CONTINUE WISKUNDE 2, 2020

9e college: Complexe getallen 3

Jan-Hendrik Evertse
Universiteit Leiden

evertse@math.leidenuniv.nl

Kwadratische vergelijkingen en worteltrekken

We geven een voorbeeld waarbij we het oplossen van kwadratische vergelijkingen en worteltrekken moeten combineren.

We willen de oplossingen bepalen van $z^6 + (2+i)z^3 + 2i = 0$.

Kwadratische vergelijkingen en worteltrekken

We geven een voorbeeld waarbij we het oplossen van kwadratische vergelijkingen en worteltrekken moeten combineren.

We willen de oplossingen bepalen van $z^6 + (2+i)z^3 + 2i = 0$.

Laat $w := z^3$. Dan volgt $w^2 + (2+i)w + 2i = 0$.
We bepalen eerst welke waarden w aan kan nemen.

Kwadratische vergelijkingen en worteltrekken

We geven een voorbeeld waarbij we het oplossen van kwadratische vergelijkingen en worteltrekken moeten combineren.

We willen de oplossingen bepalen van $z^6 + (2+i)z^3 + 2i = 0$.

Laat $w := z^3$. Dan volgt $w^2 + (2+i)w + 2i = 0$.
We bepalen eerst welke waarden w aan kan nemen.

In het 7e college lieten we het volgende zien:
als u en v complexe getallen zijn met $u + v = 2 + i$, $uv = 2i$, dan zijn $w = -u$, $w = -v$ de oplossingen van $w^2 + (2+i)w + 2i = 0$.

We kunnen $u = i$, $v = 2$ nemen. Dus $w = -i$, $w = -2$ zijn de gevraagde oplossingen.

Kwadratische vergelijkingen en worteltrekken

We geven een voorbeeld waarbij we het oplossen van kwadratische vergelijkingen en worteltrekken moeten combineren.

We willen de oplossingen bepalen van $z^6 + (2+i)z^3 + 2i = 0$.

Laat $w := z^3$. Dan volgt $w^2 + (2+i)w + 2i = 0$.
We bepalen eerst welke waarden w aan kan nemen.

In het 7e college lieten we het volgende zien:
als u en v complexe getallen zijn met $u + v = 2 + i$, $uv = 2i$, dan zijn $w = -u$, $w = -v$ de oplossingen van $w^2 + (2+i)w + 2i = 0$.

We kunnen $u = i$, $v = 2$ nemen. Dus $w = -i$, $w = -2$ zijn de gevraagde oplossingen.

Omdat $w = z^3$, bestaan de oplossingen van $z^6 + (2+i)z^3 + 2i = 0$ uit de oplossingen van $z^3 = -i$ en de oplossingen van $z^3 = -2$.

Oplossing van $z^3 = -i$

We herhalen de stelling uit het vorige college.

Stelling

Zij $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$ en $n \geq 2$. Dan heeft $z^n = q$ precies n oplossingen in $\mathbb{C}$, gegeven door

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi)\Big)\ (k = 0, 1, , \ldots, n-1).$$

Deze n oplossingen zijn de hoekpunten van een regelmatige n-hoek op een cirkel van straal $\sqrt[n]{r}$ met middelpunt 0.

Oplossing van $z^3 = -i$

We herhalen de stelling uit het vorige college.

Stelling

Zij $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *met* $r > 0$ *en* $n \geq 2$. *Dan heeft* $z^n = q$ *precies* n *oplossingen in* $\mathbb{C}$, *gegeven door*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi)\Big)\ (k = 0, 1, , \ldots, n-1).$$

Deze n *oplossingen zijn de hoekpunten van een regelmatige* n*-hoek op een cirkel van straal* $\sqrt[n]{r}$ *met middelpunt* 0.

Er geldt $-i = \cos(-\frac{1}{2}\pi) + i\sin(-\frac{1}{2}\pi)$.
Dus we moeten de stelling toepassen met $r = 1$ en $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$.

Bijgevolg heeft $z^3 = -i$ de drie oplossingen

$$z_k = \cos(-\tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{2k}{3}\pi) + i\sin(-\tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{2k}{3}\pi)\ \ (k = 0, 1, 2).$$

Oplossing van $z^3 = -2$

Stelling

Zij $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *met* $r > 0$ *en* $n \geq 2$. *Dan heeft* $z^n = q$ *precies* n *oplossingen in* $\mathbb{C}$, *gegeven door*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2k}{n}\pi)\Big)\ (k = 0, 1, , \ldots, n-1).$$

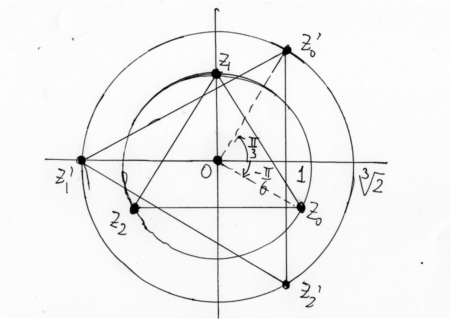
Deze n *oplossingen zijn de hoekpunten van een regelmatige* n*-hoek op een cirkel van straal* $\sqrt[n]{r}$ *met middelpunt* 0.

Er geldt $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.
Dus we moeten de stelling toepassen met $r = 2$ en $\varphi = \pi$.

Bijgevolg heeft $z^3 = -2$ de drie oplossingen

$$z_k' = \sqrt[3]{2}\Big(\cos(\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{2k}{3}\pi) + i\sin(\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{2k}{3}\pi)\Big)\ \ (k = 0, 1, 2).$$

De oplossingen van $z^6 + (2+i)z^3 + 2i = 0$.



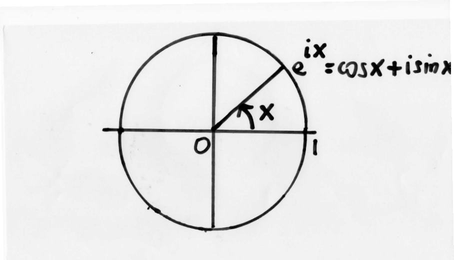
$z^6 + (2+i)z^3 + 2i = 0$ heeft precies zes oplossingen namelijk

$$\begin{aligned} z_k &= \cos(-\tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{2k}{3}\pi) + i\sin(-\tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{2k}{3}\pi) \;\; (k = 0,1,2) \;\; (\text{van } z^3 = -i), \\ z_k' &= \sqrt[3]{2}\Big(\cos(\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{2k}{3}\pi) + i\sin(\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{2k}{3}\pi)\Big) \;\; (k = 0,1,2) \;\; (\text{van } z^3 = -2). \end{aligned}$$

Deze liggen op twee gelijkzijdige driehoeken, één met de hoekpunten op een cirkel van straal 1, en de ander met de hoekpunten op een cirkel van straal $\sqrt[3]{2}$.

We gaan verder met imaginaire en complexe e-machten

De imaginaire e-macht



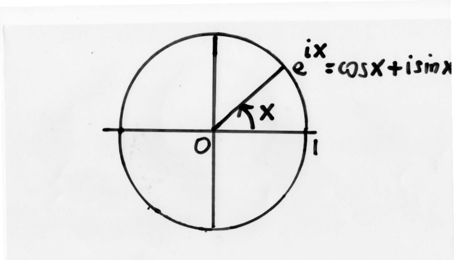
Definitie

$e^{ix} := \cos x + i \sin x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

In het bijzonder is $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

Dit is geen identiteit die moet worden bewezen maar een direct gevolg van de definitie van e^{ix}.

De imaginaire e-macht



Definitie

$e^{ix} := \cos x + i \sin x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

In het bijzonder is $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

Dit is geen identiteit die moet worden bewezen maar een direct gevolg van de definitie van e^{ix}.

Waarom hebben we e^{ix} op deze manier gedefinieerd? We hadden ook iets anders kunnen kiezen.
Het blijkt dat met deze definitie e^{ix} allerlei eigenschappen heeft die overeenkomen met de 'gewone' e-macht e^x. Dit is een 'natuurlijke' definitie.

Waarom deze definitie voor de imaginaire e-macht?

Eén van de redenen is de volgende.

Voor de "gewone e-macht e^x uit Continue wiskunde 1 geldt

$$(e^{ax})' = ae^{ax} \quad \text{voor alle } a \in \mathbb{R} \text{ (kettingregel).}$$

Als we e^{ix} differentiëren dan krijgen we

$$\begin{aligned}
(e^{ix})' &= \cos' x + i \sin' x = -\sin x + i \cos x \\
&= i(\cos x + i \sin x) \\
&= ie^{ix}.
\end{aligned}$$

Als we e^{ax} differentiëren komt er een factor a voor;
als we e^{ix} differentiëren komt er een factor i voor.

Eigenschappen van de imaginaire e-macht

Voor de 'gewone' e-macht geldt $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, $e^x / e^y = e^{x-y}$ en $1/e^x = e^{-x}$ voor alle reëele getallen x en y.

Voor de imaginaire e-macht gelden dezelfde regels:

Stelling

(i) $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$ *voor alle reële getallen* x, y,

(ii) $e^{ix} / e^{iy} = e^{i(x-y)}$ *voor alle reële getallen* x, y,

(iii) $1/e^{ix} = e^{-ix}$ *voor alle reële getallen* x.

Bewijs

Stelling

(i) $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$ *voor alle reëele getallen* x, y,

(ii) $e^{ix}/e^{iy} = e^{i(x-y)}$ *voor alle reëele getallen* x, y,

(iii) $1/e^{ix} = e^{-ix}$ *voor alle reëele getallen* x.

Bewijs van (i). Er geldt

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y + i \sin x \cos y + \cos x \cdot i \sin y + i^2 \sin x \sin y \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)}. \end{aligned}$$

Bewijs

Stelling

(i) $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$ *voor alle reële getallen* x, y,

(ii) $e^{ix}/e^{iy} = e^{i(x-y)}$ *voor alle reële getallen* x, y,

(iii) $1/e^{ix} = e^{-ix}$ *voor alle reële getallen* x.

Bewijs van (i). Er geldt

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y + i \sin x \cos y + \cos x \cdot i \sin y + i^2 \sin x \sin y \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)}. \end{aligned}$$

Bewijs van (ii). Uit (i) volgt dat $e^{i(x-y)} \cdot e^{iy} = e^{i(x-y+y)} = e^{ix}$.
Dus $e^{i(x-y)} = e^{ix}/e^{iy}$.

Bewijs

Stelling

(i) $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$ *voor alle reële getallen* x, y,
(ii) $e^{ix}/e^{iy} = e^{i(x-y)}$ *voor alle reële getallen* x, y,
(iii) $1/e^{ix} = e^{-ix}$ *voor alle reële getallen* x.

Bewijs van (i). Er geldt

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y + i \sin x \cos y + \cos x \cdot i \sin y + i^2 \sin x \sin y \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)}. \end{aligned}$$

Bewijs van (ii). Uit (i) volgt dat $e^{i(x-y)} \cdot e^{iy} = e^{i(x-y+y)} = e^{ix}$.
Dus $e^{i(x-y)} = e^{ix}/e^{iy}$.

Bewijs van (iii). Uit (ii) volgt $1/e^{ix} = e^{i\cdot 0}/e^{ix} = e^{i(0-x)} = e^{-ix}$.

Voorbeeld

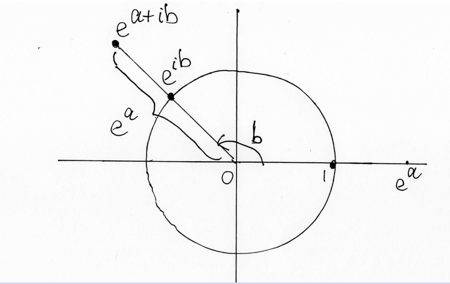
We berekenen $e^{\pi i/12}$.

Voorbeeld

We berekenen $e^{\pi i/12}$.

$$
\begin{aligned}
e^{\pi i/12} &= e^{\pi i(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})} = e^{\pi i/3} \cdot e^{-\pi i/4} \\
&= (\cos \tfrac{1}{3}\pi + i \sin \tfrac{1}{3}\pi)(\cos(-\tfrac{1}{4}\pi) + i \sin(-\tfrac{1}{4}\pi)) \\
&= (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i)(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i) \\
&= (\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}i + \tfrac{1}{4}\sqrt{6}i + \tfrac{1}{4}\sqrt{6} \\
&= \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})i.
\end{aligned}
$$

Complexe e-machten



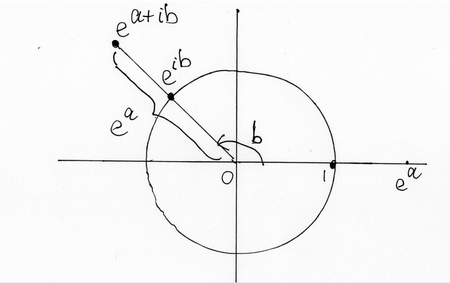
Definitie

Zij $z = a + bi$. Dan definiëren we

$$e^z := e^a \cdot e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b),$$

waarbij e^a de gewone reële e-macht is.

Complexe e-machten



Definitie

Zij $z = a + bi$. Dan definiëren we

$$e^z := e^a \cdot e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b),$$

waarbij e^a de gewone reële e-macht is.

Er geldt:

$$|e^z| = e^a, \quad b \text{ is een argument van } e^z.$$

Voorbeeld

Bereken $e^{5-\frac{2}{3}\pi i}$.

Voorbeeld

Bereken $e^{5-\frac{2}{3}\pi i}$.

$$\begin{aligned} e^{5-\frac{2}{3}\pi i} &= e^5 \cdot e^{-\frac{2}{3}\pi i} = e^5\big(\cos(-\frac{2}{3}\pi) + i\sin(-\frac{2}{3}\pi)\big) \\ &= e^5\big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\big). \end{aligned}$$

Product en quotiënt van complexe e-machten

Voor alle complexe getallen z en w geldt

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}, \quad e^z/e^w = e^{z-w}.$$

Product en quotiënt van complexe e-machten

Voor alle complexe getallen z en w geldt

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}, \quad e^z / e^w = e^{z-w}.$$

Bewijs. We bewijzen alleen de regel voor het product, het bewijs voor het quotiënt gaat op precies dezelfde manier.

Schrijf $z = a + bi$, $w = c + di$. Dan is

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= e^a \cdot e^{bi} \cdot e^c \cdot e^{di} = e^a \cdot e^c \cdot e^{bi} \cdot e^{di} \\ &= e^{a+c} \cdot e^{(b+d)i} = e^{z+w} \end{aligned}$$

(we passen hier de productregel voor de gewone e-macht en de productregel voor de imaginaire e-macht toe).

Oplossen van $e^z = q$

Als q een reëel getal > 0 is, dan is er precies één oplossing $x \in \mathbb{R}$ van $e^x = q$, namelijk $x = \ln q$.
Als $q \leq 0$ dan is er geen reëel getal x met $e^x = q$.

Hoe zit het als we naar oplossingen z van $e^z = q$ zoeken waarbij z een complex getal mag zijn?

Oplossen van $e^z = q$

Als q een reëel getal > 0 is, dan is er precies één oplossing $x \in \mathbb{R}$ van $e^x = q$, namelijk $x = \ln q$.
Als $q \leq 0$ dan is er geen reëel getal x met $e^x = q$.

Hoe zit het als we naar oplossingen z van $e^z = q$ zoeken waarbij z een complex getal mag zijn?

Voor elk complex getal $q \neq 0$ zijn er oneindig veel complexe oplossingen z met $e^z = q$.

Oplossen van $e^z = q$

Als q een reëel getal > 0 is, dan is er precies één oplossing $x \in \mathbb{R}$ van $e^x = q$, namelijk $x = \ln q$.
Als $q \leq 0$ dan is er geen reëel getal x met $e^x = q$.

Hoe zit het als we naar oplossingen z van $e^z = q$ zoeken waarbij z een complex getal mag zijn?

Voor elk complex getal $q \neq 0$ zijn er oneindig veel complexe oplossingen z met $e^z = q$.

Namelijk schrijf $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ waarbij $r = |q| > 0$.
Schrijf $z = a + bi$. We willen a en b bepalen.

Oplossen van $e^z = q$

Als q een reëel getal > 0 is, dan is er precies één oplossing $x \in \mathbb{R}$ van $e^x = q$, namelijk $x = \ln q$.
Als $q \leq 0$ dan is er geen reëel getal x met $e^x = q$.

Hoe zit het als we naar oplossingen z van $e^z = q$ zoeken waarbij z een complex getal mag zijn?

Voor elk complex getal $q \neq 0$ zijn er oneindig veel complexe oplossingen z met $e^z = q$.

Namelijk schrijf $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ waarbij $r = |q| > 0$.
Schrijf $z = a + bi$. We willen a en b bepalen. Dit gaat als volgt:

$$\begin{aligned} e^z = q \quad &\Leftrightarrow \quad e^a(\cos b + i\sin b) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &\Leftrightarrow \quad e^a = r,\ \cos b = \cos\varphi,\ \sin b = \sin\varphi \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{namelijk } |e^z| = e^a,\ |q| = r) \end{aligned}$$

Oplossen van $e^z = q$

Als q een reëel getal > 0 is, dan is er precies één oplossing $x \in \mathbb{R}$ van $e^x = q$, namelijk $x = \ln q$.
Als $q \leq 0$ dan is er geen reëel getal x met $e^x = q$.

Hoe zit het als we naar oplossingen z van $e^z = q$ zoeken waarbij z een complex getal mag zijn?

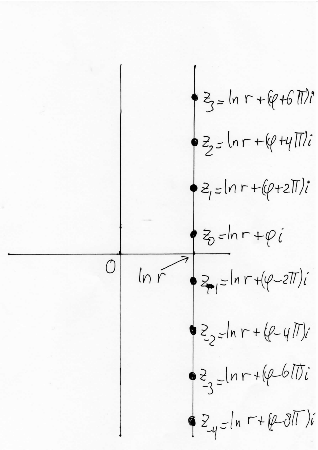
Voor elk complex getal $q \neq 0$ zijn er oneindig veel complexe oplossingen z met $e^z = q$.

Namelijk schrijf $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ waarbij $r = |q| > 0$.
Schrijf $z = a + bi$. We willen a en b bepalen. Dit gaat als volgt:

$$\begin{aligned}
e^z = q \quad &\Leftrightarrow \quad e^a(\cos b + i\sin b) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
&\Leftrightarrow \quad e^a = r,\ \cos b = \cos\varphi,\ \sin b = \sin\varphi\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{namelijk } |e^z| = e^a,\ |q| = r)\\
&\Leftrightarrow \quad a = \ln r,\ \ b = \varphi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Dus de oplossingen van $e^z = q$ zijn $z_k = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Oplossen van $e^z = q$



Zij $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r = |q| > 0$. Dan zijn de oplossingen van $e^z = q$ gegeven door

$$z_k = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Eén van de oplossingen is

$$z_0 = \ln r + \varphi i.$$

We krijgen $z_1, z_2, \ldots$ door steeds 2π omhoog te gaan en $z_{-1}, z_{-2}, \ldots$ door steeds 2π naar beneden te gaan.

Dit geeft oneindig veel oplossingen en die liggen op een verticale lijn.

Voorbeeld

We bepalen de oplossingen van $e^z = 5 - 5i$.

Voorbeeld

We bepalen de oplossingen van $e^z = 5 - 5i$.

Stap 1. Schrijf $5 - 5i$ als $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r = |5 - 5i|$.

Er geldt $r = |5 - 5i| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Dus $\cos\varphi = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

We kunnen $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$ nemen.

Voorbeeld

We bepalen de oplossingen van $e^z = 5 - 5i$.

Stap 1. Schrijf $5 - 5i$ als $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r = |5 - 5i|$.

Er geldt $r = |5 - 5i| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
Dus $\cos\varphi = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
We kunnen $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$ nemen.

Stap 2. Algemeen geldt: als $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dan zijn de oplossingen van $e^z = q$ gegeven door $z_k = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i$ $(k \in \mathbb{Z})$.

In ons geval met $r = 5\sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{1}{4}\pi$ geeft dit

$$z_k = \ln(5\sqrt{2}) + (-\tfrac{1}{4}\pi + 2k\pi)i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

EINDE VAN HET COLLEGE