie.

We geven geen precieze definities van continuïteit en differentieerbaarheid van functies in twee variabelen (lastig).

Ruwgezegd is een functie f continu in een punt $(x_0, y_0) \in D$ als de grafiek van f geen gat heeft in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$,

en differentieerbaar in (x_0, y_0) als de grafiek van f geen gat en geen knik heeft in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Dus f is wel continu maar niet differentieerbaar in (x_0, y_0) als de grafiek van f geen gat maar wel een knik heeft in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Continuïteit en differentieerbaarheid

Zij D een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ en $f : D \to \mathbb{R}$ een functie.

We geven geen precieze definities van continuïteit en differentieerbaarheid van functies in twee variabelen (lastig).

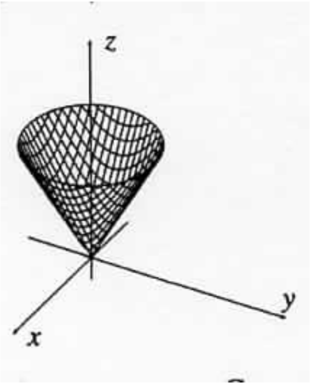
Ruwgezegd is een functie f continu in een punt $(x_0, y_0) \in D$ als de grafiek van f geen gat heeft in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$,

en differentieerbaar in (x_0, y_0) als de grafiek van f geen gat en geen knik heeft in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Dus f is wel continu maar niet differentieerbaar in (x_0, y_0) als de grafiek van f geen gat maar wel een knik heeft in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

In dit college zullen we voornamelijk werken met differentieerbare functies. Er zal niet worden gevraagd om continuïteit resp. differentieerbaarheid te bewijzen.

Voorbeeld



In het plaatje staat de grafiek van $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Dit is een kegel. Er geldt $f(0, 0) = 0$.

Deze kegel heeft geen gat in zijn punt $(0, 0, 0)$ maar wel een knik.

Dus f is wel continu in $(0, 0)$ maar niet differentieerbaar.

We gaan verder met partiële afgeleiden

Partiële afgeleiden

Zij $f(x, y)$ een functie op een domein D in $\mathbb{R}^2$.
Ruwgezegd krijgen we de partiële afgeleide $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ van f naar x door y op te vatten als constante en te differentiëren naar x.
We krijgen de partiële afgeleide $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ van f naar y door x op te vatten als constante en te differentiëren naar y.

Partiële afgeleiden

Zij $f(x, y)$ een functie op een domein D in $\mathbb{R}^2$.
Ruwgezegd krijgen we de partiële afgeleide $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ van f naar x door y op te vatten als constante en te differentiëren naar x.
We krijgen de partiële afgeleide $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ van f naar y door x op te vatten als constante en te differentiëren naar y. De precieze definitie is als volgt:

Voor $(x_0, y_0) \in D$ definiëren we

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned}$$

We krijgen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ door y vast te houden op y_0 en $x = x_0 + h$ te laten variëren.

We krijgen $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ door x vast te houden op x_0 en $y = y_0 + h$ te laten variëren.

Voorbeeld 1

Zij $f(x,y) = \sin(x^2y) + e^x + y^7$. We bepalen de partiële afgeleiden van f.

Voorbeeld 1

Zij $f(x,y) = \sin(x^2y) + e^x + y^7$. We bepalen de partiële afgeleiden van f.

Bepaling van $\frac{\partial f}{\partial x}$.

We vatten y op als constante en differentiëren naar x.

De partiële afgeleide naar x van x^2y is $2xy$.
Wegens de kettingregel is de partiële afgeleide van $\sin(x^2y)$ naar x gelijk aan $\cos(x^2y)2xy$.

De partiële afgeleide van e^x naar x is e^x.

De partiële afgeleide van y^7 naar x is 0, want y wordt opgevat als constante.

Dus $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\cos(x^2y) + e^x$.

Voorbeeld 1

Zij $f(x, y) = \sin(x^2 y) + e^x + y^7$. We bepalen de partiële afgeleiden van f.

Bepaling van $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$.

Voorbeeld 1

Zij $f(x,y) = \sin(x^2y) + e^x + y^7$. We bepalen de partiële afgeleiden van f.

Bepaling van $\frac{\partial f}{\partial y}$.

We vatten nu x op als constante en differentiëren naar y.

De partiële afgeleide van x^2y naar y is x^2.
Wegens de kettingregel is de partiële afgeleide van $\sin(x^2y)$ naar y gelijk aan $\cos(x^2y)x^2$.

De partiële afgeleide van e^x naar y is 0 omdat x als constante wordt opgevat.

De partiële afgeleide van y^7 naar y is $7y^6$.

Dus $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(x^2y) + 7y^6$.

Voorbeeld 2

Zij $f(x, y) = x^y$ $(x > 0)$. We bepalen de partiële afgeleiden van f.

Voorbeeld 2

Zij $f(x, y) = x^y$ $(x > 0)$. We bepalen de partiële afgeleiden van f.

Bepaling van $\frac{\partial f}{\partial x}$.

We vatten y op als constante en differentiëren naar x en vinden zo $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$.

Voorbeeld 2

Zij $f(x,y) = x^y$ $(x > 0)$. We bepalen de partiële afgeleiden van f.

Bepaling van $\frac{\partial f}{\partial x}$.

We vatten y op als constante en differentiëren naar x en vinden zo $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$.

Bepaling van $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Om $\frac{\partial f}{\partial y}$ te bepalen schrijven we $x^y = (e^{\ln x})^y = e^{y \ln x}$. Door x op te vatten als constante en te differentiëren naar y zien we $\frac{\partial f}{\partial y} = (\ln x)e^{y \ln x} = (\ln x)x^y$.

Partiële afgeleiden en differentieerbaarheid

Als een functie f differentieerbaar is dan bestaan $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Omgekeerd zijn er functies f die niet differentieerbaar zijn maar waarvoor $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ wel bestaan.

Dus differentieerbaarheid is een sterkere eis dan dat de partiële afgeleiden bestaan.

Partiële afgeleiden en differentieerbaarheid

Als een functie f differentieerbaar is dan bestaan $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Omgekeerd zijn er functies f die niet differentieerbaar zijn maar waarvoor $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ wel bestaan.

Dus differentieerbaarheid is een sterkere eis dan dat de partiële afgeleiden bestaan.

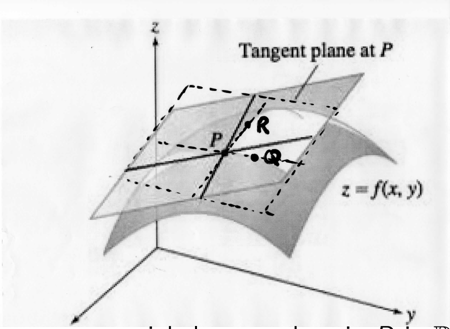
Maar er geldt de volgende stelling:

Stelling

Zij f een functie op een domein D in $\mathbb{R}^2$.
Neem aan dat f continu is op D, en dat $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaan en continu zijn op D. Dan is f differentieerbaar of D.

In dit college bekijken we alleen maar functies waarvan de partiële afgeleiden bestaan en continue zijn, zeg maar 'nette functies.'

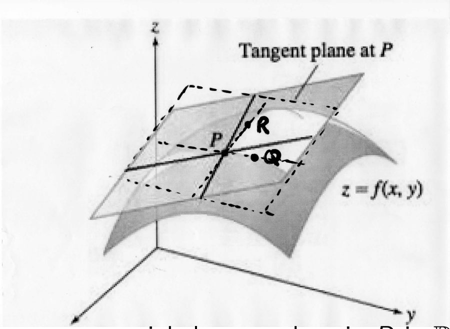
Raakvlakken



Zij f een functie van twee variabelen met domein D in $\mathbb{R}^2$.
Neem aan dat f differentieerbaar is in (x_0, y_0).

Zij $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. We kiezen een punt Q op de grafiek van f door x_0 een klein beetje te veranderen en y_0 vast te laten.
We kiezen ook een punt R op de grafiek van f door x_0 vast te laten en y_0 een klein beetje te veranderen.

Raakvlakken



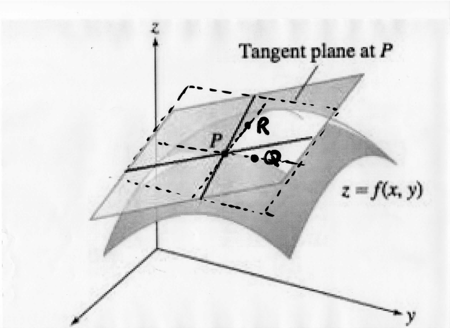
Zij f een functie van twee variabelen met domein D in $\mathbb{R}^2$.
Neem aan dat f differentieerbaar is in (x_0, y_0).

Zij $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. We kiezen een punt Q op de grafiek van f door x_0 een klein beetje te veranderen en y_0 vast te laten.
We kiezen ook een punt R op de grafiek van f door x_0 vast te laten en y_0 een klein beetje te veranderen.

Door P, Q en R gaat precies één vlak.

Als we Q en R naar P laten naderen, dan nadert dit vlak naar het raakvlak aan de grafiek van f in $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Raakvlakken



Het volgende kan worden aangetoond:

Het raakvlak aan de grafiek van f in $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ heeft vergelijking

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ is een *lineaire benadering* van $f(x, y)$ voor (x, y) dichtbij (x_0, y_0).

Uitleg (voor de geïnteresseerden)

Neem $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, $Q = (x_0 + h, y_0, f(x_0 + h, y_0))$, $R = (x_0, y_0 + k, f(x_0, y_0 + k))$ met h, k kleine getalletjes.

P, Q, R liggen op de grafiek van f, met Q y-coördinaat y_0, en R x-coördinaat x_0.

Het vlak door P, Q, R is gegeven door

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} \cdot (y - y_0)$$

(dit is de vergelijking van een vlak, en P, Q, R voldoen er aan).

Uitleg (voor de geïnteresseerden)

Neem $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, $Q = (x_0 + h, y_0, f(x_0 + h, y_0))$, $R = (x_0, y_0 + k, f(x_0, y_0 + k))$ met h, k kleine getalletjes.

P, Q, R liggen op de grafiek van f, met Q y-coördinaat y_0, en R x-coördinaat x_0.

Het vlak door P, Q, R is gegeven door

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} \cdot (y - y_0)$$

(dit is de vergelijking van een vlak, en P, Q, R voldoen er aan).

Als $Q \to P$, d.w.z. $h \to 0$, dan nadert de coëfficiënt van $x - x_0$ naar $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
Als $R \to P$, d.w.z. $k \to 0$, dan nadert de coëfficiënt van $y - y_0$ naar $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Dit geeft als vergelijking voor het raakvlak

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x, y) = e^{xy}$.

We bepalen het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, 2, f(1, 2))$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x, y) = e^{xy}$.

We bepalen het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, 2, f(1, 2))$.

Er geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ (kettingregel).

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x,y) = e^{xy}$.

We bepalen het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1,2,f(1,2))$.

Er geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ (kettingregel).

Dus het raakvlak aan de grafiek van f in $(1,2,f(1,2))$ heeft vergelijking

$$\begin{aligned} z &= f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot(y-2) \\ &= e^2 + 2e^2(x-1) + e^2(y-2). \end{aligned}$$

EINDE VAN HET COLLEGE