CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

7e college: Complexe getallen 1

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Getallenverzamelingen

In de wiskunde worden de volgende getallenverzamelingen gebruikt:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: de verzameling van natuurlijke getallen.
  We kunnen in $\mathbb{N}$ altijd optellen en vermenigvuldigen maar niet altijd aftrekken of delen. Bijvoorbeeld $3 - 5$ en $3/5$ zijn geen natuurlijke getallen.

Getallenverzamelingen

In de wiskunde worden de volgende getallenverzamelingen gebruikt:

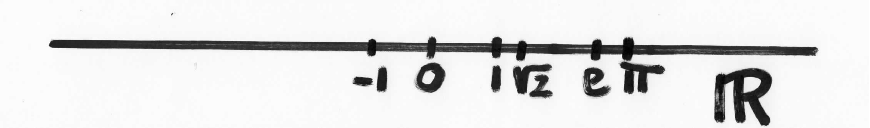
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: de verzameling van natuurlijke getallen.
  We kunnen in $\mathbb{N}$ altijd optellen en vermenigvuldigen maar niet altijd aftrekken of delen. Bijvoorbeeld $3 - 5$ en $3/5$ zijn geen natuurlijke getallen.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$: de verzameling van gehele getallen.
  We kunnen in $\mathbb{Z}$ altijd optellen, aftrekken en vermenigvuldigen maar niet altijd delen. Bijvoorbeeld $3/5$ is geen geheel getal.

Getallenverzamelingen

In de wiskunde worden de volgende getallenverzamelingen gebruikt:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: de verzameling van natuurlijke getallen. We kunnen in $\mathbb{N}$ altijd optellen en vermenigvuldigen maar niet altijd aftrekken of delen. Bijvoorbeeld $3 - 5$ en $3/5$ zijn geen natuurlijke getallen.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$: de verzameling van gehele getallen. We kunnen in $\mathbb{Z}$ altijd optellen, aftrekken en vermenigvuldigen maar niet altijd delen. Bijvoorbeeld $3/5$ is geen geheel getal.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$: de verzameling van rationale getallen. We kunnen in $\mathbb{Q}$ altijd optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (behalve door 0). We kunnen in $\mathbb{Q}$ niet altijd worteltrekken (bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ is geen rationaal getal). Ook belangrijke getallen zoals e en π zijn irrationaal.

Reële getallen

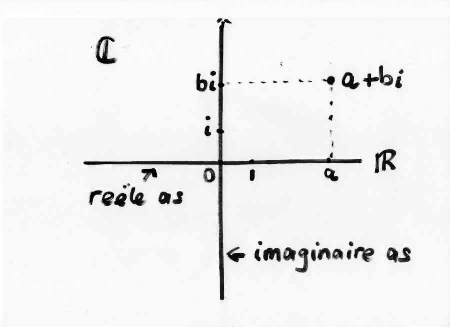


- ℝ: de verzameling van reële getallen.
  De verzameling van reële getallen correspondeert met de punten op een rechte lijn waarop we twee punten 0 en 1 hebben gekozen (de reële lijn).
  We kunnen in ℝ altijd optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen (behalve door 0) en wortels van getallen ≥ 0 trekken.

  We kunnen in ℝ geen wortels van negatieve getallen zoals -1 trekken.

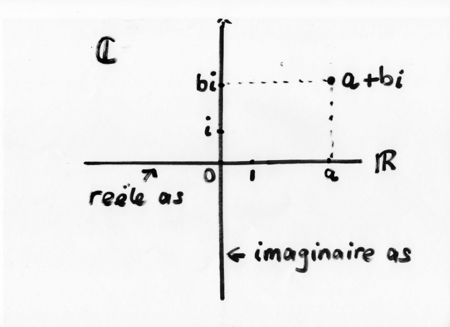
We willen ℝ uitbreiden tot een grotere getallenverzameling, de verzameling van **complexe getallen** ℂ, die wel de wortels van de negatieve reële getallen bevat.
Deze nieuwe getallen moeten buiten de reële lijn liggen.

Complexe getallen



De verzameling van complexe getallen $\mathbb{C}$ corresponderen met de punten in het vlak.
In het vlak kiezen we twee loodrechte assen, de horizontale as die we de **reële as** noemen en de verticale as die we de **imaginaire as** noemen.

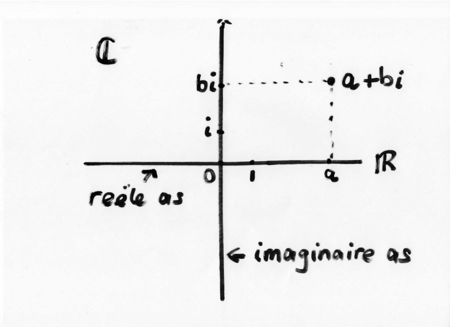
Complexe getallen



De verzameling van complexe getallen $\mathbb{C}$ corresponderen met de punten in het vlak.
In het vlak kiezen we twee loodrechte assen, de horizontale as die we de **reële as** noemen en de verticale as die we de **imaginaire as** noemen.

Het snijpunt van de twee assen is 0.
De punten op de reële as corresponderen met de reële getallen.
De punten op de imaginaire as corresponderen met de **imaginaire getallen**.

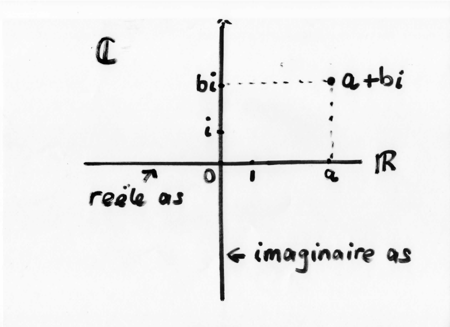
Complexe getallen



Het punt met coördinaten (a, b) schrijven we als $a + bi$.
We schrijven $(a, 0)$ als a en $(0, b)$ als bi.

We schrijven $(0, 1)$ als i en $(0, -1)$ als $-i$.
We spreken af dat $i^2 = -1$.

Complexe getallen



Het punt met coördinaten (a, b) schrijven we als $a + bi$.
We schrijven $(a, 0)$ als a en $(0, b)$ als bi.

We schrijven $(0, 1)$ als i en $(0, -1)$ als $-i$.
We spreken af dat $i^2 = -1$.

We moeten de rekenkundige bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen) voor complexe getallen definiëren.

Optellen en aftrekken

We definiëren optellen en aftrekken van twee complexe getallen net als optellen en aftrekken van vectoren:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &:= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)-(c+di) &:= (a-c)+(b-d)i.\end{aligned}$$

Optellen en aftrekken

We definiëren optellen en aftrekken van twee complexe getallen net als optellen en aftrekken van vectoren:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &:= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)-(c+di) &:= (a-c)+(b-d)i.\end{aligned}$$

Voorbeeld.

$$(2+7i)-(-1+3i)=2-(-1)+(7-3)i=3+4i.$$

Vermenigvuldigen

We definiëren het product van twee complexe getallen door de haakjes uit te werken en $i^2 = -1$ te stellen.

Vermenigvuldigen

We definiëren het product van twee complexe getallen door de haakjes uit te werken en $i^2 = -1$ te stellen.

Voorbeeld.

$$\begin{aligned}
&(3-i)(4+5i) \\
&\quad = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5i + (-i) \cdot 4 + (-i) \cdot (5i) \quad \text{(haakjes uitwerken)}
\end{aligned}$$

Vermenigvuldigen

We definiëren het product van twee complexe getallen door de haakjes uit te werken en $i^2 = -1$ te stellen.

Voorbeeld.

$$
\begin{aligned}
&(3-i)(4+5i)\\
&\quad = 3\cdot 4 + 3\cdot 5i + (-i)\cdot 4 + (-i)\cdot(5i) \quad \text{(haakjes uitwerken)}\\
&\quad = 12 + 15i - 4i - 5i^2 = 12 + 15i - 4i - 5(-1) \quad (i^2 = -1)\\
&\quad = 17 + 11i.
\end{aligned}
$$

Vermenigvuldigen

We definiëren het product van twee complexe getallen door de haakjes uit te werken en $i^2 = -1$ te stellen.

Voorbeeld.

$$
\begin{aligned}
&(3-i)(4+5i) \\
&\quad = 3\cdot 4 + 3\cdot 5i + (-i)\cdot 4 + (-i)\cdot(5i) \quad \text{(haakjes uitwerken)} \\
&\quad = 12 + 15i - 4i - 5i^2 = 12 + 15i - 4i - 5(-1) \quad (i^2 = -1) \\
&\quad = 17 + 11i.
\end{aligned}
$$

Belangrijk speciaal geval:

$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$

Vermenigvuldigen

We definiëren het product van twee complexe getallen door de haakjes uit te werken en $i^2 = -1$ te stellen.

Voorbeeld.

$$
\begin{aligned}
&(3-i)(4+5i) \\
&\quad = 3\cdot 4 + 3\cdot 5i + (-i)\cdot 4 + (-i)\cdot(5i) \quad \text{(haakjes uitwerken)} \\
&\quad = 12 + 15i - 4i - 5i^2 = 12 + 15i - 4i - 5(-1) \quad (i^2 = -1) \\
&\quad = 17 + 11i.
\end{aligned}
$$

Belangrijk speciaal geval:

$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$.

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(a-bi) &= a\cdot a + a\cdot(-bi) + bi\cdot a + (bi)\cdot(-bi) \\
&= a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 - b^2 i^2 \\
&= a^2 + b^2.
\end{aligned}
$$

Vermenigvuldigen

We definiëren het product van twee complexe getallen door de haakjes uit te werken en $i^2 = -1$ te stellen.

Voorbeeld.

$$\begin{aligned}
&(3-i)(4+5i) \\
&\quad = 3\cdot 4 + 3\cdot 5i + (-i)\cdot 4 + (-i)\cdot(5i) \;\; \text{(haakjes uitwerken)} \\
&\quad = 12 + 15i - 4i - 5i^2 = 12 + 15i - 4i - 5(-1) \;\; (i^2 = -1) \\
&\quad = 17 + 11i.
\end{aligned}$$

Belangrijk speciaal geval:

$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
(a+bi)(a-bi) &= a\cdot a + a\cdot(-bi) + bi\cdot a + (bi)\cdot(-bi) \\
&= a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 - b^2 i^2 \\
&= a^2 + b^2.
\end{aligned}$$

Voorbeeld: $(2+6i)(2-6i) = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40.$

Delen

We kunnen $\frac{a+bi}{c+di}$ uitrekenen door teller en noemer met $c - di$ te vermenigvuldigen en te gebruiken dat $(c+di)(c-di) = c^2 + d^2$.

Delen

We kunnen $\frac{a+bi}{c+di}$ uitrekenen door teller en noemer met $c - di$ te vermenigvuldigen en te gebruiken dat $(c+di)(c-di) = c^2 + d^2$.

Voorbeeld.

$$\frac{3+4i}{7-8i} \quad \text{vermenigvuldig teller en noemer met } 7-(-8i) = 7+8i$$

Delen

We kunnen $\frac{a+bi}{c+di}$ uitrekenen door teller en noemer met $c - di$ te vermenigvuldigen en te gebruiken dat $(c + di)(c - di) = c^2 + d^2$.

Voorbeeld.

$$\frac{3+4i}{7-8i} \quad \text{vermenigvuldig teller en noemer met } 7 - (-8i) = 7 + 8i$$

$$= \frac{(3+4i)(7+8i)}{(7-8i)(7+8i)} = \frac{(3+4i)(7+8i)}{(7^2+8^2)}$$

Delen

We kunnen $\frac{a+bi}{c+di}$ uitrekenen door teller en noemer met $c - di$ te vermenigvuldigen en te gebruiken dat $(c+di)(c-di) = c^2 + d^2$.

Voorbeeld.

$$\frac{3+4i}{7-8i} \quad \text{vermenigvuldig teller en noemer met } 7-(-8i) = 7+8i$$

$$= \frac{(3+4i)(7+8i)}{(7-8i)(7+8i)} = \frac{(3+4i)(7+8i)}{(7^2+8^2)}$$

$$= \frac{3\cdot 7 + 3\cdot 8i + 4i\cdot 7 + (4i)\cdot(8i)}{49+64}$$

$$= \frac{21+24i+28i+32i^2}{113} = \frac{(21-32)+(24+28)i}{113}$$

$$= \frac{-11+52i}{113} = -\frac{11}{113} + \frac{52}{113}i.$$

Rekenregels

Complexe getallen voldoen aan dezelfde rekenregels als reële getallen:

- **Commutatieve regels (je mag optelling en vermenigvuldiging omdraaien):**
  $z + w = w + z, \;\; z \cdot w = w \cdot z$
  voor alle complexe getallen z en w.
- **Associatieve regels (je mag haakjes verplaatsen):**
  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \;\; (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
  voor alle complexe getallen z_1, z_2, z_3.
- **Distributieve regel (je mag haakjes uitwerken):**
  $z(w_1 + w_2) = z \cdot w_1 + z \cdot w_2$ voor alle complexe getallen z, w_1, w_2.

Machten van i

We bepalen i^n voor elk geheel getal n.

Machten van i

We bepalen i^n voor elk geheel getal n. Er geldt:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1.$$

Machten van i

We bepalen i^n voor elk geheel getal n. Er geldt:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1.$$

We kunnen verder gaan:

$$i^5 = i^4 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1, \quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i, \quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1,$$
$$i^9 = i^8 \cdot i = i, \quad \ldots$$

Na elke vier stappen herhaalt het patroon zich.

Machten van i

We bepalen i^n voor elk geheel getal n. Er geldt:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1.$$

We kunnen verder gaan:

$$i^5 = i^4 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1, \quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i, \quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1,$$
$$i^9 = i^8 \cdot i = i, \quad \ldots$$

Na elke vier stappen herhaalt het patroon zich.

We kunnen ook negatieve machten van i uitrekenen:

$$i^{-1} = \frac{i^3}{i^4} = i^3 = -i, \quad i^{-2} = \frac{i^2}{i^4} = -1, \quad i^{-3} = \frac{i}{i^4} = i, \quad i^{-4} = 1.$$

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
i^n	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$

Zelf proberen

Stop de video even en probeer het volgende complexe getal te schrijven in de vorm $a + bi$:

$$\frac{(-2+7i)^2}{1+i}.$$

Antwoord

Berekening van $\dfrac{(-2+7i)^2}{1+i}$.

Antwoord

Berekening van $\dfrac{(-2+7i)^2}{1+i}$.

Stap 1. We berekenen eerst $(-2+7i)^2$.
Je kan dit doen door haakjes uit te werken, maar het gaat sneller door gebruik te maken van de formule $(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$ die voor alle complexe getallen z en w geldt. Dit geeft

$$\begin{aligned}(-2+7i)^2 &= (-2)^2 + 2(-2)7i + (7i)^2 \\ &= 4 - 28i + 49i^2 = 4 - 28i - 49 = -45 - 28i.\end{aligned}$$

Antwoord

Berekening van $\dfrac{(-2+7i)^2}{1+i}$.

Stap 1. We berekenen eerst $(-2+7i)^2$.
Je kan dit doen door haakjes uit te werken, maar het gaat sneller door gebruik te maken van de formule $(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$ die voor alle complexe getallen z en w geldt. Dit geeft

$$\begin{aligned}(-2+7i)^2 &= (-2)^2 + 2(-2)7i + (7i)^2 \\ &= 4 - 28i + 49i^2 = 4 - 28i - 49 = -45 - 28i.\end{aligned}$$

Stap 2. We berekenen nu het quotiënt:

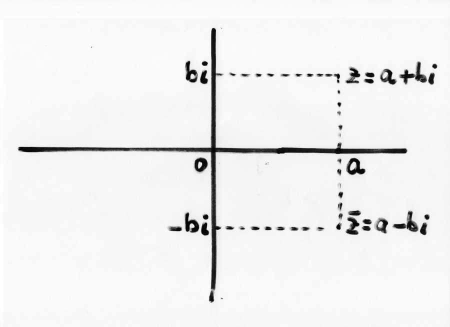
$$\begin{aligned}\frac{(-2+7i)^2}{1+i} &= \frac{-45-28i}{1+i} = \frac{(-45-28i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{-45\cdot 1 - 45(-i) - 28i\cdot 1 - 28i(-i)}{1^2+1^2} \\ &= \frac{-45+45i-28i+28i^2}{2} = \frac{-45-28+(45-28)i}{2} \\ &= \frac{-73+17i}{2} = -\frac{73}{2} + \frac{17}{2}i.\end{aligned}$$

Reëel deel, imaginair deel, complex geconjugeerde

We geven complexe getallen meestal aan met z, w en reële getallen met a, b, c, d, x, y.

Voor een complex getal $z = a + bi$ definiëren we:

- $\operatorname{Re} z := a$ (reëel deel van z);
- $\operatorname{Im} z := b$ (imaginair deel van z) (dus het imaginaire deel is **niet** bi);
- $\overline{z} := a - bi$ (complex geconjugeerde van z).

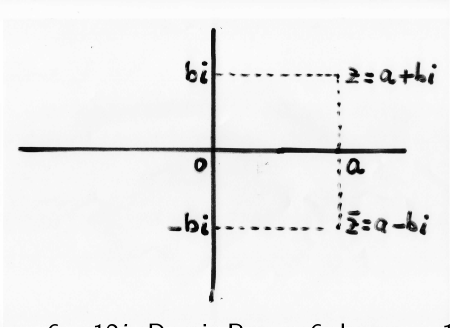


Reëel deel, imaginair deel, complex geconjugeerde

We geven complexe getallen meestal aan met z, w en reële getallen met a, b, c, d, x, y.

Voor een complex getal $z = a + bi$ definiëren we:

- $\operatorname{Re} z := a$ (reëel deel van z);
- $\operatorname{Im} z := b$ (imaginair deel van z) (dus het imaginaire deel is **niet** bi);
- $\overline{z} := a - bi$ (complex geconjugeerde van z).



Voorbeeld. Zij $z = 6 - 12i$. Dan is $\operatorname{Re} z = 6$, $\operatorname{Im} z = -12$, $\overline{z} = 6 + 12i$.

Rekenregels voor complex geconjugeerden

Stelling

Zijn z en w complexe getallen. Dan geldt

$$\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w},\ \overline{z} - \overline{w} = \overline{z - w},\ \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w},\ \frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} (\textit{mits } w \neq 0).$$

Met andere woorden, de som van de complex geconjugeerden van twee complexe getallen is gelijk aan de complex geconjugeerde van hun som, en hetzelfde geldt voor hun verschil, product en quotiënt.

Rekenregels voor complex geconjugeerden

Stelling

Zijn z en w complexe getallen. Dan geldt

$$\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w},\ \overline{z} - \overline{w} = \overline{z - w},\ \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w},\ \frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} (\text{mits } w \neq 0).$$

Met andere woorden, de som van de complex geconjugeerden van twee complexe getallen is gelijk aan de complex geconjugeerde van hun som, en hetzelfde geldt voor hun verschil, product en quotiënt.

Bewijs. Schrijf $z = a + bi$, $w = c + di$ en werk alles uit.
We doen dit alleen voor het product:

Rekenregels voor complex geconjugeerden

Stelling

Zijn z en w complexe getallen. Dan geldt

$$\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w},\ \overline{z} - \overline{w} = \overline{z - w},\ \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w},\ \frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} (\text{mits } w \neq 0).$$

Met andere woorden, de som van de complex geconjugeerden van twee complexe getallen is gelijk aan de complex geconjugeerde van hun som, en hetzelfde geldt voor hun verschil, product en quotiënt.

Bewijs. Schrijf $z = a + bi$, $w = c + di$ en werk alles uit.
We doen dit alleen voor het product:

$$\begin{aligned} zw &= (a+bi)(c+di) = ac + adi + bi \cdot c + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i, \end{aligned}$$

Rekenregels voor complex geconjugeerden

Stelling

Zijn z en w complexe getallen. Dan geldt

$$\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w},\ \overline{z} - \overline{w} = \overline{z - w},\ \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w},\ \frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} (\text{mits } w \neq 0).$$

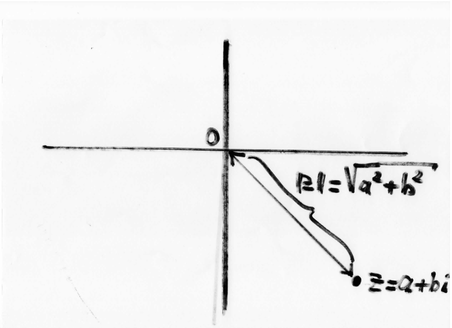
Met andere woorden, de som van de complex geconjugeerden van twee complexe getallen is gelijk aan de complex geconjugeerde van hun som, en hetzelfde geldt voor hun verschil, product en quotiënt.

Bewijs. Schrijf $z = a + bi$, $w = c + di$ en werk alles uit.
We doen dit alleen voor het product:

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) = ac + adi + bi \cdot c + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z} \cdot \overline{w} &= (a - bi)(c - di) = ac - adi - bi \cdot c + (-b)(-d)i^2 \\ &= ac - bd - (ad + bc)i = \overline{zw}. \end{aligned}$$

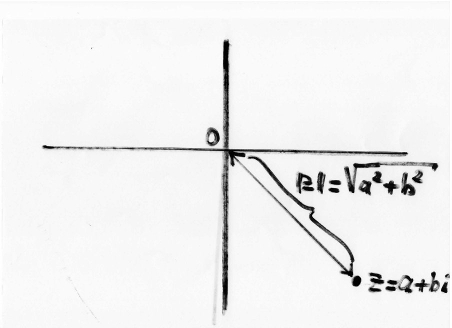
Modulus/absolute waarde



De **modulus** of **absolute waarde** van een complex getal z, notatie $|z|$, is de afstand van 0 tot z.

Dus als $z = a + bi$ dan is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; in het bijzonder is $|z| \geq 0$.

Modulus/absolute waarde



De **modulus** of **absolute waarde** van een complex getal z, notatie $|z|$, is de afstand van 0 tot z.

Dus als $z = a + bi$ dan is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; in het bijzonder is $|z| \geq 0$.

Voorbeeld. $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Product- en quotiëntregel voor absolute waarden

We hebben eerder gezien dat $(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$. Als we $z=a+bi$ schrijven geeft dit:

$$z\cdot\overline{z}=|z|^2 \quad \text{voor alle complexe getallen } z.$$

Product- en quotiëntregel voor absolute waarden

We hebben eerder gezien dat $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2$. Als we $z = a+bi$ schrijven geeft dit:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \text{ voor alle complexe getallen } z.$$

Hiermee kan worden afgeleid:

Zijn z en w complexe getallen. Dan geldt

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ (mits } w \neq 0).$$

Dus de absolute waarde van het product van twee complexe getallen is het product van hun absolute waarden. Hetzelfde geldt voor hun quotiënt.

Product- en quotiëntregel voor absolute waarden

We hebben eerder gezien dat $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2$. Als we $z = a+bi$ schrijven geeft dit:

$$z\cdot\overline{z} = |z|^2 \quad \text{voor alle complexe getallen } z.$$

Hiermee kan worden afgeleid:

Zijn z en w complexe getallen. Dan geldt

$$|z\cdot w| = |z|\cdot|w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (\text{mits } w\neq 0).$$

Dus de absolute waarde van het product van twee complexe getallen is het product van hun absolute waarden. Hetzelfde geldt voor hun quotiënt.

Bewijs van de productregel (hoef je niet te kunnen reproduceren):

$$\begin{aligned} |z\cdot w|^2 &= (z\cdot w)(\overline{z\cdot w}) = z\cdot w\cdot\overline{z}\cdot\overline{w} \\ &= z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w} = |z|^2\cdot|w|^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$. $\square$

Product- en quotiëntregel voor absolute waarden

Zijn z en w complexe getallen. Dan geldt

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (\text{mits } w \neq 0).$$

Dus de absolute waarde van het product van twee complexe getallen is het product van hun absolute waarden. Hetzelfde geldt voor hun quotiënt.

Voorbeeld. Bereken $\left|\frac{(1+3i)(1-i)}{(3-4i)}\right|$.

Er geldt $\left|\frac{(1+3i)(1-i)}{3-4i}\right| = \frac{|(1+3i)(1-i)|}{|3-4i|} = \frac{|1+3i| \cdot |1-i|}{|3-4i|}$.

Product- en quotiëntregel voor absolute waarden

Zijn z en w complexe getallen. Dan geldt

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (\text{mits } w \neq 0).$$

Dus de absolute waarde van het product van twee complexe getallen is het product van hun absolute waarden. Hetzelfde geldt voor hun quotiënt.

Voorbeeld. Bereken $\left|\frac{(1+3i)(1-i)}{(3-4i)}\right|$.

Er geldt $\left|\frac{(1+3i)(1-i)}{3-4i}\right| = \frac{|(1+3i)(1-i)|}{|3-4i|} = \frac{|1+3i| \cdot |1-i|}{|3-4i|}$.

Verder $|1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$, $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$,
$|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Dus $\left|\frac{(1+3i)(1-i)}{3-4i}\right| = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{20}$.

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We willen de kwadratische vergelijking $az^2 + bz + c = 0$ oplossen waarbij a, b, c reële getallen zijn. Als de discriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ dan heeft deze vergelijking geen oplossing in de reële getallen maar wel twee oplossingen in de complexe getallen.

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We willen de kwadratische vergelijking $az^2 + bz + c = 0$ oplossen waarbij a, b, c reële getallen zijn. Als de discriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ dan heeft deze vergelijking geen oplossing in de reële getallen maar wel twee oplossingen in de complexe getallen.

Stelling

Zijn a, b, c reële getallen met $a \neq 0$ en $D = b^2 - 4ac$ de discriminant. Dan zijn de oplossingen van $az^2 + bz + c = 0$ gegeven door

- $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ *als* $D > 0$;
- $z_1 = \frac{-b}{2a}$ *als* $D = 0$;
- $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot i}{2a}$ *als* $D < 0$.

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We willen de kwadratische vergelijking $az^2 + bz + c = 0$ oplossen waarbij a, b, c reële getallen zijn. Als de discriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ dan heeft deze vergelijking geen oplossing in de reële getallen maar wel twee oplossingen in de complexe getallen.

Stelling

Zijn a, b, c reële getallen met $a \neq 0$ en $D = b^2 - 4ac$ de discriminant. Dan zijn de oplossingen van $az^2 + bz + c = 0$ gegeven door

- $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ *als* $D > 0$;
- $z_1 = \frac{-b}{2a}$ *als* $D = 0$;
- $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot i}{2a}$ *als* $D < 0$.

Voorbeeld. Bepaal de oplossingen van $4z^2 + z + 1 = 0$.

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We willen de kwadratische vergelijking $az^2 + bz + c = 0$ oplossen waarbij a, b, c reële getallen zijn. Als de discriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ dan heeft deze vergelijking geen oplossing in de reële getallen maar wel twee oplossingen in de complexe getallen.

Stelling

Zijn a, b, c reële getallen met $a \neq 0$ en $D = b^2 - 4ac$ de discriminant. Dan zijn de oplossingen van $az^2 + bz + c = 0$ gegeven door

- $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ *als* $D > 0$*;*
- $z_1 = \frac{-b}{2a}$ *als* $D = 0$*;*
- $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot i}{2a}$ *als* $D < 0$*.*

Voorbeeld. Bepaal de oplossingen van $4z^2 + z + 1 = 0$.

Er geldt $D = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -15 < 0$. Dus de oplossingen zijn

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15} \cdot i}{8} = -\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{15} \cdot i.$$

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We kijken nu naar kwadratische vergelijkingen $az^2 + bz + c = 0$ waarbij minstens één van de getallen a, b, c niet reëel is. De algemene oplossing is ingewikkeld. We geven een methode die in eenvoudige gevallen werkt.

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We kijken nu naar kwadratische vergelijkingen $az^2 + bz + c = 0$ waarbij minstens één van de getallen a, b, c niet reëel is. De algemene oplossing is ingewikkeld. We geven een methode die in eenvoudige gevallen werkt.

Stap 1. Deel door a. We krijgen dan $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$.

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We kijken nu naar kwadratische vergelijkingen $az^2 + bz + c = 0$ waarbij minstens één van de getallen a, b, c niet reëel is. De algemene oplossing is ingewikkeld. We geven een methode die in eenvoudige gevallen werkt.

Stap 1. Deel door a. We krijgen dan $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$.

Stap 2. Zoek u en v zodat $u + v = \frac{b}{a}$, $u \cdot v = \frac{c}{a}$. Met zulke u, v is

$$(z + u)(z + v) = z^2 + zv + uz + uv = z^2 + (u + v)z + uv = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}.$$

Dus $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow z + u = 0$ of $z + v = 0 \Leftrightarrow z = -u$ of $z = -v$.

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We kijken nu naar kwadratische vergelijkingen $az^2 + bz + c = 0$ waarbij minstens één van de getallen a, b, c niet reëel is. De algemene oplossing is ingewikkeld. We geven een methode die in eenvoudige gevallen werkt.

Stap 1. Deel door a. We krijgen dan $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$.

Stap 2. Zoek u en v zodat $u + v = \frac{b}{a}$, $u \cdot v = \frac{c}{a}$. Met zulke u, v is

$$(z+u)(z+v) = z^2 + zv + uz + uv = z^2 + (u+v)z + uv = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}.$$

Dus $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow z + u = 0$ of $z + v = 0 \Leftrightarrow z = -u$ of $z = -v$.

Voorbeeld. Bepaal de oplossingen van $z^2 + (3+2i)z + 2 + 2i = 0$.

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We kijken nu naar kwadratische vergelijkingen $az^2 + bz + c = 0$ waarbij minstens één van de getallen a, b, c niet reëel is. De algemene oplossing is ingewikkeld. We geven een methode die in eenvoudige gevallen werkt.

Stap 1. Deel door a. We krijgen dan $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$.

Stap 2. Zoek u en v zodat $u + v = \frac{b}{a}$, $u \cdot v = \frac{c}{a}$. Met zulke u, v is

$$(z+u)(z+v) = z^2 + zv + uz + uv = z^2 + (u+v)z + uv = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}.$$

Dus $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow z + u = 0$ of $z + v = 0 \Leftrightarrow z = -u$ of $z = -v$.

Voorbeeld. Bepaal de oplossingen van $z^2 + (3+2i)z + 2 + 2i = 0$.

We hoeven niet de coëfficiënt van z^2 weg te delen, dus stap 1 is niet nodig. We moeten u en v zoeken zodat $u + v = 3 + 2i$, $uv = 2 + 2i$.

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

We kijken nu naar kwadratische vergelijkingen $az^2 + bz + c = 0$ waarbij minstens één van de getallen a, b, c niet reëel is. De algemene oplossing is ingewikkeld. We geven een methode die in eenvoudige gevallen werkt.

Stap 1. Deel door a. We krijgen dan $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$.

Stap 2. Zoek u en v zodat $u + v = \frac{b}{a}$, $u \cdot v = \frac{c}{a}$. Met zulke u, v is

$$(z + u)(z + v) = z^2 + zv + uz + uv = z^2 + (u + v)z + uv = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}.$$

Dus $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow z + u = 0$ of $z + v = 0 \Leftrightarrow z = -u$ of $z = -v$.

Voorbeeld. Bepaal de oplossingen van $z^2 + (3 + 2i)z + 2 + 2i = 0$.

We hoeven niet de coëfficiënt van z^2 weg te delen, dus stap 1 is niet nodig. We moeten u en v zoeken zodat $u + v = 3 + 2i$, $uv = 2 + 2i$.

$u = 2 + 2i$, $v = 1$ voldoen hieraan.

Dus $z = -2 - 2i$, $z = -1$ zijn de oplossingen.

EINDE VAN HET COLLEGE