CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

5e college: Functies van twee variabelen 2

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Hogere orde partiële afgeleiden

Zij f een functie op een domein D in $\mathbb{R}^2$ waarvan de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaan.

Neem aan dat de partiële afgeleiden daarvan ook weer bestaan. Dan definiëren we:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) \quad \text{(partiële afgeleide van } \tfrac{\partial f}{\partial x} \text{ naar } x\text{)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) \quad \text{(partiële afgeleide van } \tfrac{\partial f}{\partial x} \text{ naar } y\text{)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \quad \text{(partiële afgeleide van } \tfrac{\partial f}{\partial y} \text{ naar } x\text{)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \quad \text{(partiële afgeleide van } \tfrac{\partial f}{\partial y} \text{ naar } y\text{)}
\end{aligned}$$

Dit zijn de *2e orde partiële afgeleiden van f*.

Hogere orde partiële afgeleiden

Zij f een functie op een domein D in $\mathbb{R}^2$ waarvan de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaan.

Neem aan dat de partiële afgeleiden daarvan ook weer bestaan. Dan definiëren we:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) && \text{(partiële afgeleide van } \tfrac{\partial f}{\partial x} \text{ naar } x\text{)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) && \text{(partiële afgeleide van } \tfrac{\partial f}{\partial x} \text{ naar } y\text{)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) && \text{(partiële afgeleide van } \tfrac{\partial f}{\partial y} \text{ naar } x\text{)}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) && \text{(partiële afgeleide van } \tfrac{\partial f}{\partial y} \text{ naar } y\text{)}
\end{aligned}$$

Dit zijn de *2e orde partiële afgeleiden van f.*

Door van de 2e orde partiële afgeleiden de partiële afgeleiden te nemen krijgen we de 3e orde partiële afgeleiden, enz.

Voorbeeld. De 6e orde p.a. $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^2 \partial x} = f_{xxxyyx}$ krijgen we door eerst f partieel naar x te differentiëren, daarna $\frac{\partial f}{\partial x}$ naar y, daarna $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ naar y, en daarna drie keer naar x (we werken van rechts naar links).

Voorbeeld

We bepalen de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van $f(x, y) = e^{xy} + x + y^2$.

Voorbeeld

We bepalen de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van $f(x,y) = e^{xy} + x + y^2$. Er geldt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{xy} + 1 & \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{xy} + 2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2 e^{xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= xye^{xy} + e^{xy} = (xy+1)e^{xy} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= yxe^{xy} + e^{xy} = (xy+1)e^{xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2 e^{xy} + 2
\end{aligned}$$

We zien dat $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Voorbeeld

We bepalen de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van $f(x,y) = e^{xy} + x + y^2$. Er geldt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{xy} + 1 & \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{xy} + 2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2 e^{xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= xye^{xy} + e^{xy} = (xy+1)e^{xy} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= yxe^{xy} + e^{xy} = (xy+1)e^{xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2 e^{xy} + 2
\end{aligned}$$

We zien dat $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Feit

Voor elke 'redelijke' functie f (f zelf en de eerste en tweede orde partiële afgeleiden zijn differentieerbaar) geldt dat $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Voorbeeld

We bepalen de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van $f(x, y) = e^{xy} + x + y^2$. Er geldt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xye^{xy} + e^{xy} = (xy+1)e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = yxe^{xy} + e^{xy} = (xy+1)e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} + 2$$

We zien dat $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Feit

Voor elke 'redelijke' functie f (f zelf en de eerste en tweede orde partiële afgeleiden zijn differentieerbaar) geldt dat $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Dit kan worden gegeneraliseerd naar hogere orde partiële afgeleiden. Bijvoorbeeld $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^6 f}{\partial x \partial y \partial x^2 \partial y \partial x}$, het enige dat er toe doet is hoe vaak we naar x of y differentiëren, niet in welke volgorde we dat doen.

2e Orde partiële afgeleiden worden gebruikt in de bepaling van maxima en minima van functies in twee variabelen.

Maxima en minima

De begrippen absolute/relatieve maxima en minima laten zich eenvoudig veralgemenen naar functies van twee variabelen.

Maxima en minima

De begrippen absolute/relatieve maxima en minima laten zich eenvoudig veralgemenen naar functies van twee variabelen.

Zij f een continue functie op een domein D in $\mathbb{R}^2$ en (x_0, y_0) een punt in D.

- We zeggen dat f in (x_0, y_0) **een absoluut/globaal maximum** op D aanneemt als $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ voor alle $(x, y) \in D$ (hoogste top);
- we zeggen dat f in (x_0, y_0) een **relatief/lokaal maximum** op D aanneemt als $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ voor alle $(x, y) \in D$ in de buurt van (x_0, y_0) (top maar niet noodzakelijk de hoogste);
- we zeggen dat f in (x_0, y_0) een **absoluut/globaal minimum** op D aanneemt als $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ voor alle $(x, y) \in D$ (diepste dal);
- we zeggen dat f in (x_0, y_0) een **relatief/lokaal minimum** op D aanneemt als $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ voor alle $(x, y) \in D$ in de buurt van (x_0, y_0) (dal, maar niet noodzakelijk het diepste).

Maxima en minima van functies van één variabele

Alvorens maxima en minima van functies van twee variabelen te bekijken, herhalen we een stelling uit Continue wiskunde 1 over functies van één variabele.

Maxima en minima van functies van één variabele

Alvorens maxima en minima van functies van twee variabelen te bekijken, herhalen we een stelling uit Continue wiskunde 1 over functies van één variabele.

Stelling

Zij f een continue functie op een interval I in $\mathbb{R}$.
Neem aan dat f in $x_0 \in I$ een maximum of minimum (absoluut of relatief) aanneemt. Dan geldt:

- **(i)** *óf x_0 is een stationair punt van f d.w.z. $f'(x_0) = 0$ (dit betekent dat de raaklijn aan de grafiek van f in $(x_0, f(x_0))$ evenwijdig is aan de x-as);*
- **(ii)** *óf x_0 is een randpunt van I (bijvoorbeeld $x_0 = a$ of b als $I = [a, b]$);*
- **(iii)** *óf f is niet differentieerbaar in x_0.*

Maxima en minima van functies van één variabele

Alvorens maxima en minima van functies van twee variabelen te bekijken, herhalen we een stelling uit Continue wiskunde 1 over functies van één variabele.

Stelling

Zij f een continue functie op een interval I in $\mathbb{R}$.
Neem aan dat f in $x_0 \in I$ een maximum of minimum (absoluut of relatief) aanneemt. Dan geldt:

- **(i)** *óf x_0 is een stationair punt van f d.w.z. $f'(x_0) = 0$ (dit betekent dat de raaklijn aan de grafiek van f in $(x_0, f(x_0))$ evenwijdig is aan de x-as);*
- **(ii)** *óf x_0 is een randpunt van I (bijvoorbeeld $x_0 = a$ of b als $I = [a, b]$);*
- **(iii)** *óf f is niet differentieerbaar in x_0.*

We willen dit veralgemenen naar functies van twee variabelen. In het bijzonder moeten we stationaire punten en randpunten in het twee-dimensionale geval definiëren.

Stationaire punten

Zij f een functie op een gebied D in $\mathbb{R}^2$ en (x_0, y_0) een punt in D.

We noemen (x_0, y_0) een **stationair punt** van f als $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Stationaire punten

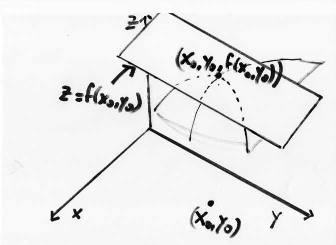
Zij f een functie op een gebied D in $\mathbb{R}^2$ en (x_0, y_0) een punt in D.

We noemen (x_0, y_0) een **stationair punt** van f als $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

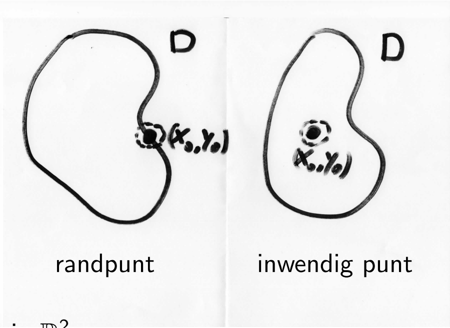
Als (x_0, y_0) een stationair punt is van f dan is de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ gegeven door

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = f(x_0, y_0).$$

Dit vlak is evenwijdig aan het vlak $z = 0$, dat is het vlak door de x-as en de y-as.



Randpunten en inwendige punten



Zij D een gebied in $\mathbb{R}^2$.

Een punt (x_0, y_0) heet een **randpunt** van D als elk cirkelschijfje om (x_0, y_0), hoe klein ook, zowel punten in D als punten buiten D bevat.

En punt (x_0, y_0) noemen we een **inwendig punt** van D als er een cirkelschijfje om (x_0, y_0) is dat helemaal in D ligt.

Maxima en minima van functies van twee variabelen

Stelling

Zij f een continue functie op een gebied D in $\mathbb{R}^2$.
Neem aan dat f in $(x_0, y_0) \in D$ een maximum of minimum (absoluut of relatief) aanneemt. Dan geldt:

- **(i)** *óf (x_0, y_0) is een stationair punt van f d.w.z. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$;*
- **(ii)** *óf (x_0, y_0) is een randpunt van D;*
- **(iii)** *óf f is niet differentieerbaar in (x_0, y_0).*

In Continue wiskunde 2 zullen we geval (iii) niet tegenkomen.

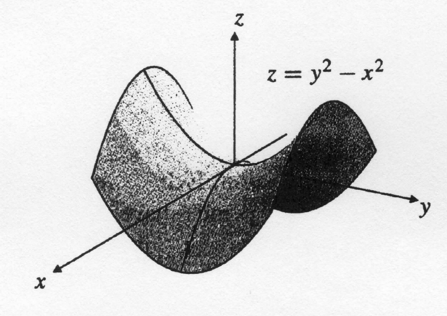
Voorlopig bekijken we alleen functies f met domein $\mathbb{R}^2$.
$\mathbb{R}^2$ heeft geen randpunten dus alleen geval (i) is van toepassing.

Classificatie van stationaire punten

Zij f een differentieerbare functie op een gebied D in $\mathbb{R}^2$ en $(x_0, y_0) \in D$ een stationair punt van f.

We willen kunnen bepalen of f in (x_0, y_0) een maximum of minimum aanneemt of geen van beide.

Als (x_0, y_0) een stationair punt is van f waarin f geen maximum of minimum aanneemt, dan noemen we (x_0, y_0) een **zadelpunt** van f.



Classificatie van stationaire punten

Zij f een 'redelijke' functie op een gebied D in $\mathbb{R}^2$ en $(x_0, y_0) \in D$ een stationair punt van f.

Definieer

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \ B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0), \ C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

$$H := AC - B^2 \quad \text{(Hessiaan)}$$

Classificatie van stationaire punten

Zij f een 'redelijke' functie op een gebied D in $\mathbb{R}^2$ en $(x_0, y_0) \in D$ een stationair punt van f.

Definieer

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ \ B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0),\ \ C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

$$H := AC - B^2 \ \ \text{(Hessiaan)}$$

Classificatiestelling voor stationaire punten

- $A > 0,\ H > 0 \Rightarrow f$ *neemt in* (x_0, y_0) *een minimum op* D *aan;*
- $A < 0,\ H > 0 \Rightarrow f$ *neemt in* (x_0, y_0) *een maximum op* D *aan;*
- $H < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ *is een zadelpunt van* f*.*

Classificatie van stationaire punten

Zij f een 'redelijke' functie op een gebied D in $\mathbb{R}^2$ en $(x_0, y_0) \in D$ een stationair punt van f.

Definieer

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0),\ C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$
$$H := AC - B^2 \ \text{(Hessiaan)}$$

Classificatiestelling voor stationaire punten

- $A > 0$, $H > 0 \Rightarrow f$ *neemt in* (x_0, y_0) *een minimum op* D *aan;*
- $A < 0$, $H > 0 \Rightarrow f$ *neemt in* (x_0, y_0) *een maximum op* D *aan;*
- $H < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ *is een zadelpunt van* f*.*

De classificatiestelling geeft geen uitsluitsel als $H = 0$.
In dat geval moet iets anders worden bedacht om (x_0, y_0) te classificeren.

De stelling geeft geen informatie over of een eventueel minimum of maximum dat in (x_0, y_0) wordt aangenomen absoluut of relatief is.
Dat moet apart worden onderzocht (en dat is vaak lastig).

Voorbeeld

We willen de extremen (maxima en minima) bepalen van $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$ op $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^2$ heeft geen randpunten dus eventuele extremen van f worden aangenomen in stationaire punten.

In stap 1 bepalen we de stationaire punten van f, d.w.z. de oplossingen van het stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (de stationaire punten moeten dus aan beide vergelijkingen *tegelijk* voldoen);

in stap 2 classificeren we deze stationaire punten met behulp van de classificatiestelling.

Bepaling van de stationaire punten van f

Gegeven is $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$.

De stationaire punten van f zijn de oplossingen van het stelsel van twee (niet-lineaire) vergelijkingen met twee onbekenden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 0$$

(de komma betekent dat (x, y) aan de twee vergelijkingen tegelijk moet voldoen).

Bepaling van de stationaire punten van f

Gegeven is $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$.

De stationaire punten van f zijn de oplossingen van het stelsel van twee (niet-lineaire) vergelijkingen met twee onbekenden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 0$$

(de komma betekent dat (x, y) aan de twee vergelijkingen tegelijk moet voldoen).

Omdat $2xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $y = 0$ geldt:

$$\begin{aligned} &3x^2 + y^2 - 1 = 0,\ 2xy = 0 \\ &\quad\Leftrightarrow (3x^2 + y^2 = 1,\ x = 0) \text{ of } (3x^2 + y^2 = 1,\ y = 0) \\ &\quad\Leftrightarrow (y^2 = 1, x = 0) \text{ of } (3x^2 = 1, y = 0) \\ &\quad\Leftrightarrow (y = \pm 1, x = 0) \text{ of } (x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}, y = 0). \end{aligned}$$

Dus de verzameling stationaire punten van f is

$$\Big\{(0, 1), (0, -1), (\tfrac{1}{3}\sqrt{3}, 0), (-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}, 0)\Big\}.$$

Classificatie van de stationaire punten van f

Voor $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x$ geldt:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 1,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy,$

stationaire punten: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(\frac{1}{3}\sqrt{3},0)$, $(-\frac{1}{3}\sqrt{3},0)$,

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x,\ H = AC - B^2.$

Classificatie van de stationaire punten van f

Voor $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$ geldt:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$,

stationaire punten: $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$, $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$,

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$, $H = AC - B^2$.

stationair punt	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{H}$	**classificatie**
$(0, 1)$	0	2	0	$-4 < 0$	zadelpunt
$(0, -1)$	0	-2	0	$-4 < 0$	zadelpunt
$(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$	$2\sqrt{3} > 0$	0	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$4 > 0$	minimum
$(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$	$-2\sqrt{3} < 0$	0	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$4 > 0$	maximum

Classificatie van de stationaire punten van f

Voor $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x$ geldt:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 1, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy,$

stationaire punten: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(\frac{1}{3}\sqrt{3},0)$, $(-\frac{1}{3}\sqrt{3},0)$,

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y, \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x, \ H = AC - B^2.$

stationair punt	***A***	***B***	***C***	***H***	**classificatie**
$(0,1)$	0	2	0	$-4 < 0$	zadelpunt
$(0,-1)$	0	-2	0	$-4 < 0$	zadelpunt
$(\frac{1}{3}\sqrt{3},0)$	$2\sqrt{3} > 0$	0	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$4 > 0$	minimum
$(-\frac{1}{3}\sqrt{3},0)$	$-2\sqrt{3} < 0$	0	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$4 > 0$	maximum

Zijn het minimum en maximum absoluut of relatief?

Classificatie van de stationaire punten van f

Voor $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x$ geldt:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 1, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy,$

stationaire punten: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$, $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$,

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y, \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x, \ H = AC - B^2.$

stationair punt	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{H}$	**classificatie**
$(0,1)$	0	2	0	$-4 < 0$	zadelpunt
$(0,-1)$	0	-2	0	$-4 < 0$	zadelpunt
$(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$	$2\sqrt{3} > 0$	0	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$4 > 0$	minimum
$(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$	$-2\sqrt{3} < 0$	0	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$4 > 0$	maximum

Zijn het minimum en maximum absoluut of relatief? Er geldt

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} x^3 - x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - x = -\infty,$$

dus het minimum en maximum zijn **relatief**.

Nog een voorbeeld

We willen de extremen bepalen van $f(x, y) = (x + y - 1)^2$ op $\mathbb{R}^2$.

We zien direct dat $f(x, y) \geq 0$ voor alle x, y en dat $f(x, y) = 0$ precies als $x + y = 1$. Dus f neemt in alle punten op de lijn $x + y = 1$ zijn absolute minimum aan.

Wat geeft de classificatiestelling?

Nog een voorbeeld

We willen de extremen bepalen van $f(x,y) = (x+y-1)^2$ op $\mathbb{R}^2$.

We zien direct dat $f(x,y) \geq 0$ voor alle x, y en dat $f(x,y) = 0$ precies als $x+y=1$. Dus f neemt in alle punten op de lijn $x+y=1$ zijn absolute minimum aan.

Wat geeft de classificatiestelling?

Omdat $\mathbb{R}^2$ geen randpunten heeft neemt f zijn extremen in stationaire punten aan.

Er geldt: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+y-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y-1)$, dus de punten op de lijn $x+y=1$ zijn de stationaire punten van f.

Er geldt: $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $H = AC - B^2 = 0$.

Dus de classificatiestelling geeft geen uitsluitsel of f in de punten op de lijn $x+y=1$ maxima of minima aanneemt of dat dat zadelpunten zijn van f.

EINDE VAN HET COLLEGE