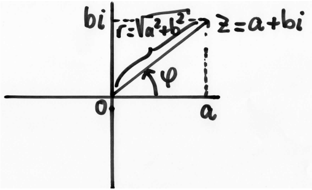
CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

8e college: Complexe getallen 2

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

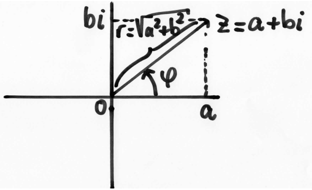
evertse@math.leidenuniv.nl

Modulus en argument (poolcoördinaten)



Zij $z = a + bi$ een complex getal $\neq 0$.
We definiëren $r := |z|$ als de modulus of absolute waarde van z.
Dit is de lengte van het lijnstuk tussen 0 en z. Dus $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Modulus en argument (poolcoördinaten)

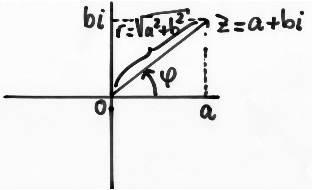


Zij $z = a + bi$ een complex getal $\neq 0$.
We definiëren $r := |z|$ als de modulus of absolute waarde van z.
Dit is de lengte van het lijnstuk tussen 0 en z. Dus $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Zij φ een hoek van de positieve reële as naar het lijnstuk tussen 0 en z.

φ is niet eenduidig bepaald: als φ zo'n hoek is dan zijn
$\varphi \pm 2\pi, \varphi \pm 4\pi, \ldots$ dat ook. We kiezen φ met $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Modulus en argument (poolcoördinaten)



Zij $z = a + bi$ een complex getal $\neq 0$.
We definiëren $r := |z|$ als de modulus of absolute waarde van z.
Dit is de lengte van het lijnstuk tussen 0 en z. Dus $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

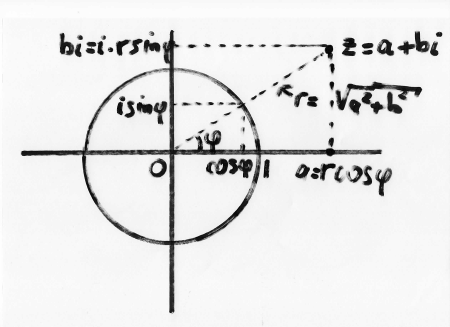
Zij φ een hoek van de positieve reële as naar het lijnstuk tussen 0 en z.

φ is niet eenduidig bepaald: als φ zo'n hoek is dan zijn $\varphi \pm 2\pi$, $\varphi \pm 4\pi, \ldots$ dat ook. We kiezen φ met $-\pi < \varphi \leq \pi$.

We noemen de φ in $(-\pi, \pi]$ het **hoofdargument** van z, notatie $\operatorname{Arg} z$.

We noemen de hoeken φ, $\varphi \pm 2\pi$, $\varphi \pm 4\pi, \ldots$ **argumenten** van z.

Modulus en argument



Zij $z = a + bi$ een complex getal $\neq 0$, $r = |z|$, φ een argument van z.

Dan is $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Dus $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Voorbeeld 1

Gegeven is $z = 8 - 8i$. Bepaal de modulus r en het hoofdargument φ van z.

Voorbeeld 1

Gegeven is $z = 8 - 8i$. Bepaal de modulus r en het hoofdargument φ van z.

Voor $z = a + bi$ geldt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

In ons geval $r = |z| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{8^2 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$,

$\cos\varphi = \frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\varphi = \frac{-8}{8\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Voorbeeld 1

Gegeven is $z = 8 - 8i$. Bepaal de modulus r en het hoofdargument φ van z.

Voor $z = a + bi$ geldt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

In ons geval $r = |z| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{8^2 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$,

$\cos\varphi = \frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\varphi = \frac{-8}{8\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

We zoeken de hoek $\varphi \in (-\pi, \pi]$ die daarbij hoort. Welke hoek is dat?

Voorbeeld 1

Gegeven is $z = 8 - 8i$. Bepaal de modulus r en het hoofdargument φ van z.

Voor $z = a + bi$ geldt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

In ons geval $r = |z| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{8^2 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$,

$\cos\varphi = \frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\varphi = \frac{-8}{8\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

We zoeken de hoek $\varphi \in (-\pi, \pi]$ die daarbij hoort. Welke hoek is dat?

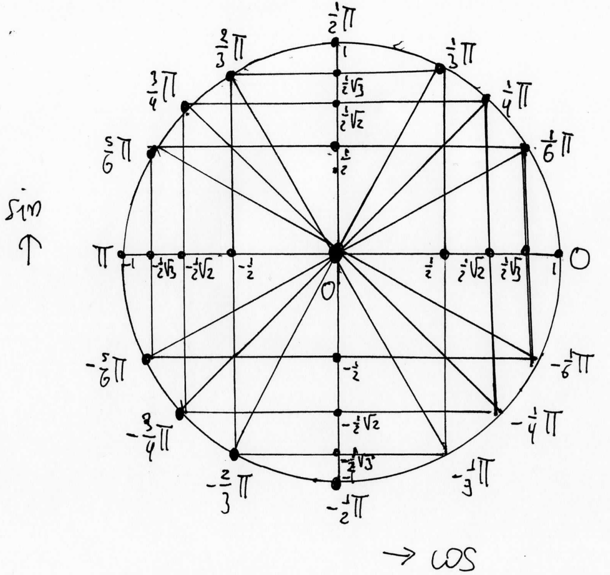
Als je de waarden van cosinus en sinus niet paraat hebt (maar dat zou eigenlijk wel moeten!) kun je een cirkel met straal 1 rond $(0, 0)$ tekenen en daar het punt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ op tekenen. Je ziet dan dat het hoofdargument van z gelijk is aan

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = -\frac{1}{4}\pi.$$

De argumenten van z zijn de hoeken $-\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi \pm 2\pi$, $-\frac{1}{4}\pi \pm 4\pi, \ldots$.

We schrijven dit als $-\frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
($\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ is de verzameling van gehele getallen).

Waarden van cosinus en sinus



Voorbeeld 2

Van een complex getal z is gegeven dat

$$|z| = 20, \quad \operatorname{Arg} z = \tfrac{5}{6}\pi.$$

Schrijf z in de vorm $a + bi$.

Voorbeeld 2

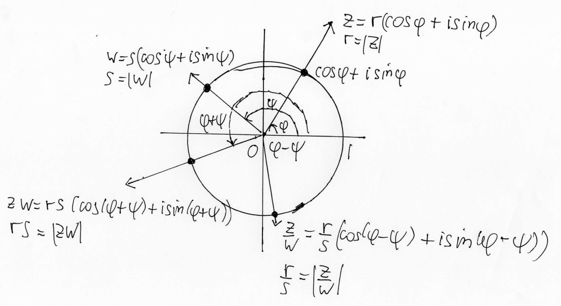
Van een complex getal z is gegeven dat

$$|z| = 20, \quad \operatorname{Arg} z = \tfrac{5}{6}\pi.$$

Schrijf z in de vorm $a + bi$.

In het algemeen is $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, waarbij $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.
In ons geval

$$\begin{aligned} z &= 20(\cos\tfrac{5}{6}\pi + i\sin\tfrac{5}{6}\pi) = 20\big(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i\big) \\ &= -10\sqrt{3} + 10i. \end{aligned}$$



Stelling

Laat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ *met* $r > 0$, $s > 0$.

$$\begin{aligned} \textit{Dan geldt } zw &= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big), \\ \frac{z}{w} &= \frac{r}{s}\big(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\big). \end{aligned}$$

De stelling impliceert: $|zw| = |z|\cdot|w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
de som van argumenten van z en w is een argument van zw,
het verschil van argumenten van z en w is een argument van z/w.

Modulus en argument van product en quotiënt

Stelling

Zij $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ *met* $r > 0$, $s > 0$.

$$\begin{aligned} \textit{Dan geldt } zw &= rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)), \\ \frac{z}{w} &= \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)). \end{aligned}$$

Modulus en argument van product en quotiënt

Stelling

Zij $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ *met* $r > 0$, $s > 0$.

$$\begin{aligned} \textit{Dan geldt } zw &= rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)), \\ \frac{z}{w} &= \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)). \end{aligned}$$

We bewijzen alleen de stelling voor het product. Er geldt

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= rs(\cos\varphi\cos\psi + i\sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\cdot i\sin\psi + i^2\sin\varphi\sin\psi) \\ &= rs(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \end{aligned}$$

Modulus en argument van product en quotiënt

Stelling

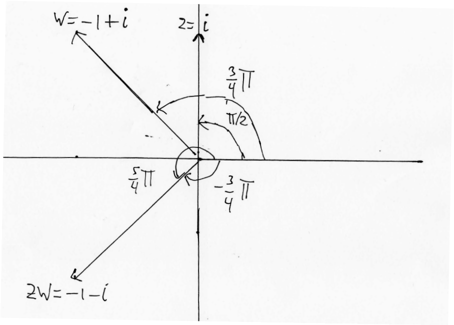
Zij $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ *met* $r > 0$, $s > 0$.

$$\begin{aligned} \textit{Dan geldt } zw &= rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)), \\ \frac{z}{w} &= \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)). \end{aligned}$$

We bewijzen alleen de stelling voor het product. Er geldt

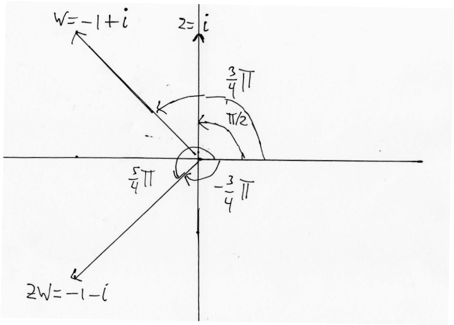
$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= rs(\cos\varphi\cos\psi + i\sin\varphi\cdot\cos\psi + \cos\varphi\cdot i\sin\psi + i^2\sin\varphi\sin\psi) \\ &= rs(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \\ &= rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \quad \text{(bekende gonioformules).} \end{aligned}$$

Voorbeeld



Neem $z = i$, $w = -1 + i$.
Laat $r = |i|$, $\varphi = \operatorname{Arg} i$, $s = |-1 + i|$, $\psi = \operatorname{Arg}(-1 + i)$. Dan
$r = 1$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $s = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$, $\psi = \frac{3}{4}\pi$.

Voorbeeld

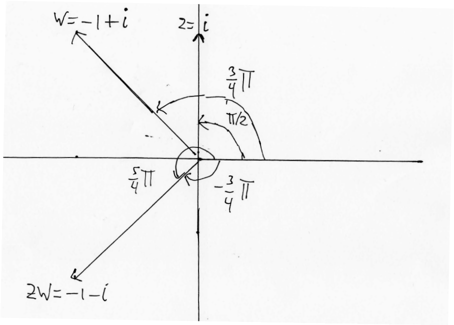


Neem $z = i$, $w = -1 + i$.
Laat $r = |i|$, $\varphi = \operatorname{Arg} i$, $s = |-1 + i|$, $\psi = \operatorname{Arg}(-1 + i)$. Dan
$r = 1$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $s = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$, $\psi = \frac{3}{4}\pi$.

Er geldt $zw = i(-1 + i) = -i + i^2 = -1 - i$,
$rs = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$, $\varphi + \psi = \frac{5}{4}\pi$, $\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dus inderdaad is $zw = rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$.

Voorbeeld



Neem $z = i$, $w = -1 + i$.
Laat $r = |i|$, $\varphi = \operatorname{Arg} i$, $s = |-1 + i|$, $\psi = \operatorname{Arg}(-1 + i)$. Dan
$r = 1$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $s = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$, $\psi = \frac{3}{4}\pi$.

Er geldt $zw = i(-1 + i) = -i + i^2 = -1 - i$,
$rs = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$, $\varphi + \psi = \frac{5}{4}\pi$, $\cos \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dus inderdaad is $zw = rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$.

Merk op dat in dit geval $\operatorname{Arg}(zw) = -\frac{3}{4}\pi = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w - 2\pi$.

De formule van de Moivre

Laat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$. Dan is $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$

De formule van de Moivre

Laat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$. Dan is $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$

Idee van bewijs.
We hebben gezien: als $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $s > 0$, dan

(*) $$zw = rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

De formule van de Moivre

Laat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$. Dan is $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$

Idee van bewijs.
We hebben gezien: als $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $s > 0$, dan

(*) $$zw = rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Pas (*) toe met $w = z$, $s = r$, $\psi = \varphi$. Dit geeft
$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

De formule van de Moivre

Laat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$. Dan is $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$

Idee van bewijs.
We hebben gezien: als $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $s > 0$, dan

$$(*) \qquad zw = rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Pas (*) toe met $w = z$, $s = r$, $\psi = \varphi$. Dit geeft $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

Pas (*) vervolgens toe met $w = z^2$, $s = r^2$, $\psi = 2\varphi$. Dan krijgen we $z^3 = z \cdot z^2 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$.

De formule van de Moivre

Laat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$. Dan is $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$

Idee van bewijs.
We hebben gezien: als $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $s > 0$, dan

$$(*) \qquad zw = rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Pas (*) toe met $w = z$, $s = r$, $\psi = \varphi$. Dit geeft
$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

Pas (*) vervolgens toe met $w = z^2$, $s = r^2$, $\psi = 2\varphi$. Dan krijgen we
$z^3 = z \cdot z^2 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$.

Door (*) toe te passen met $w = z^3$, $w = z^4$, $\ldots$ krijgen we de formule van de Moivre voor z^4, z^5, $\ldots$.

Je kan de formule van de Moivrre op een nette manier bewijzen met **volledige inductie** (voor degenen die daarmee bekend zijn).

Toepassingen: machtsverheffen en worteltrekken

Toepassing 1: machtsverheffen

Voor een gegeven complex getal $z = a + bi$ en een exponent n willen we z^n uitrekenen.

We kunnen $(a + bi)^n$ uitwerken maar voor grote n is dit erg bewerkelijk. We gebruiken een andere methode, gebaseerd op de formule van de Moivre.

Toepassing 1: machtsverheffen

Voor een gegeven complex getal $z = a + bi$ en een exponent n willen we z^n uitrekenen.

We kunnen $(a + bi)^n$ uitwerken maar voor grote n is dit erg bewerkelijk. We gebruiken een andere methode, gebaseerd op de formule van de Moivre.

- Bepaal $r > 0$ en φ zodat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, d.w.z. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Toepassing 1: machtsverheffen

Voor een gegeven complex getal $z = a + bi$ en een exponent n willen we z^n uitrekenen.

We kunnen $(a + bi)^n$ uitwerken maar voor grote n is dit erg bewerkelijk. We gebruiken een andere methode, gebaseerd op de formule van de Moivre.

- Bepaal $r > 0$ en φ zodat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, d.w.z. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.
- Dan is $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ volgens de Moivre.

Toepassing 1: machtsverheffen

Voor een gegeven complex getal $z = a + bi$ en een exponent n willen we z^n uitrekenen.

We kunnen $(a + bi)^n$ uitwerken maar voor grote n is dit erg bewerkelijk. We gebruiken een andere methode, gebaseerd op de formule van de Moivre.

- Bepaal $r > 0$ en φ zodat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, d.w.z. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.
- Dan is $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ volgens de Moivre.
- De cosinus en sinus veranderen niet als je van $n\varphi$ een veelvoud van 2π aftrekt of er een veelvoud van 2π bij optelt.

  Trek van $n\varphi$ een veelvoud van 2π af of tel er een veelvoud van 2π bij op zodat je een hoek in $(-\pi, \pi]$ krijgt en bereken de cosinus en sinus.

Voorbeeld

Bereken $(5 - 5\sqrt{3}i)^{87}$.

Voorbeeld

Bereken $(5 - 5\sqrt{3}i)^{87}$.

We bepalen eerst r en φ zodat $5 - 5\sqrt{3}i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

In het algemeen geldt voor $z = a + bi$ dat $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

In ons geval is $a = 5$, $b = -5\sqrt{3}$, dus
$r = \sqrt{5^2 + (-5\sqrt{3})^2} = \sqrt{5^2 + 5^2 \cdot 3} = \sqrt{100} = 10$,
$\cos\varphi = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-5\sqrt{3}}{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Dus we kunnen $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ nemen. We vinden dat

$$5 - 5\sqrt{3}i = 10(\cos(-\tfrac{1}{3}\pi) + i\sin(-\tfrac{1}{3}\pi)).$$

Voorbeeld

Bereken $(5-5\sqrt{3}i)^{87}$.

We bepalen eerst r en φ zodat $5-5\sqrt{3}i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

In het algemeen geldt voor $z = a+bi$ dat $r = \sqrt{a^2+b^2}$,
$\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

In ons geval is $a = 5$, $b = -5\sqrt{3}$, dus
$r = \sqrt{5^2+(-5\sqrt{3})^2} = \sqrt{5^2+5^2\cdot 3} = \sqrt{100} = 10$,
$\cos\varphi = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-5\sqrt{3}}{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Dus we kunnen $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ nemen. We vinden dat

$$5-5\sqrt{3}i = 10(\cos(-\tfrac{1}{3}\pi) + i\sin(-\tfrac{1}{3}\pi)).$$

Passen we de Moivre $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ toe met $r = 10$, $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$, $n = 87$ dan krijgen we

$$(5-5\sqrt{3}i)^{87} = 10^{87}(\cos(-\tfrac{87}{3}\pi) + i\sin(-\tfrac{87}{3}\pi)).$$

Voorbeeld

Bereken $(5-5\sqrt{3}i)^{87}$.

We bepalen eerst r en φ zodat $5-5\sqrt{3}i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

In het algemeen geldt voor $z = a+bi$ dat $r = \sqrt{a^2+b^2}$,
$\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

In ons geval is $a = 5$, $b = -5\sqrt{3}$, dus
$r = \sqrt{5^2+(-5\sqrt{3})^2} = \sqrt{5^2+5^2\cdot 3} = \sqrt{100} = 10$,
$\cos\varphi = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{-5\sqrt{3}}{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Dus we kunnen $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ nemen. We vinden dat

$$5-5\sqrt{3}i = 10(\cos(-\tfrac{1}{3}\pi) + i\sin(-\tfrac{1}{3}\pi)).$$

Passen we de Moivre $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ toe met $r = 10$, $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$, $n = 87$ dan krijgen we

$$(5-5\sqrt{3}i)^{87} = 10^{87}(\cos(-\tfrac{87}{3}\pi) + i\sin(-\tfrac{87}{3}\pi)).$$

Er geldt $\frac{87}{3}\pi = 29\pi$. Als we 30π optellen bij $-\frac{87}{3}\pi$ krijgen we π.

Dus $(5-5\sqrt{3}i)^{87} = 10^{87}(\cos\pi + i\sin\pi) = -10^{87}$.

Toepassing 2: worteltrekken

Ik zal straks uitleggen hoe je in het algemeen de oplossingen bepaalt van $z^n = q$ voor q een gegeven complex getal en n een willekeurige exponent ≥ 2.
Ik bekijk eerst het voorbeeld $z^3 = -8$.

De enige reële oplossing is $z = -2$. Maar er blijken nog twee andere complexe oplossingen te zijn.

Toepassing 2: worteltrekken

Ik zal straks uitleggen hoe je in het algemeen de oplossingen bepaalt van $z^n = q$ voor q een gegeven complex getal en n een willekeurige exponent ≥ 2.
Ik bekijk eerst het voorbeeld $z^3 = -8$.

De enige reële oplossing is $z = -2$. Maar er blijken nog twee andere complexe oplossingen te zijn.

Schrijf $-8 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Er geldt $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Toepassing 2: worteltrekken

Ik zal straks uitleggen hoe je in het algemeen de oplossingen bepaalt van $z^n = q$ voor q een gegeven complex getal en n een willekeurige exponent ≥ 2.
Ik bekijk eerst het voorbeeld $z^3 = -8$.

De enige reële oplossing is $z = -2$. Maar er blijken nog twee andere complexe oplossingen te zijn.

Schrijf $-8 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Er geldt $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Schrijf $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$. ρ en ψ zijn onbekenden die we willen bepalen. Volgens de Moivre is $z^3 = \rho^3(\cos 3\psi + i\sin 3\psi)$.

Toepassing 2: worteltrekken

Ik zal straks uitleggen hoe je in het algemeen de oplossingen bepaalt van $z^n = q$ voor q een gegeven complex getal en n een willekeurige exponent ≥ 2.
Ik bekijk eerst het voorbeeld $z^3 = -8$.

De enige reële oplossing is $z = -2$. Maar er blijken nog twee andere complexe oplossingen te zijn.

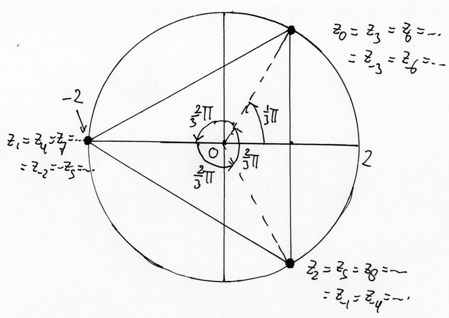
Schrijf $-8 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Er geldt $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Schrijf $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$. ρ en ψ zijn onbekenden die we willen bepalen. Volgens de Moivre is $z^3 = \rho^3(\cos 3\psi + i\sin 3\psi)$.

$$\begin{aligned}
\text{Er geldt } z^3 = -8 \quad &\Leftrightarrow \quad \rho^3(\cos 3\psi + i\sin 3\psi) = 8(\cos\pi + i\sin\pi) \\
&\Leftrightarrow \quad \rho^3 = 8, \quad \cos 3\psi = \cos\pi, \quad \sin 3\psi = \sin\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \rho = 2, \quad 3\psi = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \quad \rho = 2, \quad \psi = \tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{2}{3}k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

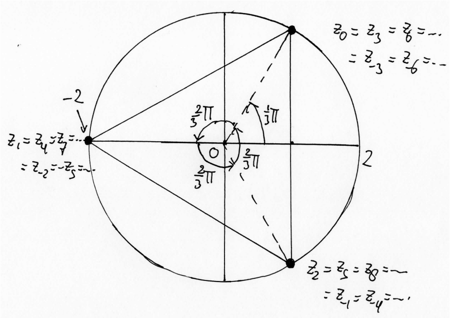
Dus de oplossingen van $z^3 = -8$ zijn
$z_k = 2(\cos(\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi))\ (k \in \mathbb{Z})$.

Toepassing 2: worteltrekken



Eén van de oplossingen is $z_0 = 2(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi)$.

We krijgen de andere oplossingen $z_1, z_2, \dots$ door steeds $\frac{2}{3}\pi$ verder te draaien, en $z_{-1}, z_{-2}, \dots$ door steeds $\frac{2}{3}\pi$ terug te draaien. Draaien we drie keer $\frac{2}{3}\pi$ verder of drie keer $\frac{2}{3}\pi$ terug dan komen we weer bij z_0 uit.



Eén van de oplossingen is $z_0 = 2(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi)$.

We krijgen de andere oplossingen $z_1, z_2, \ldots$ door steeds $\frac{2}{3}\pi$ verder te draaien, en $z_{-1}, z_{-2}, \ldots$ door steeds $\frac{2}{3}\pi$ terug te draaien. Draaien we drie keer $\frac{2}{3}\pi$ verder of drie keer $\frac{2}{3}\pi$ terug dan komen we weer bij z_0 uit.

We zien dat er uiteindelijk maar drie verschillende oplossingen zijn, namelijk $z_k = 2(\cos(\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi) + i \sin(\frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi))$ $(k = 0, 1, 2)$.

z_0, z_1, z_2 zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek op een cirkel van straal 2 en middelpunt 0. Merk op dat $z_1 = -2$.

Worteltrekken (algemeen)

We willen nu $z^n = q$ oplossen waarbij q een willekeurig complex getal $\neq 0$ is, en n een willekeurige exponent ≥ 2.

- Bepaal $r > 0$ en φ zodat $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Worteltrekken (algemeen)

We willen nu $z^n = q$ oplossen waarbij q een willekeurig complex getal $\neq 0$ is, en n een willekeurige exponent ≥ 2.

- Bepaal $r > 0$ en φ zodat $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
- Schrijf $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$. We moeten ρ en ψ oplossen. Volgens de Moivre is $z^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$.

Worteltrekken (algemeen)

We willen nu $z^n = q$ oplossen waarbij q een willekeurig complex getal $\neq 0$ is, en n een willekeurige exponent ≥ 2.

- Bepaal $r > 0$ en φ zodat $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
- Schrijf $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$. We moeten ρ en ψ oplossen. Volgens de Moivre is $z^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$.
- Er geldt

$$\begin{aligned}
z^n = q \quad &\Leftrightarrow \quad \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&\Leftrightarrow \quad \rho^n = r, \quad \cos n\psi = \cos\varphi, \quad \sin n\psi = \sin\varphi \\
&\Leftrightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi \ (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Worteltrekken (algemeen)

We willen nu $z^n = q$ oplossen waarbij q een willekeurig complex getal $\neq 0$ is, en n een willekeurige exponent ≥ 2.

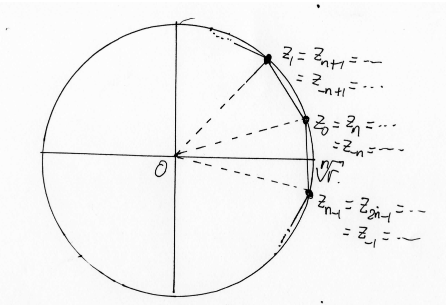
- Bepaal $r > 0$ en φ zodat $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
- Schrijf $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$. We moeten ρ en ψ oplossen. Volgens de Moivre is $z^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$.
- Er geldt

$$
\begin{aligned}
z^n = q \quad &\Leftrightarrow \quad \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&\Leftrightarrow \quad \rho^n = r, \quad \cos n\psi = \cos\varphi, \quad \sin n\psi = \sin\varphi \\
&\Leftrightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi \ (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

- Dus de oplossingen van $z^n = q$ zijn

$$
z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi)\Big) \ (k \in \mathbb{Z}).
$$

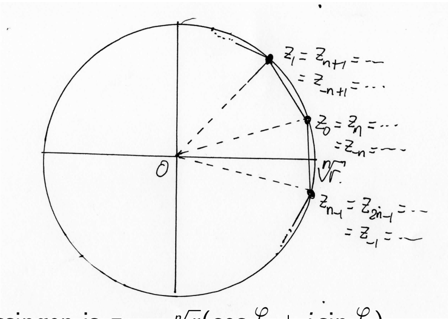
Worteltrekken (algemeen)



Eén van de oplossingen is $z_0 = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})$.

We krijgen de andere oplossingen $z_1, z_2, \ldots$ door steeds $\frac{2}{n}\pi$ verder te draaien en $z_{-1}, z_{-2}, \ldots$ door steeds $\frac{2}{n}\pi$ terug te draaien. Draaien we n keer $\frac{2}{n}\pi$ verder of n keer $\frac{2}{n}\pi$ terug dan komen we weer bij z_0 uit.

Worteltrekken (algemeen)



Eén van de oplossingen is $z_0 = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})$.

We krijgen de andere oplossingen $z_1, z_2, \ldots$ door steeds $\frac{2}{n}\pi$ verder te draaien en $z_{-1}, z_{-2}, \ldots$ door steeds $\frac{2}{n}\pi$ terug te draaien. Draaien we n keer $\frac{2}{n}\pi$ verder of n keer $\frac{2}{n}\pi$ terug dan komen we weer bij z_0 uit.

We zien dat er uiteindelijk maar n verschillende oplossingen zijn, namelijk $z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi)\Big)$ $(k = 0, 1, , \ldots, n-1)$.

$z_0, \ldots, z_{n-1}$ zijn de hoekpunten van een regelmatige n-hoek op een cirkel van straal $\sqrt[n]{r}$ met middelpunt 0
(een tweehoek bestaat uit twee punten diametraal tegenover elkaar).

Nog een voorbeeld

We herhalen wat we bewezen hebben:

Stelling

Zij $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *met* $r > 0$ *en* $n \geq 2$. *Dan heeft* $z^n = q$ *precies* n *oplossingen in* $\mathbb{C}$, *gegeven door*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi)\Big)\ (k = 0, 1, , \ldots, n-1).$$

Deze n *oplossingen zijn de hoekpunten van een regelmatige* n*-hoek op een cirkel van straal* $\sqrt[n]{r}$ *met middelpunt* 0.

Nog een voorbeeld

We herhalen wat we bewezen hebben:

Stelling

Zij $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *met* $r > 0$ *en* $n \geq 2$. *Dan heeft* $z^n = q$ *precies* n *oplossingen in* $\mathbb{C}$, *gegeven door*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi)\Big)\ (k = 0, 1, , \ldots, n-1).$$

Deze n *oplossingen zijn de hoekpunten van een regelmatige* n*-hoek op een cirkel van straal* $\sqrt[n]{r}$ *met middelpunt* 0.

Als toepassing bepalen we de vijf oplossingen van $z^5 = -3125i$.

Nog een voorbeeld

We herhalen wat we bewezen hebben:

Stelling

Zij $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$ en $n \geq 2$. Dan heeft $z^n = q$ precies n oplossingen in $\mathbb{C}$, gegeven door

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi)\Big)\ (k = 0, 1, , \ldots, n-1).$$

Deze n oplossingen zijn de hoekpunten van een regelmatige n-hoek op een cirkel van straal $\sqrt[n]{r}$ met middelpunt 0.

Als toepassing bepalen we de vijf oplossingen van $z^5 = -3125i$.

Er geldt $-3125i = 3125(-i) = 3125\big(\cos(-\frac{1}{2}\pi) + i\sin(-\frac{1}{2}\pi)\big)$.

Verder is $\sqrt[5]{3125} = 5$. Dus de vijf oplossingen zijn

$$z_k = 5\Big(\cos(-\tfrac{1}{10}\pi + \tfrac{2k}{5}\pi) + i\sin(-\tfrac{1}{10}\pi + \tfrac{2k}{5}\pi)\Big)\ \ (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

EINDE VAN HET COLLEGE