COMPLEXE GETALLEN

1 Invoering van de complexe getallen

De complexe getallen zijn al behoorlijk oud; in de zestiende eeuw doken ze op bij het oplossen van algebraïsche vergelijkingen. Complexe getallen spelen een belangrijke rol bij het oplossen van tweede-orde differentiaalvergelijkingen; dit soort differentiaalvergelijkingen treedt dikwijls op bij trillingsverschijnselen.

Definitie

We voeren een nieuw (niet reëel) getal i in en we eisen dat $i^2 = -1$. *Complexe getallen* zijn getallen van de vorm

$$z = a + bi,$$

waarbij a en b reële getallen zijn. We zeggen dat a het *reële deel* en b het *imaginaire deel* van het complex getal z is. We gebruiken de notatie

$$a = \operatorname{Re} z \quad \text{en} \quad b = \operatorname{Im} z.$$

De verzameling van alle complexe getallen noteren we met $\mathbb{C}$.

1. VOORBEELD. Het reële deel van $3 - 2i$ is 3 en het imaginaire deel is -2. In 'formule' $\operatorname{Re}(3 - 2i) = 3$ en $\operatorname{Im}(3 - 2i) = -2$.

Optellen en vermenigvuldigen

We gebruiken gewone rekenregels die ook voor reële getallen gelden. Optellen gaat zonder problemen: de som van $a + bi$ en $c + di$ is

$$a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

Vermenigvuldigen gaat ook goed, werk de haakjes weg en vervang telkens i^2 door -1, zo geldt bijvoorbeeld $(1+2i)(3+4i) = 1\cdot 3+1\cdot 4i+2i\cdot 3+2i\cdot 4i$, waarin $2i \cdot 4i = 8i^2 = -8$, en dus $(1 + 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i + 6i - 8 = -5 + 10i$. In het algemeen krijgen we

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bic + bidi \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

en dit is weer van de juiste vorm.

Voor straks, bij het delen, noemen we een belangrijk speciaal geval. In het product $(3+4i)(3-4i)$ vallen de termen met i tegen elkaar weg: $(4+3i)(4-3i) = 16 - 12i + 12i - 9i^2 = 16 + 9 = 25$. In het algemeen: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Delen

We kunnen complexe getallen ook op elkaar delen. Daarbij is de opmerking hierboven heel handig; om bijvoorbeeld $7 + 24i$ door $4 + 3i$ te delen kun je als volgt te werk gaan:

$$\frac{7 + 24i}{4 + 3i} = \frac{7 + 24i}{4 + 3i} \times \frac{4 - 3i}{4 - 3i} = \frac{(7 + 24i)(4 - 3i)}{25}$$

Je kunt nu het product in de teller uitrekenen en van het resultaat de reële en imaginaire delen door 25 delen, er komt dan

$$\frac{7 + 24i}{4 + 3i} = \frac{100 + 75i}{25} = \frac{100}{25} + \frac{75}{25}i = 4 + 3i$$

(reken maar na).

De algemene formules krijg je ook zo:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}. \tag{1}$$

en

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Het is overigens niet aan te raden de formules uit het hoofd te leren; beter is het de manier van het voorbeeld te onthouden. We doen er nog één:

2. Voorbeeld. We delen $-1+5i$ door $2+3i$. Vermenigvuldig teller en noemer met $2-3i$:

$$\frac{-1+5i}{2+3i} = \frac{-1+5i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{(-2+15)+(10+3)i}{4+9} = 1+i.$$

Meetkunde der complexe getallen

Complexe getallen corresponderen met de punten van het platte vlak $\mathbb{R}^2$. Een complex getal wordt immers volledig bepaald door twee reële getallen: $2+3i$ wordt bepaald door 2 en 3, waarbij 3 aan het imaginaire getal i vastgeplakt zit. Op deze manier correspondeert het getal $2+3i$ met het punt $(2,3)$ in $\mathbb{R}^2$. Evenzo correspondeert $-1-5i$ met het punt $(-1,-5)$.

Als we de punten in het platte vlak als complexe getallen beschouwen dan zullen we — om dit te benadrukken — van het *complexe vlak* spreken. De x-as noemen we dan de *reële as* en de y-as heet dan de *imaginaire as*.

Modulus

3. Definitie. De *modulus* van een complex getal is de afstand van dat getal tot de oorsprong. We noteren de modulus van het getal z als $|z|$.

Dus als $z = a+bi$ dan geldt $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

4. Voorbeeld. De modulus van $3+4i$ is $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ en de modulus van $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$ is 1.

5. Stelling. *Als z en w complexe getallen zijn dan geldt $|zw| = |z| \cdot |w|$.*

Bewijs. Schrijf $z = x+yi$ en $w = u+vi$ en reken alles maar uit: $zw = (xu-yv)+(xv+yu)i$ en dus

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (xu-yv)^2 + (xv+yu)^2 \\ &= x^2u^2 - 2xyuv + y^2v^2 + x^2v^2 + 2xyuv + y^2u^2 \\ &= x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2. \end{aligned}$$

Het laatste laat zich ontbinden tot $(x^2+y^2)(u^2+v^2)$ en dat is precies $\big(|z|\cdot|w|\big)^2$. $\square$

6. Voorbeeld. De modulus van $3+4i$ is gelijk aan 5 dus de modulus van $(3+4i)^3$ is $5^3 = 125$ en de modulus van $(3+4i)\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^{10}$ is $5 \cdot 1^{10} = 5$.

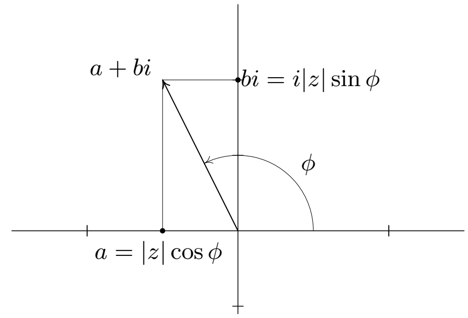
Argument

Een ander meetkundig aspect van een complex getal is zijn *argument*. Om dit te definiëren bekijken we even een complex getal $z = a+bi$, $z \neq 0$.

In Figuur 1 zijn aangegeven: de hoek φ die de vector $a+bi$ met de positieve reële as maakt, het reële deel $a = |z|\cos\varphi$ en i maal het imaginaire deel: $bi = i|z|\sin\varphi$.

We zien dat een complex getal ook bepaald wordt door zijn modulus en de hoek die het met de positieve reële as maakt. Die hoek noemen we het *argument* van het complexe getal; het argument is tot op een veelvoud van 2π na bepaald. Zo kunnen we bijvoorbeeld $1+i$ schrijven als $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, maar ook als $\sqrt{2}(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4})$ of als $\sqrt{2}(\cos\frac{-7\pi}{4} + i\sin\frac{-7\pi}{4})$.

Uit alle mogelijke argumenten kiezen we één speciale en die zullen we de *hoofdwaarde van het argument* van het complexe getal noemen.



Figuur 1: Het argument

7. Definitie. Laat $z = a+bi$ een complex getal ongelijk aan 0 zijn met modulus r. De *hoofdwaarde van het argument* van z is de unieke hoek φ die voldoet aan $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ en waarvoor $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. We noteren die hoofdwaarde als $\operatorname{Arg} z$.

Het argument van 0 is niet gedefinieerd.

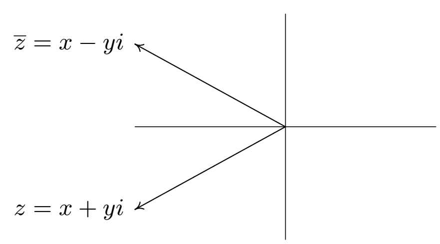
8. Opmerking. De getallen r en φ worden ook de *poolcoördinaten* van het punt (a, b) genoemd. Een punt is hierbij volledig vastgelegd door zijn afstand r tot de oorsprong (de pool) en de hoek φ die zijn plaatsvector met de positieve x-as (de poollijn) maakt.

Poolcoördinaten zijn erg handig als je rotatiebewegingen wilt beschrijven. Zo is de cirkel met straal 10 om $(0, 0)$ in poolcoördinaten heel eenvoudig te beschrijven met $r = 10$.

9. Voorbeeld. Het argument van i is $\pi/2$, het argument van -1 is π en het argument van $-1-i$ is $-3\pi/4$. Verder geldt $\operatorname{Arg} 1 = 0$ en $\operatorname{Arg}(1+i) = \pi/4$ (zie boven).

Complex toegevoegde

We kunnen een complex getal $z = x + yi$ in de reële as spiegelen; we krijgen dan het getal $x - yi$. Dit getal noteren we als $\overline{z}$ en we noemen het de *complex toegevoegde* of *complex geconjugeerde* van z. Zie Figuur 2.



Figuur 2: Complex toegevoegde

De complex toegevoegde kan allerlei berekeningen eenvoudig maken; zo geldt bijvoorbeeld $|z|^2 = z\overline{z}$ en de berekening van $1/z$ in formule (1) op bladzijde 2 wordt vaak als volgt opgeschreven:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

De oplossing van de vierkantsvergelijking

Een vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ lossen we met behulp van de abc-formule op: eerst bereken je $D = b^2 - 4ac$ (de *discriminant*). Als $D \geqslant 0$ dan wordt de oplossing gegeven door

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

en als $D < 0$ dan heeft de vergelijking geen (reële) oplossing.

Als we complexe getallen toelaten krijgen we ook in het geval $D < 0$ oplossingen. Het is hierbij nuttig te weten *hoe* de abc-formule tot stand komt.

10. Voorbeeld. We lossen de vergelijking $x^2+4x+9 = 0$ op (NB $D = 16-36 = -20$). We splitsen eerst kwadraat af; dat gaat als volgt. Merk eerst op dat x^2+4x te voorschijn komt als je $(x+2)^2$ uitwerkt: immers $(x+2)^2 = x^2+4x+4$. Daarom schrijven we

$$x^2 + 4x + 9 = (x + 2)^2 - 4 + 9 = (x + 2)^2 + 5$$

Nu krijgen we de vergelijking $(x+2)^2+5 = 0$ of $(x+2)^2 = -5$. Maar we kennen twee getallen met kwadraat -5, namelijk $i\sqrt{5}$ en $-i\sqrt{5}$. We vinden $x+2 = \pm i\sqrt{5}$ ofwel $x = -2 \pm i\sqrt{5}$.

Merk op dat dit klopt met de abc-formule, als we maar $i\sqrt{20}$ schrijven in plaats van $\sqrt{-20}$.

In het algemeen gaat het ook zo, alleen wat ingewikkelder. We nemen een vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ (met $a \neq 0$). Haal a buiten de haakjes — $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$ — en splits kwadraat af:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}.$$

Onze vergelijking wordt nu

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Als $D \geqslant 0$ dan krijgen we als vanouds

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Als $D < 0$ dan gebruiken we ons nieuwe getal i en $\sqrt{-D}$ om de volgende complexe oplossingen van onze vergelijking te krijgen:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Opgaven

1. Bereken:

(a) $\dfrac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i}$;

(b) $\dfrac{1}{1 - 3i} - \dfrac{1}{1 + 3i}$.

2. Bereken:

(a) $\dfrac{1}{i}$;

(b) $\dfrac{1}{1 + i}$;

(c) $\dfrac{2 + 3i}{3 - 4i}$;

(d) $\dfrac{1 + i}{1 - 2i}$;

(e) $i^5 + i^{16}$;

(f) $\frac{1}{2}(1 + i)\left(1 + i^{-8}\right)$.

3. Bereken:

(a) $|3-4i| \cdot |4+3i|$;

(b) $|\dfrac{1}{1+3i} - \dfrac{1}{1-3i}|$;

(c) $\dfrac{5}{3-4i} + \dfrac{10}{4+3i}$;

(d) $\dfrac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$.

4. Vind modulus en argument van de volgende complexe getallen en teken de getallen in het complexe vlak.

(a) $2i$;

(b) $-3i$;

(c) -1;

(d) 1;

(e) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$;

(f) $(-1+i)^3$;

(g) $(-1-i)^3$;

(h) $\dfrac{1}{1+i}$;

(i) $\dfrac{1}{(1+i)^2}$.

5. Vind argument en modulus van de volgende complexe getallen en teken de getallen in het complexe vlak.

(a) $3+3i$;

(b) $-1+i\sqrt{3}$;

(c) -2;

(d) $-2-2i\sqrt{3}$.

6. Reken na dat in het algemeen $\overline{z}+\overline{w} = \overline{z+w}$, $\overline{z}\cdot\overline{w} = \overline{z \cdot w}$, $z\cdot\overline{z} = |z|^2$ en $1/\overline{z} = \overline{1/z}$.

7. Splits kwadraat af:

(a) x^2+2x+5;

(b) $2x^2-2x+3$;

(c) $5-4x-x^2$.

8. Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{C}$:

(a) $z^2+5z+14=0$;

(b) $z^2+3z+4=0$;

(c) $2z^2-8z+14=0$;

(d) $7z-z^2-15=0$.

Rekenen met modulus en argument

Met behulp van modulus en argument kunnen we mooie formules opstellen voor het produkt en quotiënt van twee complexe getallen. Neem maar twee complexe getallen $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ en $\beta = s(\cos\psi + i\sin\psi)$. De modulus van $\alpha\beta$ is rs, zoals we in Stelling 5 gezien hebben. We werken het produkt uit en we gebruiken een paar gonioformules:

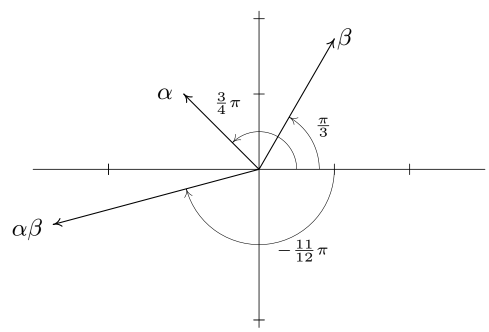
$$\begin{aligned}\alpha\beta &= rs(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)\\ &= rs\big((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)\big)\\ &= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big).\end{aligned}$$

Vermenigvuldigen komt dus neer op: modulussen vermenigvuldigen en argumenten optellen. Als we de hoofdwaarde van het argument willen hebben dan moeten we het gevonden argument soms wat aanpassen.

11. Voorbeeld. Het produkt van $-1+i$ en $1+i\sqrt{3}$ is $(-1-\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})$ (ga na). De som van de argumenten is $\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{12}\pi$. Dit is groter dan π en kan dus niet de hoofdwaarde van het argument zijn; als we er 2π van aftrekken krijgen we $-\frac{11}{12}\pi$ en dat zit in het goede interval. Voorts is het produkt van de modulussen gelijk aan $\sqrt{2}\cdot 2$, dus:

$$\begin{aligned}(-1-\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3}) &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-11\pi}{12} + i\sin\frac{-11\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

De hoofdwaarde van het argument van het produkt is dus $-\frac{11}{12}\pi$. In Figuur 3 zijn alle getallen weergegeven.



Figuur 3: Argument en produkt

Opgave 2.1. Laat α en β complexe getallen zijn met $\operatorname{Arg}\alpha=\varphi$ en $\operatorname{Arg}\beta=\psi$. Ga zorgvuldig na dat

$$\operatorname{Arg}(\alpha\beta) = \begin{cases}\varphi+\psi-2\pi & \text{als } \pi<\varphi+\psi,\\ \varphi+\psi & \text{als } -\pi<\varphi+\psi\leqslant\pi \text{ en}\\ \varphi+\psi+2\pi & \text{als } \varphi+\psi\leqslant-\pi.\end{cases}$$

Iets dergelijks kunnen voor het delen van complexe getallen doen. In de eerste plaats, als $\beta = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ dan $1/\beta = (1/s)(\cos\psi - i\sin\psi)$ (reken maar na).

We kunnen dan als volgt α door β delen:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{r}{s}(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi)\\ &= \frac{r}{s}\big(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\big)\end{aligned}$$

Dus, *modulussen delen en argumenten aftrekken.*

Het rekenen met modulus en argument is zeer handig als je grote machten van complexe getallen uit moet rekenen.

12. VOORBEELD. We berekenen $(1-i\sqrt{3})^{10}$. De modulus van $1-i\sqrt{3}$ is $\sqrt{1+3} = 2$ en het argument is $-\pi/3$ want $-\pi/3$ is de enige hoek in het interval $(-\pi,\pi]$ waarvan de cosinus gelijk is aan $1/2$ en waarvan de sinus gelijk is aan $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. De modulus van $(1-i\sqrt{3})^{10}$ is dus gelijk aan $2^{10} = 1024$. Het argument vinden we door $(1-i\sqrt{3})^{10}$ te schrijven als $1024\big(\cos(-\frac{10}{3}\pi) + i\sin(-\frac{10}{3}\pi)\big)$ (het argument met 10 vermenigvuldigen). Als we dan 4π bij $-\frac{10}{3}\pi$ optellen verandert het getal niet maar krijgen we wel $\frac{2}{3}\pi$ en dat ligt in $(-\pi,\pi]$. Het argument van $(1-i\sqrt{3})^{10}$ is dus $\frac{2}{3}\pi$.

We zien dat $(1-i\sqrt{3})^{10} = 1024(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi) = -512 + 512i\sqrt{3}$.

Formule van De Moivre

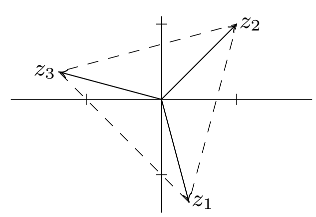
13. STELLING (Formule van De Moivre). *Laat φ een reëel getal zijn en $n \in \mathbb{Z}$. Dan geldt $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.*

Bewijs. Dit volgt meteen door 'hoeken optellen'; bedenk dat de modulus van $\cos\varphi + i\sin\varphi$ gelijk aan 1 is. $\square$

We kunnen met dit idee ook bepaalde andere vergelijkingen oplossen.

14. VOORBEELD. We lossen de vergelijking $z^3 = -2+2i$ op. Schrijf hiertoe $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, waarbij $\varphi = \operatorname{Arg} z$ (de *hoofdwaarde* dus). Dan geldt $z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$; tegelijkertijd geldt $-2+2i = 2\sqrt{2}\big(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi)\big)$. Uit de vergelijking halen we dan $r^3 = 2\sqrt{2}$ en $\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi)$. Dit geeft ons $r = \sqrt{2}$ (want er is maar één positief getal met $2\sqrt{2}$ als derde macht) en $3\varphi = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, ofwel $\varphi = \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

Maar φ is een hoofdwaarde, dus $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ en daarom komen alleen $k = -1$, 0 en 1 in aanmerking, met de volgende waarden voor φ: $-\frac{5}{12}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$ en $\frac{11}{12}\pi$. De bijbehorende oplossingen van de vergelijking zijn dan: $z_1 = \sqrt{2}\big(\cos(-\frac{5}{12}\pi) + i\sin(-\frac{5}{12}\pi)\big)$, $z_2 = \sqrt{2}\big(\cos(\frac{1}{4}\pi) + i\sin(\frac{1}{4}\pi)\big)$ en $z_3 = \sqrt{2}\big(\cos(\frac{11}{12}\pi) + i\sin(\frac{11}{12}\pi)\big)$. De oplossingen vormen een mooie gelijkzijdige driehoek.



Rekenen met de complex toegevoegde

De complex toegevoegde kan sommige formules wat eenvoudiger maken. Om te beginnen kunnen we $\operatorname{Re} z$ en $\operatorname{Im} z$ in z en $\overline{z}$ uitdrukken:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{en} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

(schrijf maar uit).

Als $|z| = 1$ dan hebben we $1/z = \overline{z}$; dit kan ook wel eens makkelijk zijn.

15. Voorbeeld. Als $|z| = 1$ dan is $z/(z^2 - 2z + 1)$ reëel (mits $z \neq 1$). Immers, vermenigvuldig teller en noemer met $\overline{z}$ en gebruik dat $z\overline{z} = 1$:

$$\frac{z\overline{z}}{z^2\overline{z} - 2z\overline{z} + \overline{z}} = \frac{1}{z - 2 + \overline{z}} = \frac{1}{2\operatorname{Re} z - 2}.$$

Dit laatste is een reëel getal en, omdat $-1 \leqslant \operatorname{Re} z < 1$, kleiner dan of gelijk aan $-\frac{1}{4}$.

De exponentiële functie

Onze laatste taak is het afspreken wat de waarde van e^z is voor willekeurige complexe getallen z. Schrijf $z = x + yi$; wat e^z ook zal zijn, we willen in ieder geval de gelijkheid $e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}$ hebben. Nu weten we wat e^x is, het probleem is nog het definiëren van e^{yi} voor reële getallen y. Welnu, gebleken is dat de volgende afspraak het best werkt:

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y.$$

We zullen later zien dat we deze afspraak zeer goed kunnen rechtvaardigen. Voorlopig moet de volgende berekening illustreren dat we niet iets totaal onzinnigs hebben gedaan.

$$\begin{aligned} e^{ia} \cdot e^{ib} &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= \cos(a + b) + i \sin(a + b) \\ &= e^{ia+ib} \end{aligned}$$

(Zie bladzijde 6 voor de middelste stap.) Het gevolg is dat voor elk tweetal complexe getallen z en w geldt

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w.$$

We vatten de belangrijkste eigenschappen van de complexe exponentiële functie samen in de volgende stelling.

16. Stelling. *De functie e^z heeft de volgende eigenschappen.*

1. *Als $x \in \mathbb{R}$ dan $|e^{ix}| = 1$.*
2. *Als $z = x + iy$ dan $|e^z| = e^x$.*
3. *Voor elke z geldt $e^z = e^{z+2\pi i}$; de complexe exponentiële functie is dus periodiek, met periode $2\pi i$.*

We kunnen nu nog een schrijfwijze voor complexe getallen introduceren. Als α een complex getal is met modulus r en argument φ dan geldt $\alpha = re^{i\varphi}$. Via deze schrijfwijze kunnen we ook exponentiële vergelijkingen oplossen.

17. Voorbeeld. We lossen de vergelijking $e^z = -1 + i$ op. Nu geldt $-1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Stel $z = x + iy$ is een oplossing. Omdat $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ krijgen we de volgende vergelijkingen

$$e^x = \sqrt{2} \quad \text{en} \quad e^{iy} = e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Hieruit volgt dat $x = \frac{1}{2}\ln 2$ en $y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. De vergelijking heeft dus oneindig veel oplossingen:

$$\frac{1}{2}\ln 2 + \Big(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\Big)i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

$e^{i\pi} + 1 = 0$

We besluiten deze paragraaf met een formule die voor sommigen de mooiste uit de wiskunde is omdat zij de belangrijkste vijf getallen — 0, 1, e, π en i — bij elkaar brengt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

1. Schrijf elk getal in de vorm $x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $e^{\pi i/2}$;

(b) $3e^{\pi i}$;

(c) $-e^{-\pi i}$;

(d) $2e^{-\frac{1}{2}\pi i}$;

(e) $i + e^{\pi i}$;

(f) $e^{\frac{1}{4}\pi i} - e^{-\frac{1}{4}\pi i}$;

(g) $\dfrac{1 - e^{\frac{1}{2}\pi i}}{1 + e^{\frac{1}{2}\pi i}}$;

(h) $\dfrac{1 - e^{\frac{1}{2}\pi i}}{1 + e^{-\frac{1}{2}\pi i}}$.

2. Bereken:

(a) $(1 + i)^{50}$;

(b) $(1 - i)^{100}$;

(c) $(-2 + 2i)^{20}$;

(d) $(-1 + i\sqrt{3})^{10}$.

3. Los de volgende vergelijkingen op en teken de oplossingen in het complexe vlak.

(a) $z^3 = 1$;

(b) $z^3 = -1$;

(c) $z^4 = -16$;

(d) $z^8 = 256$.

4. Bewijs dat $e^z \neq 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

5. Vind alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt:

(a) $e^z = i$;

(b) $e^z = -2$.

(c) $e^z = -1 + i$;

(d) $e^{2z} = i + \sqrt{3}$.

6. Zij θ een reëel getal. Er geldt

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{en} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

(a) Bewijs deze formules

(b) Bewijs nu

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad \text{en} \qquad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

7. Bereken i^i.

ANTWOORDEN

Paragraaf 1.

1. (a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$;
(b) $\dfrac{3}{5}i$.

2. (a) $-i$;
(b) $\frac{1-i}{2}$;
(c) $\frac{-6+17i}{25}$;
(d) $\frac{-1+3i}{5}$;
(e) $1+i$;
(f) $1+i$.

3. (a) 25;
(b) $\frac{3}{5}$;
(c) $\frac{11-2i}{5}$;
(d) $\frac{16-2i}{5}$.

4. (a) $2,\ \pi/2$;
(b) $3,\ -\pi/2$;
(c) $1,\ \pi$;
(d) $1,\ 0$;
(e) $1,\ \pi/4$;
(f) $2\sqrt{2},\ \pi/4$;
(g) $2\sqrt{2},\ -\pi/4$;
(h) $\sqrt{2}/2,\ -\pi/4$;
(i) $1/2,\ -\pi/2$.

5. (a) $3\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}$;
(b) $2,\ \dfrac{2}{3}\pi$;
(c) $2,\ \pi$;
(d) $4,\ -\dfrac{2}{3}\pi$.

7. (a) $(x+1)^2+4$;
(b) $2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}$;
(c) $9-(x+2)^2$.

8. (a) $z=-\frac{5}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{31}$;
(b) $z=-\frac{3}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{7}$;
(c) $z=2\pm i\sqrt{3}$;
(d) $z=\frac{7}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{11}$.

Paragraaf 2.

1. (a) i;
(b) -3;
(c) 1;
(d) $-2i$;
(e) $-1+i$;
(f) $i\sqrt{2}$;
(g) $-i$
(h) 1.

2. (a) $2^{25}i$;
(b) -2^{50};
(c) -2^{30};
(d) $512(-1+i\sqrt{3})$.

3. (a) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ 1,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$.
(b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ -1$.
(c) $\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ -\sqrt{2}-i\sqrt{2},\ \sqrt{2}-i\sqrt{2}$.
(d) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2},\ -2i,\ \sqrt{2}-i\sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{2}+i\sqrt{2},\ 2i,\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ -2$.

5. (a) $\frac{1}{2}\pi i+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$;
(b) $\ln 2+\pi i+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.
(c) $\ln 2+\frac{3}{4}\pi i+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$;
(d) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{12}\pi i+k\pi i;\ k\in\mathbb{Z}$.

7. $e^{-\pi/2-2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}$.