CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

6e college: Functies van twee variabelen 3

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Nog een berekening van maxima en minima

Gegeven is de functie $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$.
We willen de maxima en minima van deze functie op $\mathbb{R}^2$ bepalen.
Vergeleken met het voorbeeld uit het vorige college komen enkele andere aspecten te voorschijn.

De maxima en minima van f worden aangenomen in stationaire punten van f omdat $\mathbb{R}^2$ geen randpunten heeft.

We bepalen weer de stationaire punten van f, classificeren deze, en gaan voor eventuele maxima en minima na of ze absoluut of relatief zijn.

Bepaling van de stationaire punten van f

Gegeven is $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$.

Er geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3$.

Bepaling van de stationaire punten van f

Gegeven is $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$.

Er geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3$. Dus

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ stat. pnt van } f \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4y = 0,\ -4x + 4y^3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 = y,\ y^3 = x.
\end{aligned}$$

Bepaling van de stationaire punten van f

Gegeven is $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$.

Er geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3$. Dus

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ stat. pnt van } f \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4y = 0,\ -4x + 4y^3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^3 = y,\ y^3 = x.
\end{aligned}$$

Uit $x^3 = y$, $y^3 = x$ volgt $x^9 = y^3 = x$, dus $x^9 = x$, dus $x^9 - x = 0$ dus $x(x^8 - 1) = 0$, dus $x = 0,\ -1$ of 1.

Bepaling van de stationaire punten van f

Gegeven is $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$.

Er geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3$. Dus

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ stat. pnt van } f \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4y = 0,\ -4x + 4y^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 = y,\ y^3 = x. \end{aligned}$$

Uit $x^3 = y$, $y^3 = x$ volgt $x^9 = y^3 = x$, dus $x^9 = x$, dus $x^9 - x = 0$ dus $x(x^8 - 1) = 0$, dus $x = 0,\ -1$ of 1.

Het blijkt dat er voor elke $x = 0, -1, 1$ een y bestaat zodat $x^3 = y$ en $y^3 = x$.

We vinden zo, dat $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$ de stationaire punten van f zijn.

Classificatie van de stationaire punten van f

Voor $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$ geldt:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3$,

stationaire punten: $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$.

Classificatie van de stationaire punten van f

Voor $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$ geldt:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3,$

stationaire punten: $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2,$
$H = AC - B^2.$

Classificatie van de stationaire punten van f

Voor $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$ geldt:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3,$

stationaire punten: $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2,$
$H = AC - B^2.$

stationair punt	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{H}$	**classificatie**
$(0,0)$	0	-4	0	$-16 < 0$	zadelpunt
$(-1,-1)$	$12 > 0$	-4	12	$128 > 0$	minimum
$(1,1)$	$12 > 0$	-4	12	$128 > 0$	minimum

Zijn de minima absoluut of relatief?

Gegeven is de functie $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$.

f neemt in $(-1, -1)$ en $(1, 1)$ minima aan.
Er geldt $f(-1, -1) = -2$, $f(1, 1) = -2$.

Zijn deze minima absoluut of relatief op $\mathbb{R}^2$?

Zijn de minima absoluut of relatief?

Gegeven is de functie $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$.

f neemt in $(-1, -1)$ en $(1, 1)$ minima aan.
Er geldt $f(-1, -1) = -2$, $f(1, 1) = -2$.

Zijn deze minima absoluut of relatief op $\mathbb{R}^2$?

De gebruikelijke manier om te bewijzen dat een minimum relatief is, is om te laten zien dat er een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is waarop $f(x, y) \to -\infty$.

Het lukt hier niet om zo'n deelverzameling te vinden. Dit suggereert dat het minimum misschien wel absoluut is. Maar hoe bewijs je dit?

Zijn de minima absoluut of relatief?

Gegeven is de functie $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$.

f neemt in $(-1,-1)$ en $(1,1)$ minima aan.
Er geldt $f(-1,-1) = -2$, $f(1,1) = -2$.

Zijn deze minima absoluut of relatief op $\mathbb{R}^2$?

De gebruikelijke manier om te bewijzen dat een minimum relatief is, is om te laten zien dat er een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is waarop $f(x,y) \to -\infty$.

Het lukt hier niet om zo'n deelverzameling te vinden. Dit suggereert dat het minimum misschien wel absoluut is. Maar hoe bewijs je dit?

Een methode is om zoveel mogelijk kwadraten af te splitsen.
Na wat gepuzzel (hoef je niet op een tentamen te kunnen!) vind je dat

$$f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2(x-y)^2 - 2.$$

Zijn de minima absoluut of relatief?

Gegeven is de functie $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$.

f neemt in $(-1, -1)$ en $(1, 1)$ minima aan.
Er geldt $f(-1, -1) = -2$, $f(1, 1) = -2$.

Zijn deze minima absoluut of relatief op $\mathbb{R}^2$?

De gebruikelijke manier om te bewijzen dat een minimum relatief is, is om te laten zien dat er een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is waarop $f(x, y) \to -\infty$.

Het lukt hier niet om zo'n deelverzameling te vinden. Dit suggereert dat het minimum misschien wel absoluut is. Maar hoe bewijs je dit?

Een methode is om zoveel mogelijk kwadraten af te splitsen.
Na wat gepuzzel (hoef je niet op een tentamen te kunnen!) vind je dat

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4 = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2 - 2.$$

Omdat kwadraten altijd ≥ 0 zijn volgt hieruit dat $f(x, y) \geq -2$ voor alle x, y.

We hebben al gezien dat $f(-1, -1) = -2$, $f(1, 1) = -2$.

Dus f neemt in $(-1, -1)$, $(1, 1)$ absolute minima aan.

We bekijken nu maxima en minima van functies op gesloten en begrensde gebieden in $\mathbb{R}^2$.

Maxima en minima op gesloten en begrensde gebieden

Een stelling uit Continue wiskunde 1 voor functies van één variabele zegt dat een continue functie f op een gesloten en begrend interval $[a, b]$ altijd een absoluut maximum en een absoluut minimum aanneemt.

We willen dit veralgemenen naar functies van twee variabelen, maar daarvoor moeten we iets twee-dimensionaals hebben in plaats van een gesloten en begrensd interval $[a, b]$, een zogenaamd gesloten en begrensd gebied.

Gesloten en begrensde gebieden

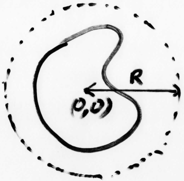
gesloten gebied **niet gesloten gebied**

We noemen een deelverzameling (ook wel gebied genoemd) D van $\mathbb{R}^2$ **gesloten** als D al zijn randpunten bevat.

Gesloten en begrensde gebieden

gesloten gebied **niet gesloten gebied**

We noemen een deelverzameling (ook wel gebied genoemd) D van $\mathbb{R}^2$ **gesloten** als D al zijn randpunten bevat.



We noemen een deelverzameling D van $\mathbb{R}^2$ **begrensd** als er een getal R is zodat elk punt van D afstand $\leq R$ heeft tot $(0, 0)$.

Voorbeeld

$x^2 + y^2 \leq 1$ rand $x^2 + y^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 + y^2 < 1$ rand $x^2 + y^2 = 1$

De linkerfiguur is het gebied gegeven door $x^2 + y^2 \leq 1$.
De randpunten van dit gebied zijn de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.
Die behoren allemaal tot het gebied; dus het gebied is gesloten.

Voorbeeld

$x^2 + y^2 \leq 1$ rand $x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 < 1$ rand $x^2 + y^2 = 1$

De linkerfiguur is het gebied gegeven door $x^2 + y^2 \leq 1$.
De randpunten van dit gebied zijn de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.
Die behoren allemaal tot het gebied; dus het gebied is gesloten.

De rechterfiguur is het gebied gegeven door $x^2 + y^2 < 1$.
De randpunten van dit gebied zijn de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.
Die behoren geen van allen tot het gebied; dus het gebied is niet gesloten.

Voorbeeld

$x^2 + y^2 \leq 1$ rand $x^2 + y^2 = 1$ — $x^2 + y^2 < 1$ rand $x^2 + y^2 = 1$

De linkerfiguur is het gebied gegeven door $x^2 + y^2 \leq 1$.
De randpunten van dit gebied zijn de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.
Die behoren allemaal tot het gebied; dus het gebied is gesloten.

De rechterfiguur is het gebied gegeven door $x^2 + y^2 < 1$.
De randpunten van dit gebied zijn de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.
Die behoren geen van allen tot het gebied; dus het gebied is niet gesloten.

Gebieden worden in het algemeen gedefinieerd door ongelijkheden. Als dit allemaal ongelijkheden zijn met $\leq$ of $\geq$ dan is het gebied gesloten.

Maxima en minima op gesloten en begrensde gebieden

Er geldt het volgende:

Stelling

Zij f een continue functie op een gesloten en begrensd gebied D in $\mathbb{R}^2$. Dan neemt f op D een absoluut maximum en een absoluut minimum aan.

Maxima en minima op gesloten en begrensde gebieden

Er geldt het volgende:

Stelling

Zij f een continue functie op een gesloten en begrensd gebied D in $\mathbb{R}^2$. Dan neemt f op D een absoluut maximum en een absoluut minimum aan.

Het is essentieel dat het gebied gesloten is.

Bekijk bijvoorbeeld de functie $f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ op $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Dit gebied D is niet gesloten. Er geldt dat $f(x, y) \to \infty$ als $x^2 + y^2 \uparrow 1$. Dus f neemt geen absoluut maximum aan op D.

Herhaling van een stelling

We herhalen een stelling uit het vorige college.

Stelling

Zij f een continue functie op een gebied D in $\mathbb{R}^2$ en $(x_0, y_0) \in D$. Neem aan dat f in (x_0, y_0) een maximum of minimum (absoluut of relatief) op D aanneemt. Dan geldt:

(i) *óf (x_0, y_0) is een stationair punt van f d.w.z. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$;*

(ii) *óf (x_0, y_0) is een randpunt van D;*

(iii) *óf f is niet differentieerbaar in (x_0, y_0).*

Herhaling van een stelling

We herhalen een stelling uit het vorige college.

Stelling

Zij f een continue functie op een gebied D in $\mathbb{R}^2$ en $(x_0, y_0) \in D$. Neem aan dat f in (x_0, y_0) een maximum of minimum (absoluut of relatief) op D aanneemt. Dan geldt:

(i) *óf (x_0, y_0) is een stationair punt van f d.w.z. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$;*

(ii) *óf (x_0, y_0) is een randpunt van D;*

(iii) *óf f is niet differentieerbaar in (x_0, y_0).*

Zoals gezegd zullen we geval (iii) niet tegenkomen.
Maar in het vervolg bekijken we functies op gesloten en begrensde gebieden en daar hebben we zowel met geval (i) als geval (ii) te maken.

Voorbeeld 1

We willen getallen $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ bepalen zodat $x + y + z = 1$ en zodat xyz maximaal is.

Voorbeeld 1

We willen getallen $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ bepalen zodat $x + y + z = 1$ en zodat xyz maximaal is.

Er geldt $z = 1 - x - y$. Door dit te substitueren gaat xyz over in $f(x, y) := xy(1 - x - y)$ en gaat de conditie $z \geq 0$ over in $1 - x - y \geq 0$ ofwel $x + y \leq 1$.

Voorbeeld 1

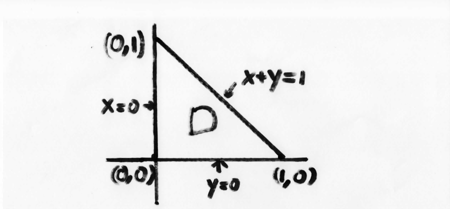
We willen getallen $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ bepalen zodat $x + y + z = 1$ en zodat xyz maximaal is.

Er geldt $z = 1 - x - y$. Door dit te substitueren gaat xyz over in $f(x, y) := xy(1 - x - y)$ en gaat de conditie $z \geq 0$ over in $1 - x - y \geq 0$ ofwel $x + y \leq 1$.

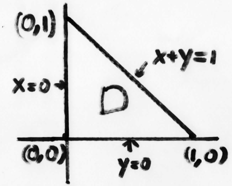
Dus het probleem kan als volgt worden geherformuleerd:

Gegeven zijn de functie $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ en het gebied $D := \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$;
bepaal in welk punt (x, y) de functie f zijn absolute maximum op D aanneemt.

Uit deze x, y kan dan $z = 1 - x - y$ worden berekend.



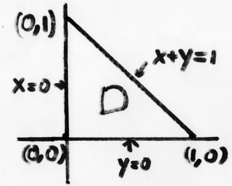
Voorbeeld 1



We willen het punt bepalen waar $f(x,y) = xy(1-x-y)$ op $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$ zijn absolute maximum aanneemt.

Het gebied D is gesloten en begrensd. Dus f neemt op D een absoluut minimum en een absoluut maximum aan.
Dit minimum en maximum worden aangenomen óf in een randpunt van D, óf in een stationair punt van f.

Voorbeeld 1



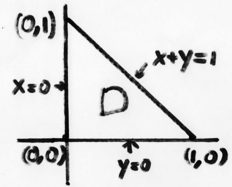
We willen het punt bepalen waar $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ op $D = \{(x, y) : x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$ zijn absolute maximum aanneemt.

Het gebied D is gesloten en begrensd. Dus f neemt op D een absoluut minimum en een absoluut maximum aan.
Dit minimum en maximum worden aangenomen óf in een randpunt van D, óf in een stationair punt van f.

Op D geldt $x \geq 0$, $y \geq 0$, $1 - x - y \geq 0$ dus $f(x, y) \geq 0$.
Op de rand van D geldt $x = 0$ of $y = 0$ of $x + y = 1$ dus $f(x, y) = 0$.

Dus f neemt in alle randpunten van D zijn absolute minimum aan.

Voorbeeld 1



We willen het punt (x, y) bepalen waar $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ op $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ zijn absolute maximum aanneemt.

f neemt zijn absolute maximum op D aan óf in een randpunt van D óf in een stationair punt van f.

Maar f neemt in elk randpunt van D zijn absolute minimum op D aan. Dus f moet zijn absolute maximum op D wel aannemen in een stationair punt. Bovendien mag dat niet op de rand liggen.

Dus f moet zijn absolute maximum aannemen in een stationair punt met $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$.

Voorbeeld 1

De functie $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ neemt zijn absolute maximum op $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ aan in een stationair punt met $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$.

Voorbeeld 1

De functie $f(x,y) = xy(1-x-y)$ neemt zijn absolute maximum op $D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ aan in een stationair punt met $x > 0$, $y > 0$, $x+y < 1$.

Er geldt: $f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$,
$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2xy - y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x - x^2 - 2xy$. Dus

$$(x,y) \text{ stat.pnt. van } f \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2xy - y^2 = y(1-2x-y) = 0, \\ x - x^2 - 2xy = x(1-x-2y) = 0. \end{cases}$$

Voorbeeld 1

De functie $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ neemt zijn absolute maximum op $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ aan in een stationair punt met $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$.

Er geldt: $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$,
$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2xy - y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x - x^2 - 2xy$. Dus

$$(x, y) \text{ stat.pnt. van } f \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2xy - y^2 = y(1 - 2x - y) = 0, \\ x - x^2 - 2xy = x(1 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

We hebben de punten met $x = 0$ of $y = 0$ uitgesloten, dus we hoeven alleen maar te kijken naar de stationaire punten met $1 - 2x - y = 0$, $1 - x - 2y = 0$.

Voorbeeld 1

De functie $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ neemt zijn absolute maximum op $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ aan in een stationair punt met $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$.

Er geldt: $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$,
$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2xy - y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x - x^2 - 2xy$. Dus

$$(x, y) \text{ stat.pnt. van } f \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2xy - y^2 = y(1 - 2x - y) = 0, \\ x - x^2 - 2xy = x(1 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

We hebben de punten met $x = 0$ of $y = 0$ uitgesloten, dus we hoeven alleen maar te kijken naar de stationaire punten met $1 - 2x - y = 0$, $1 - x - 2y = 0$.

Het enige punt dat hieraan voldoet is $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Dus f neemt voor $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ zijn absolute maximum op D aan.

Voorbeeld 1: conclusie

We wilden getallen x, y, z bepalen met $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ en $x + y + z = 1$ waarvoor xyz maximaal is.

Door $z = 1 - x - y$ te substitueren vertaalden we dit in het probleem om het punt (x, y) te bepalen waarin $f(x, y) := xy(1 - x - y)$ zijn absolute maximum op $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ aanneemt.

We hebben gezien dat f zijn absolute maximum op D aanneemt voor $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

Dus de gevraagde getallen zijn $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 1 - x - y = \frac{1}{3}$.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn $f(x, y) = 3x - 4y$ en
$D = \{(x, y) : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$.

We willen de punten bepalen waarin f zijn absolute minimum en maximum op D aanneemt.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn $f(x, y) = 3x - 4y$ en
$D = \{(x, y) : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$.

We willen de punten bepalen waarin f zijn absolute minimum en maximum op D aanneemt.

Het gebied D is gesloten en begrensd. Dus f neemt inderdaad een absoluut minimum en maximum op D aan.
Dit absolute minimum en maximum worden aangenomen óf in een randpunt van D, óf in een stationair punt van f.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn $f(x, y) = 3x - 4y$ en
$D = \{(x, y) : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$.

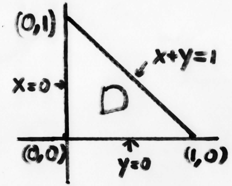
We willen de punten bepalen waarin f zijn absolute minimum en maximum op D aanneemt.

Het gebied D is gesloten en begrensd. Dus f neemt inderdaad een absoluut minimum en maximum op D aan.
Dit absolute minimum en maximum worden aangenomen óf in een randpunt van D, óf in een stationair punt van f.

Maar $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4$ voor alle x, y.
Dus f heeft geen stationaire punten.

We concluderen dat f zijn absolute minimum en maximum op D aanneemt in randpunten van D.

Voorbeeld 2

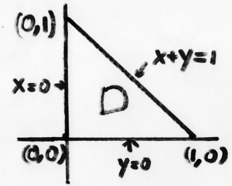


De functie $f(x, y) = 3x - 4y$ neemt zijn absolute minimum en maximum aan in randpunten van D.

De rand van D bestaat uit de lijnstukken van $(0, 0)$ naar $(1, 0)$; van $(1, 0)$ naar $(0, 1)$; en van $(0, 1)$ naar $(0, 0)$.

We bekijken deze drie lijnstukken apart.

Voorbeeld 2: van $(0,0)$ naar $(1,0)$



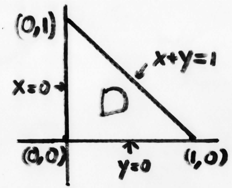
De functie $f(x,y) = 3x - 4y$ neemt zijn absolute minimum en maximum aan in randpunten van D.

De rand van D bestaat uit de lijnstukken van $(0,0)$ naar $(1,0)$; van $(1,0)$ naar $(0,1)$; en van $(0,1)$ naar $(0,0)$.

Op het lijnstuk van $(0,0)$ naar $(1,0)$ is $y = 0$ dus $f(x,y) = 3x$.

Als we lopen van $(0,0)$ naar $(1,0)$ dan stijgt x van 0 naar 1, dus $f(x,y)$ stijgt van 0 naar 3.

Voorbeeld 2: van $(1,0)$ naar $(0,1)$



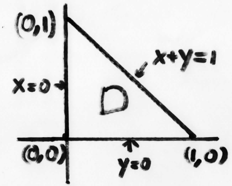
De functie $f(x,y) = 3x - 4y$ neemt zijn absolute minimum en maximum aan in randpunten van D.

De rand van D bestaat uit de lijnstukken van $(0,0)$ naar $(1,0)$; van $(1,0)$ naar $(0,1)$; en van $(0,1)$ naar $(0,0)$.

Op het lijnstuk van $(1,0)$ naar $(0,1)$ is $x + y = 1$, $y = 1 - x$, dus $f(x,y) = 3x - 4(1-x) = 7x - 4$.

Als we lopen van $(1,0)$ naar $(0,1)$ dan daalt x van 1 naar 0, dus $f(x,y)$ daalt van 3 naar -4.

Voorbeeld 2: van $(0, 1)$ naar $(0, 0)$



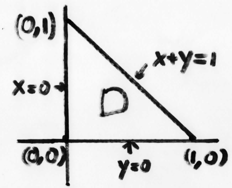
De functie $f(x, y) = 3x - 4y$ neemt zijn absolute minimum en maximum aan in randpunten van D.

De rand van D bestaat uit de lijnstukken van $(0, 0)$ naar $(1, 0)$; van $(1, 0)$ naar $(0, 1)$; en van $(0, 1)$ naar $(0, 0)$.

Op het lijnstuk van $(0, 1)$ naar $(0, 0)$ is $x = 0$ dus $f(x, y) = -4y$.

Als we lopen van $(0, 1)$ naar $(0, 0)$ dan daalt y van 1 naar 0, dus $f(x, y)$ stijgt van -4 naar 0.

Voorbeeld 2: conclusie

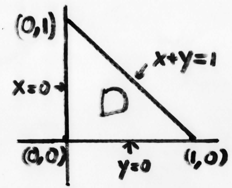


De functie $f(x,y) = 3x - 4y$ neemt zijn absolute minimum en maximum op D aan in randpunten van D.

De rand van D bestaat uit de lijnstukken van $(0,0)$ naar $(1,0)$; van $(1,0)$ naar $(0,1)$; en van $(0,1)$ naar $(0,0)$.

Als we lopen van $(0,0)$ naar $(1,0)$ dan stijgt f van 0 naar 3;
als we lopen van $(1,0)$ naar $(0,1)$ dan daalt f van 3 naar -4;
als we lopen van $(0,1)$ naar $(0,0)$ dan stijgt f van -4 naar 0.

Voorbeeld 2: conclusie



De functie $f(x,y) = 3x - 4y$ neemt zijn absolute minimum en maximum op D aan in randpunten van D.

De rand van D bestaat uit de lijnstukken van $(0,0)$ naar $(1,0)$; van $(1,0)$ naar $(0,1)$; en van $(0,1)$ naar $(0,0)$.

Als we lopen van $(0,0)$ naar $(1,0)$ dan stijgt f van 0 naar 3;
als we lopen van $(1,0)$ naar $(0,1)$ dan daalt f van 3 naar -4;
als we lopen van $(0,1)$ naar $(0,0)$ dan stijgt f van -4 naar 0.

Dus f neemt zijn absolute maximum 3 op D aan in $(1,0)$;
f neemt zijn absolute minimum -4 op D aan in $(0,1)$.

Lineair programmeren

Voorbeeld 2 is een eenvoudig geval van het **Lineair Programmeringsprobleem (LP)**:

Gegeven een lineaire functie f in n variabelen $x_1, \ldots, x_n$ (d.w.z. $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, vergelijk $3x - 4y$, voor het twee-variabelen geval gebruiken we meestal x, y, voor het drie-variabelen geval x, y, z en vanaf vier variabelen $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$),

bepaal het absolute maximum en minimum van f op een n-dimensionaal gebied D gedefinieerd door een stelsel lineaire ongelijkheden in $x_1, \ldots, x_n$ (dit zijn ongelijkheden van het type $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n \leq c$ of $\geq c$, vergelijk $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$).

Dit is een probleem met heel veel praktische toepassingen (economie, operations research), en er zijn efficiënte algoritmen om dit probleem voor heel grote n op te lossen.

EINDE VAN HET COLLEGE